

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

ALKALMAZOTT  
MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI:  
RÉNYI ALFRÉD

I. KÖTET



1952

304645

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK

## KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI:  
RÉNYI ALFRÉD

I. KÖTET

1952

SZERKESZTŐSÉG:  
ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZET,  
BUDAPEST, VI., SZTÁLIN-ÚT 31., I. EM.

TECHNIKAI SZERKESZTŐ:  
LÁ CZAY ERVIN NÉ

Az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei évente általában egy kötetben jelennek meg, s az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó dolgozatokat közölnek.

Minden szerzőt 100 darab különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

A Közlemények kötetenként rendelhetők meg.

Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány-u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-48), külföldi megrendelések a „Kultura” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Sztálin-út 21. útján eszközölhetők.

Cserekapcsolatokat közvetlenül a Szerkesztőség intéz.

A kiadásért felel: Mestyán János — Műszaki felelős: Tóth Ferenc

A kézirat beérkezett: 1952 XI. 5-től — 1953 II. 16-ig.

Példányszám: 1000. Terjedelem: 29 ív + 2 tábla, 147 ábra

Ez a könyv a MNSZ 5602/B szerint készült

Akadémiai nyomda, Gerlőczy-u. 2. — 21946 53 — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

MAGYAR  
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA



## ELŐSZÓ

A felszabadulás után a matematika terén hazánkban megindult fejlődés egyik legfőbb jellegzetessége abban áll, hogy a magyar matematikusok egyre nagyobb érdeklődéssel fordulnak a matematikának a termelésben — különösen az iparban — valamint más tudományokban való alkalmazásai felé. A matematikának hazánkban nagy hagyományai vannak, számos magyar matematikus szerzett a múltban is dicsőséget hazánknek, azonban a matematikai kutatás nálunk a felszabadulás előtt nem találta meg a kapcsolatot a gyakorlattal. Ennek társadalmi és ideológiai okai közismertek: az elmaradt magyar ipar nem is igen lépett fel igényekkel a matematikusok felé, másrészt meglehetősen el voltak terjedve a tudomány öncélúságát hirdető és a tudomány eredményeinek gyakorlati alkalmazásait lebecsülő hamis nézetek. Felszabadulásunk e téren is gyökeres változást hozott. A magyar ipar hároméves, majd ötéves tervünk által megszabott hatalmas ütemű fejlesztése, a szocializmus építése során felmerülő számos egyéb feladat egyre újabb problémákat állít a magyar tudósok, köztük a matematikusok elé. Megismertük a tudomány és gyakorlat termékeny egységét, amelyet a szovjet tudomány megvalósított és ezt a példát követve, a szovjet tudósok segítségét felhasználva mi is ennek megvalósítására törekszünk. A magyar tudósok felismerték, hogy a tudós számára nincs szebb és méltóbb feladat, minthogy tudását az egész dolgozó nép szolgálatába állítsa. Hogy ezt a matematika terén megvalósíthassák, a magyar matematikusok előtt tehát a felszabadulás utáni években az a feladat állt, hogy a nálunk régebben elhanyagolt alkalmazott matematikai kutatást hazánkban megindítsák és a szocializmus építése által megkívánt színvonalra emeljék. Nem állíthatjuk, hogy utóbbi célt már elértük volna, még igen sok munka áll előttünk, azonban kétségtelen, hogy a döntő fordulat ez irányban megtörtént és ha nem is lehetünk megelégedve eredményeinkkel, elmondhatjuk, hogy a párt és a kormány útmutatásait követve és messzemenő támogatása segítségével elindultunk a helyes úton. Hogy ezen az úton már eredményeket is tudunk felmutatni, annak bizonyítéka többek között ez a kötet is.

A legfontosabb lépés az alkalmazott matematika fejlesztése terén az volt, hogy a Magyar Népköztársaság kormánya 1950 júniusában létrehozta a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetét. Az Intézet feladata kettős: egyrészt tudományos kutatómunka a matematikának az alkalmazások szempontjából közvetlen jelentőséggel bíró ágában, másrészt a népgazdaság és a tudományos élet által felvetett, matematikai módszerek alkalmazását igénylő problémák megoldása. A két feladat természetesen elválaszthatatlanul összefügg egymással. Az Intézet Közleményeinek ez az első kötete is mutatja, hogy a gyakorlat által felvetett problémák az

esetek jórésztében nem meglévő módszerek sablonos felhasználását, hanem újszerű, eddig megoldatlan matematikai problémák vizsgálatát és minél teljesebb feltárását, új módszerek kidolgozását és alkalmazását kívánják meg. Az alkalmazott matematika tehát többet jelent, mint a meglévő matematikai ismeretek gyakorlati alkalmazását: ezen túlmenően a matematikának az alkalmazások által megkívánt fejlesztését is jelenti. Éppen ezért az Intézet tudományos terv alapján végzett kutatómunkája és az üzemektől és egyéb állami intézményektől kapott külső megbízásra végzett munkája szervesen kapcsolódnak egymáshoz. Népgazdasági tervünk fő irányvonalai által az Intézet elé állított feladatok szabják meg az Intézet kutatási tervének irányait és ezeknek a kutatásoknak az eredményessége az előfeltétele annak, hogy az Intézet a kapott konkrét megbízásokat sikerrel tudja teljesíteni. A munka megkezdésekor az Intézetnek azzal a nehézséggel kellett megküzdnie, hogy azoknak a területeknek a gyakorlati szakemberei, ahol a matematikai módszerek alkalmazására népgazdaságunknak szüksége van, többségükben maguk sem tudták felmérni, hogy hol és milyen formában van szükség a matematikusok közreműködésére. Ez érthető, hiszen az alkalmazott matematikának nálunk hagyományai alig voltak. Azonban egyre nagyobb számban akadtak olyan szakemberek, akik felismertek egyes problémákat és kezdeményezésükre üzemek és egyéb intézmények mind sűrűbben fordultak Intézetünkhöz. Az elmúlt két és fél év során közel 300 ilyen megbízást kapott Intézetünk, a legkülönbözőbb intézményektől és igyekezett a felmerült matematikai vonatkozású problémák megoldásával segítséget nyújtani népgazdaságunknak. Hangsúlyoznunk kell ezzel kapcsolatban, hogy az elért eredményekben komoly része van azoknak a gyakorlati szakembereknek, akik a gyakorlatból kiindulva a problémákat felismerték és azokra figyelmünket felhívták. Azonban éppen az a körülmény, hogy sok múltott azon, hogy mely területeken akadt ilyen szakember, bizonyos tervszerűtlenséget vitt a munkánkba. Ez munkánk fő fogyatékoságának egyik forrása, annak, hogy az Intézet kapcsolata az iparral, a népgazdaság egyéb területeivel és a rokon tudományokkal, elsősorban a fizikával nem volt elég tervszerű és rendszeres. A jövőben a munka jobb megszervezésével, az illetékes állami szervekkel, műszaki és tudományos intézményekkel való kapcsolat szorosabbá tételével igyekszünk ezen változtatni és munkánkat tervszerűbbé tenni. Arra, hogy milyen hiányok vannak még munkánkban, példa, hogy népgazdaságunk olyan döntő kérdésével kapcsolatban, mint például a bányászat, az Intézet igyekezete ellenére sem sikerült feltárni eddig azt, hogy hol van szükség az Intézet közreműködésére. Az ebben a kötetben közölt dolgozatokból is kitűnik, hogy milyen nagy mértékben támaszkodott az Intézet munkája során a szovjet eredményekre: ez a tény elért eredményeink egyik döntő forrása. Ez azonban nem minden területen történt meg egyforma mértékben és e téren is még bő lehetőség nyílik arra, hogy még többet merítve a szovjet tudomány tapasztalatainak gazdag tárházából, megjavítsuk munkánkat és emeljük annak színvonalát. Egy harmadik hiányossága munkánknak, hogy, miután egy kapott problémát az Intézet a maga részéről megoldott és a megoldást gyakorlatilag könnyen kezelhető formában (általában grafikonok, nomogrammok alakjában) a megbízó rendelkezésére bocsátotta, nem kísérte rendszeresen figyelemmel tovább az ügy sorsát, amennyiben a megbízó fél újabb kérdésekkel nem fordult az Intézethez. Ezen is változtatni fogunk a jövőben; ez munkánk megjavításának szempontjából is feltétlenül kívánatos, hiszen a gyakorlati



felhasználás tapasztalatait tovább munkánkban jól tudjuk hasznosítani. De szükséges ez azért is, hogy mi is hozzájáruljunk ahhoz, hogy az új módszerek gyakorlati felhasználása bürokratizmus vagy konzervativizmus következtében ne halasztódjék el bizonytalan időre.

Közleményeink első kötetében huszonhét dolgozatot közlünk. Ezek többsége — tizenöt dolgozat — konkrét megbízás alapján végzett munka eredménye, amely tartalmaz olyan tudományos szempontból is új eredményt, ami a közzétételt indokolttá teszi. Olyan munkák eredményeiről való beszámolót, amelyek már meglévő módszerek alkalmazására szorítkoztak, Közleményeinkben nem közlünk. Két dolgozat összefoglaló beszámolót tartalmaz egy-egy olyan fontos munkaterületről, amelyen az Intézet egy csoportja rendszeresen dolgozik: az ipari tömegtermelés minőségellenőrzésének matematikai statisztikai módszereiről és a matematikai statisztika orvosi-biológiai tudományos kísérletek kiértékelésére való alkalmazásáról. Mindkét területen a rendszeres munka kevesebb, mint egy éve folyik, és ezért egy ilyen összefoglaló beszámoló közlése látszott a legalkalmasabb formának, hogy az Intézet ezirányú tevékenységéről is képet adjunk. A többi tíz dolgozat olyan, az Intézetben elért, tudományos eredményekről számol be, amelyek szoros kapcsolatban állnak azokkal az alkalmazási területekkel, amelyeken az Intézet dolgozik.

Intézetünk Közleménysorozatát azzal a szándékkal indítottuk meg, hogy ezen keresztül munkánk eredményei szélesebb körben és alaposabban váljanak ismeretessé. Azt reméljük, hogy ez újabb lendületet fog adni a matematika és a gyakorlat kapcsolatainak kiszélesítéséhez és elmélyítéséhez és Közleményeink olvasása során még több, az iparban és a tudomány különböző ágaiban dolgozó szakember fogja felismerni saját munkaterületén azokat a problémákat, amelyek megoldását az Intézetünkkel való együttműködés elősegítheti. Erre a reményre az jogosít fel, hogy a matematikai módszerek természetéből következik, hogy sok eredmény, amely egy bizonyos iparág vagy tudományág egy konkrét problémájával kapcsolatban merült fel, más, látszólag teljesen távoleső területeken — mutatis mutandis — szintén alkalmazásra kerülhet, vagy legalábbis megmutatja matematikai módszerek alkalmazásának lehetőségét. Gondolok például Közleményeinkben közölt két dolgozatra, amelyek közül az egyik az elektromos áramfogyasztás ingadozásaival foglalkozik, a másik sűrített levegővel dolgozó gépek összefogyasztásának ingadozásaival: a két probléma tárgyalásánál alkalmazott matematikai módszer közös, bár a második problémánál speciális mozzanatok játszanak szerepet; ugyanez a matematikai tárgyalásmód alkalmazható továbbá megfelelő módosításokkal a gáz- és vízfogyasztás ingadozásainak vizsgálatánál, telefonhálózatok terhelésének kérdésével kapcsolatban és még sok más területen is.

Azt kérjük tehát Közleményeink olvasóitól, hogy amennyiben Közleményeink olvasása során, vagy ettől függetlenül saját munkaterületükön matematikai vonatkozású problémákat ismernek fel, forduljanak Intézetünkhöz, hogy közös erővel igyekezzünk a felmerült kérdések megoldására. Ezzel Intézetünknek is segítséget nyújtanak, hogy feladatát a jövőben szélesebb körben és eredményesebben tudja teljesíteni.

Közleményeink első kötete, úgy hisszük, már első átlapozásra is ad bizonyos képet arról, hogy milyen széleskörű lehetőségei vannak a matematika alkalmazásainak és ezek milyen szorosan kapcsolódnak a termelés soron-

lévő problémáihoz. Gépek tervezése, az energiagazdálkodás problémái, a selejt elleni harc, a fizika, geodézia és más természettudományok számos kérdése, orvosi, biológiai és egyéb tudományos kísérletek kiértékelése — csak kiragadott példák azok közül a problémakörök közül, melyekkel kapcsolatban rendszeresen merül fel matematikai módszerek alkalmazásának szükségessége. Hangsúlyoznunk kell azonban, hogy Közleményeink első kötete távolról sem ad teljes képet a matematika alkalmazásainak széles skálájáról, de még az Intézet eddig végzett munkájáról sem. Ennek oka egyrészt az, hogy mint már utaltunk rá, számos fontos területre Intézetünknek eddig nem sikerült kiterjesztenie tevékenységét, más területeken pedig még csak a munka kezdetén tart. Ehhez járul, hogy az Intézet munkájának számos eredményét már másutt közöltük: az inkább elméleti jellegű eredmények az *Acta Mathematica*-ban, az *Osztályközleményekben* és más folyóiratokban, több gyakorlatilag felhasznált eredményről szóló beszámoló pedig műszaki és más szaklapokban jelent meg. Abból a célból, hogy az itt közölt dolgozatokon túlmenőleg támpontot nyujtsunk ahhoz, hogy az Intézetünk eddigi munkájáról teljes kép alakulhasson ki, az Intézet munkatársainak az Intézet munkájának eredményeit tartalmazó másutt megjelent dolgozatainak jegyzékét Közleményeinkben közöltük. Ilyen módon teljes képet Intézetünk eddig végzett munkájáról jelen kötet csak az Intézet munkatársainak másutt megjelent munkáival együtt nyújt. Egyes területeken az Intézet által elért eredmények kidolgozása és sajtó alá rendezése még folyamatban van, ezért ezek jelen kötetbe már nem kerülhettek bele. Ezeket Közleményeink még erre az évre tervezett második kötetében kívánjuk közzétenni.

Közleményeink megjelenése lehetőséget nyújt arra, hogy Intézetünk munkája behatóbb megvitatás tárgyát képezhesse. Várjuk, sőt, kérjük is az építő bírálatot, mind a matematikusok és a műszaki és természettudományok képviselői, mind pedig a gyakorlati szakemberek részéről, mert tudatában vagyunk annak, hogy munkánk sok szempontból még távolról sem kielégítő, és munkánk hiányosságainak feltárása és megbírálása segítséget fog nyújtani nekünk munkánk megjavításához.

Az Intézet jelenleg öt osztályra tagozódik és a Közleményeinkben közölt dolgozatokat ennek megfelelően osztályok szerint csoportosítottuk. Az Intézet jelenleg fejlődőben van és sok fontos alkalmazási terület ma még külön osztállyal nincs reprezentálva. Ennek következtében több dolgozat nem tartozik egyik osztály fő munkaterületéhez sem, ezeket a dolgozatokat »Egyéb dolgozatok« gyűjtőnév alatt közöljük. Az osztályok elnevezésével kapcsolatban meg kell jegyezmem, hogy azok nem fedik tökéletesen munkaterületüket, illetve kutatási irányukat. Így például a mechanikai és szilárd-ságtani osztály (vezetője Egerváry Jenő akadémikus), amely az Intézet legrégibb osztálya, mert már jóval az Intézet akadémiai intézetté alakulása előtt elsőnek kezdte meg a munkát, szélesebb területen működik, mint amit elnevezése fed. Így például hővezetési kérdésekkel is foglalkozik és a matematikai fizika más fejezeteinek differenciálegyenleteivel is. A valószínűség-számítási osztály (vezetője Rényi Alfréd lev. tag) elnevezése a legutóbbi időkig valószínűség-számítási és matematikai statisztikai osztály volt, a matematikai statisztikai osztály (vezetője Vincze István) elnevezése pedig biztosítási és gazdasági matematikai osztály. A valószínűség-számítás gyakorlati alkalmazásai terén végzett munka kiszélesedése, valamint a biztosítási és gazdasági matematikai osztály munkája súlypontjának a matematikai statisztikai



módszerek alkalmazása irányába való eltolódása szükségessé tette ezen osztályok munkaterületének új felosztását és az osztályok elnevezésének ennek megfelelő megváltoztatását. A két osztály munkaterülete szorosan kapcsolódik egymáshoz és ennek megfelelően a két osztály között az együttműködés igen szoros. Hasonlóképpen szoros együttműködés van a numerikus és grafikus módszerek osztálya (vezetője Hajós György lev. tag) és a többi osztály között is: ez az osztály résztvevett a numerikus számítások és a grafikonok, nomogramok elkészítésén keresztül számos más dolgot elkészítésében is, az osztály neve alatt szereplő dolgozatokon túlmenőleg. Az osztály elmúlt évben Miskolcon alakult csoportja is már több dolgozattal képviselve van Közleményeink első kötetében. Meg kell itt jegyezni, hogy az Intézet kialakult munkamódszere, hogy a végzett számítások eredményeit könnyen áttekinthető és használható alakban, nomogramok formájában bocsátja az üzemek rendelkezésére. Az a tapasztalatunk ugyanis, hogy ez az eredmények felhasználását messzemenően megkönnyíti. Ezen munka során több újítás jött létre és új módszer került kidolgozásra. Az ezekre vonatkozó beszámolók technikai okokból azonban csak Közleményeink következő számában kerülnek közlésre. Ami a vegyipari osztály munkáját illeti, (vezetője Fenyő István) az több vegyipari problémát oldott meg, ezek egy része már másutt közölve lett, más részének sajtó alá rendezése még nem fejeződött be. Ugyanakkor ennek az osztálynak a munkaköre az elmúlt év során elméleti irányban is kibővült, különösen az alkalmazások szempontjából fontos integrálegyenletekre vonatkozó kutatásokkal. Közleményeinkben ezen osztály neve alatt szereplő két dolgozatban már ez a tény tükröződik. Az Intézet tavaly alakult elektrotechnikai csoportja Közleményeinkben csak egy dolgozattal szerepel. A csoport vezetőjének (Pál Sándornak) mechanikai tárgyú dolgozatát közli Közleményünk. E csoport eddigi eredményeit tartalmazó dolgozatok szintén még kidolgozás alatt állanak: ezek közül az egyik igen fontos problémakörre, az automatizálásra vonatkozik.

Mint már említettük, rendkívül értékes segítséget nyújtottak munkánkhoz a hazánkban járt szovjet matematikusok, értékes tanácsaikkal. Hasonlóképpen jelentős segítséget kaptunk a baráti népi demokráciák ittjárt matematikusaitól is. A baráti országok matematikusaival folytatott megbeszélések, a tapasztalatok kicserélése során ugyanakkor meggyőződhattunk arról, hogy ezeknek az országoknak a matematikusai, akik hasonló célkitűzéseket követnek, mint mi, érdeklődéssel kísérik figyelemmel munkánkat és kéri, hogy arról rendszeresen tájékoztassuk őket. Ezért tartottuk szükségesnek, hogy Közleményeink dolgozatait rövid orosz- és francianyelvű összefoglalásokkal lássuk el. Ezeket az összefoglalásokat magyar nyelven is közöltük a dolgozatok elején, hogy ezzel is megkönnyítsük az áttekintést. Különösen azért tartottuk ezt szükségesnek, mert, bár a dolgozatok megfogalmazásánál törekedtünk arra, hogy azok a szakemberek minél szélesebb köre számára érthetők legyenek, azonban a dolog természeténél fogva sok dolgot teljes megértéséhez speciális matematikai és az illető alkalmazási területre vonatkozó műszaki előismeretek szükségesek és úgy hisszük, hogy ezek az összefoglalások a tájékozódást és megértést elő fogják segíteni.

Közleményeink tartalmazzák az Intézet egyes osztályai által rendezett szemináriumokon elhangzott előadások rövid kivonatait is, amennyiben ezek az előadások dolgozat formájában nem szerepelnek Közleményeinkben.

Ezek a kivonatok szintén azt a célt szolgálják, hogy az Intézet munkájáról a kötet által nyújtott képet teljesebbé tegyék. Ezek a szemináriumi előadások és az azokhoz kapcsolódó viták ebben az évben az Intézet összes osztályain megindulnak és az intézeti kollektív munka fontos formáját alkotják. Ezzel kapcsolatban meg kell jegyezni, hogy a Közleményeinkben közölt dolgozatok túlnyomó része többé-kevésbbé kollektív munka eredménye. Az Intézet egy-egy dolgozója neve alatt megjelenő dolgozat legtöbbször az illető osztály több munkatársának közreműködésével és az osztály vezetőjének irányítása mellett készült. Ahol ez a közreműködés nagyobb mértékű volt, ez a dolgozatokban külön meg van említve, de a kollektív munkának ott is volt szerepe, ahol ez külön említve nincsen (ha másban nem, úgy kritika, tanács formájában és a numerikus számítások elvégzése, illetve az ábrák elkészítése tekintetében).

Úgy hisszük, hogy Közleményeink első kötetének megjelenése fontos állomása annak a fejlődésnek, amely a tudomány és gyakorlat egységének megvalósítása irányában hazánkban az elmúlt években a matematika terén megindult. Egy-egy dolgozat az alkalmazott matematika különböző fejezeteiből más folyóiratokban eddig is megjelent, azonban ez az első alkalom, hogy egy teljes kötetet kitevő alkalmazott matematikai munka került kiadásra magyar nyelven. Abból, hogy ez az első ilyen kötet, következik, hogy szükségképpen eredményeink mellett tükrözi munkánk hiányosságait is. Reméljük azonban, hogy a kiadvány megjelenése alkalmat fog nyújtani munkánk megvitatásához és ez a hibák kiküszöbölését és a további fejlődést fogja elősegíteni.

Befejezésül köszönetet mondok a Magyar Tudományos Akadémia Elnökségének, hogy lehetőséget nyújtott Közleményeink megindításához, továbbá mindazoknak a munkatársaimnak, akiknek lelkes munkája következtében Közleményeink első kötete megjelenhetett, végül pedig az Akadémiai Kiadó és az Akadémiai nyomda dolgozóinak, Közleményeink gyors és gondos kinyomása érdekében végzett munkájukért.

*Rényi Alfréd*

a Magyar Tudományos Akadémia

Alkalmazott Matematikai Intézetének igazgatója



## MECHANIKAI ÉS SZILÁRDSÁGTANI OSZTÁLY





# A HŐVEZETÉSI DIFFERENCIÁL-EGYENLET MEGOLDÁSA AZ IDŐTŐL LINEÁRISAN FÜGGŐ KERÜLETI FELTÉTEL MELLETT (EGYENLETESEN VÁLTOZÓ HŐMÉRSÉKLETŰ KÖZEGBE HELYEZETT TEST HŰLÉSI, ILL. MELEGEDÉSI FOLYAMATÁNAK VIZSGÁLATA)

EGERVÁRY JENŐ és LOVASS-NAGY VIKTOR

## ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen dolgozat tárgyát egyenletesen változó hőmérsékletű közegbe helyezett testek hőmérséklet-eloszlását leíró függvények meghatározása képezi. A  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$  homogén differenciálegyenletet  $b \frac{\partial u}{\partial n} + u = v \cdot t$  inhomogén kerületi feltétel és  $u(x, y, z, 0) = 0$  kezdeti feltétel esetén kielégítő függvény mint a homogén differenciál-egyenletet és az inhomogén kerületi feltételt kielégítő  $u_1 = v \cdot t + U(x, y, z)$  partikuláris megoldás, és a homogén differenciálegyenletet homogén kerületi feltétellel és  $u_2(x, y, z, 0) = U(x, y, z)$  kezdeti feltétellel kielégítő  $u$  általános megoldás  $u = u_1 + u_2$  összege határozható meg. E tárgyalási mód lehetővé teszi a hűlési, ill. melegedési folyamat és a matematikai fizika egyéb problémái között (membránrezgés, torzió, stb.) mutatkozó formális analógiák kihasználását.

Egy technológiai művelet során (a Vasipari Kutatóintézet által végzett mélyhűtési kísérletekkel kapcsolatosan) szükségessé vált a következő konkrét hőkezelési folyamatnak matematikai tárgyalása: Adott kezdeti hőmérséklet-eloszlású derékszögű hasábalakú test egyenletesen csökkenő hőmérsékletű közegbe van helyezve; kerestetik a testnek a hűlés folyamán mutatkozó hőmérsékleteloszlása, mint a helynek és az időnek függvénye. A feladat matematikai tárgyalása annyiban tér el a szabványos hővezetési problémáktól, hogy jelen esetben a hővezetési folyamatot leíró *homogén* differenciálegyenletet — a hűtőközeg hőmérsékletének az időtől való lineáris függése következtében — *inhomogén* kerületi feltétel mellett kell megoldani.

Tudvalevőleg egy lineáris, inhomogén probléma (egyenlet-rendszer, differenciálegyenlet) általános megoldása additív módon összerakható az inhomogén probléma egy partikuláris megoldásából és a megfelelő homogén probléma általános megoldásából. Ennek az általános elvnek az alkalmazása a jelen hővezetési feladatnál különösen célszerűnek fog mutatkozni, amennyiben az inhomogén feladatnak mindig van egy kitéüntetett partikuláris megoldása, az ú. n. »relatív stacionárius« megoldás. Az időtől lineárisan függő hőmérsékletű hűtőközeg esetén u. i. mindig létezik *egy és csak egy* olyan kezdeti

hőmérsékleteloszlás\* (a hűtendő testben), melyből kiindulva a test minden pontjának hőmérséklete ugyanazzal az egyenletes sebességgel változik, mint a környező közeg hőmérséklete. Miután ez esetben tehát az egész folyamat alatt a hűtött test bármely pontjának a hűtőközeghez viszonyított hőmérsékletkülönbsége állandó, indokolt ezt a hőmérsékleteloszlást »relatív stacionárius«-nak nevezni. Ha az inhomogén kerületi feltételnek megfelelő »relatív stacionárius« partikuláris megoldást meghatároztuk, akkor ezáltal a probléma megoldása tetszésszerű kezdeti hőmérsékleteloszlás esetében visszavezethető egy szabványos, *homogén* kerületi feltételt tartalmazó hővezetési feladatra.

Jelen dolgozat első részében a fentebb vázolt elv alapján való megoldást mutatjuk be tetszésszerű alakú hűtött test esetére. Utalunk továbbá azokra az analógiákra, amelyek két dimenziós folyamat esetén egyrészt a hővezetési feladat, másrészt a membrán-kihajlás, ill. a prizmatikus rudak torziója között mutatkoznak.

A módszer illusztrálása céljából a dolgozat második részében ismertetjük a derékszögű hasáb esetére vonatkozó konkrét számításokat, valamint a hőmérsékleteloszlást szemléltető diagrammokat.

## I.

Egy véges mértékkel bíró, egyszerű zárt felülettel határolt, homogén, izotrop test, valamint az azt környező közeg  $t = 0$  pillanatban minden pontban nulla hőmérséklettel bír. A környező közeg hőmérséklete az idő folyamán egyenletesen változik, vagyis annak hőmérséklete minden pontban:  $u = v \cdot t$  ( $t = \text{idő}$ ,  $v$  állandó). A test belső hővezetési állandója:  $a^2$ , a felületi hőátadási tényező:  $b$ . Meghatározandó a testben végbemenő hővezetési (hűlési vagy melegedési) folyamat.

Matematikai megfogalmazásban: Kerestetik az  $u(x, y, z, t)$  hőmérsékleteloszlás, mely kielégíti a következő feltételeket:

I. A test által elfoglalt, *egyszeresen* összefüggő, korlátos  $V$  tartományban  $u$  kielégíti a

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

hővezetési differenciál-egyenletet.

II. A  $t = 0$  kezdőpillanatban a hőmérséklet a test minden pontjában nullával egyenlő:

$$(2) \quad u(x, y, z, 0) = 0.$$

III. A test felületének minden pontjában az  $u$  hőmérséklet és ennek  $\frac{\partial u}{\partial n}$

\* Általában szokásos üzemi viszonyok között ez a hőmérsékleteloszlás kezdetben még megközelítőleg sincs realizálva, azonban a hűtött test hőmérsékleteloszlása a hűtési folyamat alatt annál jobban közeledik a »relatív-stacionárius« hőmérséklet eloszláshoz, minél tovább tart a hűtés, miként ez a (9) sz. megoldási formulából közvetlenül kiolvasható.

normális deriváltja, valamint a környező közeg  $u = v \cdot t$  hőmérséklete közt fennáll a Newton-féle hőátadási törvény:

$$(3) \quad b \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} + \tilde{u} = v \cdot t$$

(Itt és a következőkben  $\tilde{u}$  jelenti az  $u$  függvénynek,  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}$  pedig a  $\frac{\partial u}{\partial n}$  normális deriváltnak a felületen felvett értékeit.)

A bevezetésben kifejtett elvnek megfelelően a megoldást két tag összegeként fogjuk előállítani:  $u = u_1 + u_2$  alakban:

Az  $u_1(x, y, z, t) = v \cdot t + U(x, y, z)$  alakú és a  $b \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} + \tilde{U} = 0$  kerületi feltételt kielégítő függvény az egyetlen »relatív-stacionárius« megoldás.

Az  $u_2(x, y, z, t)$  függvény, mely kielégíti az  $u_2(x, y, z, 0) = -U(x, y, z)$  kezdeti feltételt és a  $b \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial n} + \tilde{u}_2 = 0$  kerületi feltételt, egy szabványos hővezetési feladat [1] megoldása, melynek  $u_1$ -gyel való szuperpozíciója a II. (kezdeti) feltétel kielégülését biztosítja.

Mint az alábbiakból ki fog tűnni, mindkét részlet-feladat visszavezethető a  $\Delta U + \lambda U = 0$  homogén differenciálegyenletnek, az ú. n. »hullámegyenlet«

nek a  $b \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} + \tilde{U} = 0$  homogén kerületi feltétel melletti megoldására.

Ez utóbbi problémát illetőleg ismeretes, hogy általában *tetszőleges*  $\lambda$  érték mellett nincs más megoldás, mint a triviális, azonosan eltűnő  $U \equiv 0$  megoldás, azonban létezik a pozitív számoknak (sajátértékeknek) olyan

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

végtelen sorozata, mely mellett a  $\Delta U + \lambda U = 0$  »hullámegyenlet«-nek vannak nem identikusan eltűnő (és a kerületi feltételt kielégítő) megoldásai (sajátfüggvények):

$$U_1(x, y, z); U_2(x, y, z); U_3(x, y, z); \dots$$

Ezek tehát kielégítik a  $\Delta U_i + \lambda_i U_i = 0$  és a  $b \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial n} + \tilde{U}_i = 0$  egyenleteket. Az  $U_i$  sajátfüggvények ortogonálisak és normálhatók úgy, hogy:

$$\int_{(V)} U_i U_j dV = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

Bármely  $\varphi(x, y, z)$  függvény, mely kétszer folytonosan differenciálható és a kerületi feltételt kielégíti, az  $U_i$  sajátfüggvények szerint haladó, egyenletesen konvergens sorba fejthető [2]:

$$\varphi(x, y, z) = \sum \gamma_i U_i(x, y, z),$$

ahol

$$\gamma_i = \int_{(V)} \varphi(\xi, \eta, \zeta) U_i(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta.$$

Az  $u_1(x, y, z, t)$  függvény meghatározása. Az  $u_1$ -nek fentebb megadott ( $u_1 = v \cdot t + U(x, y, z)$ ) alakját az (1) sz. hővezetési differenciálegyenletbe helyettesítve,  $v = a^2 \cdot \Delta U$  adódik.  $U(x, y, z)$  tehát kielégíteni tartozik a

$$(4) \quad \Delta U = \frac{v}{a^2}$$

inhomogén differenciálegyenletet, illetőleg a

$$(5) \quad b \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} + \tilde{U} = 0$$

homogén kerületi feltételt:

A megoldás megszerkesztése céljából fejtsük ki a  $V$  belsejében azonosan eggyel egyenlő  $\varphi$  függvényt az  $U_i$  sajátfüggvények szerint haladó sorba:

$$\sum \gamma_i U_i(x, y, z) \equiv 1$$

akkor:

$$\gamma_i = \iiint_{(V)} U_i(\xi, \eta, \xi) d\xi, d\eta, d\xi$$

és a (4), (5) feladat megoldása:

$$(6) \quad U(x, y, z) = -\frac{v}{a^2} \sum \frac{\gamma_i}{\lambda_i} U_i(x, y, z).$$

Ennek felhasználásával:

$$(7) \quad u_1(x, y, z, t) = v \cdot t - \frac{v}{a^2} \sum \frac{\gamma_i}{\lambda_i} U_i(x, y, z).$$

Az  $u_2(x, y, z, t)$  függvény meghatározása. Az (1) hővezetési egyenletnek a  $b \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} + \tilde{u} = 0$  kerületi feltételt kielégítő, »állóhullám«-alakú megoldásai [3]:

$$e^{-a^2 \lambda_i t} U_i(x, y, z).$$

Az ezekből szuperponálással nyerhető

$$u_2(x, y, z; t) = \sum \beta_i e^{-a^2 \lambda_i t} U_i(x, y, z)$$

általános megoldás nyilván akkor elégti ki az  $u_2(x, y, z, 0) = U(x, y, z)$  kezdeti feltételt, ha

$$\beta_i = \frac{v}{a^2} \frac{\gamma_i}{\lambda_i}.$$

Eszerint:

$$(8) \quad u_2(x, y, z; t) = \frac{v}{a^2} \sum \frac{\gamma_i}{\lambda_i} e^{-a^2 \lambda_i t} U_i(x, y, z).$$

Az egyenletesen változó hőmérsékletű közegben végbemenő hűlési folyamatot leíró függvény tehát:

$$u(x, y, z, t) = u_1(x, y, z, t) + u_2(x, y, z, t) =$$



$$9) \quad = vt - \frac{v}{a^2} \sum \frac{\gamma_i}{\lambda_i} (1 - e^{-a^2 \lambda_i t}) U_i(x, y, z)$$

$$\gamma_i = \iiint_{(V)} U_i(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta.$$

A megoldásnak ebből az alakjából nyilvánvaló, hogy  $t \rightarrow \infty$  esetén  $u_2 \rightarrow 0$ , tehát a test hőmérsékleteloszlása minden határon túl növekvő  $t$  esetén a relativ stacionárius hőmérsékleteloszláshoz aszimptotikusan közeledik.

Pl. a  $-\frac{h}{2} < x < \frac{h}{2}$ ;  $-\frac{k}{2} < y < \frac{k}{2}$ ;  $-\frac{l}{2} < z < \frac{l}{2}$  parallelepipedonese-

ben a  $\Delta U + \lambda U = 0$ ,  $b \frac{\partial U}{\partial n} + \tilde{U} = 0$  kerületi feladat sajátértékei és saját-függvényei a következők [4]:

$$\lambda_{pqr} = \lambda_{hp}^2 + \lambda_{kq}^2 + \lambda_{lr}^2 \quad (p, q, r = 1, 2, \dots)$$

$$U_{pqr} = \text{const.} \cos \lambda_{hp} x \cdot \cos \lambda_{kq} y \cdot \cos \lambda_{lr} z.$$

Ezek felhasználásával a (9) sort megalkotva, az eredetileg felvetett feladat explicit megoldását nyerjük, mellyel részleteiben a dolgozat II. részében foglalkozunk.

Különös figyelmet érdemel — a matematikai fizika egyéb problémáival mutatkozó formális analógia következtében — a fenti hűlési folyamat két-dimenziós esete, ha még a  $b = 0$  feltevést is bevezetjük, azaz a test felületi hőmérséklete egyenlő a hűtő közegével.

Ekkor ugyanis az  $u_1(x, y, t) = v \cdot t + U(x, y)$  relativ stacionárius megoldásban szereplő  $U(x, y)$  függvény a

$$\Delta U = \frac{v}{a^2}$$

inhomogén differenciálegyenletet elégíti ki az  $U = 0$  homogén kerületi feltéte mellett.

Ugyanez a differenciálegyenlet és kerületi feltétel határozza meg az egyenletesen terhelt membránnak, valamint egy csavarással igénybevett prizma keresztmetszetének a deformációját. A három probléma »izomorfizmus« alapján bármelyik probléma ismert partikuláris megoldását közvetlenül lehet alkalmazni a másik kettőre.

Így pl. az egyenletesen terhelt membrán »izohipszái« (rétegvonalai) egybeesnek a relativ-stacionárius hűlési állapotban levő test izotermáival.

Továbbá — köztudomásúlag — a torzió-probléma számos prizmakereszt-metszet esetében explicite meg van oldva. Ezek a megoldások, a fentiek szerint, közvetlenül alkalmazhatók a vizsgált hűlési folyamat megfelelő két-dimenziós eseteire.

## II.

Adott  $h, k, l$  élhosszal bíró, homogén és izotróp anyagból készült, ismert belső hővezetési állandójú derékszögű hasábot állandó  $v$  sebességgel növekvő hőmérsékletű közegbe helyezve, keresni fogjuk a hasáb melegeződését leíró  $u(x, y, z, t)$  függvényt azon esetben, midőn a  $t = 0$  pillanatban a hasáb hőmér-

séklete is, a környezet hőmérséklete is mindenütt nullával egyenlő. Ez esetben a feladat matematikai megfogalmazását az (1), (2) és (3) egyenletekből nyert alábbi összefüggések szolgáltatják :

I. A keresett függvény a paralelepipedon által elfoglalt

$$-\frac{h}{2} < x < \frac{h}{2}; -\frac{k}{2} < y < \frac{k}{2}; -\frac{l}{2} < z < \frac{l}{2}$$

tartományban kielégíti az (1) hővezetési differenciálegyenletet :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

II. A  $t = 0$  pillanatban a test minden pontjában :

$$u(x, y, z, 0) = 0.$$

III. A keresett  $u(x, y, z, t)$  függvénynek ki kell elégítenie a (3) sz. egyenletben foglalt kerületi feltételt, tehát :

$$\left. \begin{aligned} b \frac{\partial u\left(\pm \frac{h}{2}, y, z, t\right)}{\partial x} + u\left(\pm \frac{h}{2}, y, z, t\right) &\equiv v \cdot t \\ b \frac{\partial u\left(x, \pm \frac{k}{2}, z, t\right)}{\partial y} + u\left(x, \pm \frac{k}{2}, z, t\right) &\equiv v \cdot t \\ b \frac{\partial u\left(x, y, \pm \frac{l}{2}, t\right)}{\partial z} + u\left(x, y, \pm \frac{l}{2}, t\right) &\equiv v \cdot t \end{aligned} \right\}$$

Az  $u(x, y, z, t) = u_1(x, y, z, t) + u_2(x, y, z, t)$  alakban keresett általános megoldás meghatározásának előkészítésképpen — a dolgozat első részében ismertetett elvnek megfelelően — meghatározzuk a

$$(10) \quad \Delta U + \lambda U = 0$$

homogén differenciálegyenletet és a

$$(11) \quad \left. \begin{aligned} b \frac{\partial U\left(\pm \frac{h}{2}, y, z\right)}{\partial x} + U\left(\pm \frac{h}{2}, y, z\right) &\equiv 0 \\ b \frac{\partial U\left(x, \pm \frac{k}{2}, z\right)}{\partial y} + U\left(x, \pm \frac{k}{2}, z\right) &\equiv 0 \\ b \frac{\partial U\left(x, y, \pm \frac{l}{2}\right)}{\partial z} + U\left(x, y, \pm \frac{l}{2}\right) &\equiv 0 \end{aligned} \right\}$$

homogén kerületi feltételt kielégítő  $U_{pqr}$  sajátfüggvényeket. E sajátfüggvényeket célszerű

$$U_{pqr} = \frac{1}{\lambda_{pqr}} \cos \lambda_{hp} x \cdot \cos \lambda_{kq} y \cdot \cos \lambda_{lr} z$$

alakban keresni, ahol :

$$\lambda_{pqr}^2 = \lambda_{hp}^2 + \lambda_{kq}^2 + \lambda_{lr}^2$$

ugyanis — amint erről behelyettesítéssel meggyőződhetünk — a (10) sz. egyenlet ily módon automatikusan ki van elégítve, s a továbbiakban már csak a  $\lambda_{hp}$ ,  $\lambda_{kq}$ ,  $\lambda_{lr}$  sajátértékeket kell meghatározni. A (11) sz. egyenletek alapján :

$$\left. \begin{aligned} -b\lambda_{hp} \sin\left(\pm \frac{h}{2} \lambda_{hp}\right) + \cos\left(\pm \frac{h}{2} \lambda_{hp}\right) &= 0 \\ -b\lambda_{kq} \sin\left(\pm \frac{k}{2} \lambda_{kq}\right) + \cos\left(\pm \frac{k}{2} \lambda_{kq}\right) &= 0 \\ -b\lambda_{lr} \sin\left(\pm \frac{l}{2} \lambda_{lr}\right) + \cos\left(\pm \frac{l}{2} \lambda_{lr}\right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

azaz :

$$b\lambda_{hp} = \operatorname{ctg}\left(\pm \frac{h}{2} \lambda_{hp}\right)$$

$$b\lambda_{kq} = \operatorname{ctg}\left(\pm \frac{k}{2} \lambda_{kq}\right)$$

$$b\lambda_{lr} = \operatorname{ctg}\left(\pm \frac{l}{2} \lambda_{lr}\right)$$

tehát a  $\lambda_{hp}$ ,  $\lambda_{kq}$ ,  $\lambda_{lr}$  sajátértékek közelítő pontosságú meghatározása a  $b \cdot \lambda_{hp}$  (illetőleg  $b \cdot \lambda_{kq}$  vagy  $b \cdot \lambda_{lr}$ ) egyenes és a megfelelő cotangens-görbe metszéspontjainak meghatározásával történhet.

Az  $U_{pqr}$  sajátfüggvények ismeretében a dolgozat első részében foglaltak alapján a keresett  $u_1$  és  $u_2$  függvények felírhatók, és a (9) egyenlet alapján a probléma általános megoldása :

$$u(x, y, z, t) = v \cdot t -$$

$$- \frac{v}{a^2} \sum_p \sum_q \sum_r \frac{\gamma_{pqr}}{\lambda_{hp}^2 + \lambda_{kq}^2 + \lambda_{lr}^2} [1 - e^{-a^2(\lambda_{hp}^2 + \lambda_{kq}^2 + \lambda_{lr}^2)t}] U_{pqr}(x, y, z,)$$

ahol :

$$\gamma_{pqr} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} U_{pqr}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta.$$

Abban az esetben, ha  $b = 0$ , azaz : a test felszíne azonnal felveszi a környezet hőmérsékletét, a sajátértékek nyilván :

$$\lambda_{hp} = \pm (2p + 1) \frac{\pi}{h}$$

$$\lambda_{kq} = \pm (2q + 1) \frac{\pi}{k}$$

$$\lambda_{lr} = \pm (2r + 1) \frac{\pi}{l}$$

Ebben az esetben ( $b = 0$ ) tehát a (10) homogén differenciálegyenletet és a (11) homogén kerületi feltételt kielégítő  $U_{pqr}$  partikuláris megoldások bármelyikét az

$$U_{pqr} = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2p+1}{h}\right)^2 + \left(\frac{2q+1}{k}\right)^2 + \left(\frac{2r+1}{l}\right)^2} \cos \frac{(2p+1)\pi}{h} x \cdot \\ \cdot \cos \frac{(2q+1)\pi}{k} y \cdot \cos \frac{(2r+1)\pi}{l} z$$

képlet szolgáltatja. Ezen partikuláris megoldások szuperpozíciójával a  $\Delta U = \frac{v}{a^2}$  egyenletet kielégítő  $U(x, y, z)$  függvény előállítható

$$U = \sum_p \sum_q \sum_r \frac{1}{\pi^4} \frac{C_p \cdot C_q \cdot C_r}{\left[\left(\frac{2p+1}{h}\right)^2 + \left(\frac{2q+1}{k}\right)^2 + \left(\frac{2r+1}{l}\right)^2\right]^2} \cos \frac{(2p+1)\pi}{h} x \cdot \\ \cdot \cos \frac{(2q+1)\pi}{k} y \cos \frac{(2r+1)\pi}{l} z$$

alakban ; a  $C_p, C_q, C_r$ , együtthatók (a  $\Delta U = \frac{v}{a^2}$  egyenletbe való helyettesítés alapján) oly módon választandók, hogy (tekintettel a  $\Delta U = -\lambda U$  össze függésre), a

$$-\sum_p \sum_q \sum_r C_p C_q C_r \lambda_{pqr} U_{pqr} = \frac{v}{a^2}$$

egyenlőség azonosan fennálljon, azaz — részletesen kiírva —

$$\sum_p \sum_q \sum_r C_p C_q C_r \cos \left[ (2p+1) \pi \frac{x}{h} \right] \cos \left[ (2q+1) \pi \frac{y}{k} \right] \cos \left[ (2r+1) \pi \frac{z}{l} \right] = -\frac{v}{a^2}$$

legyen. Minthogy

$$\frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{1}{2\nu+1} \cos [(2\nu+1) \xi] = \begin{cases} 1, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{ha } \xi = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

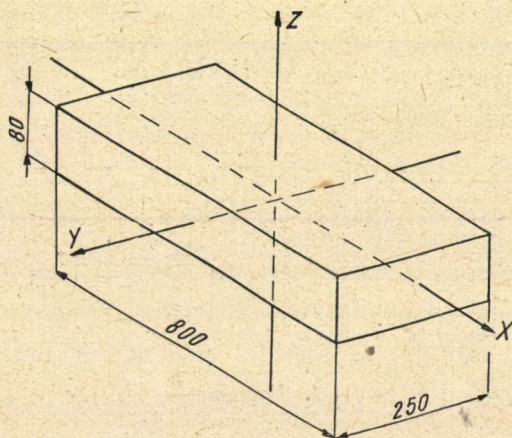
$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= \left\{ \frac{4}{\pi} \sum_p \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos \left[ (2p+1) \pi \frac{x}{h} \right] \right. \\
 &\quad \left. \left\{ \frac{4}{\pi} \sum_q \frac{(-1)^q}{2q+1} \cos \left[ (2q+1) \pi \frac{y}{k} \right] \right\} \right. \\
 &\quad \left. \left\{ \frac{4}{\pi} \sum_r \frac{(-1)^r}{2r+1} \cos \left[ (2r+1) \pi \frac{z}{l} \right] \right\} \right\} = \\
 &\equiv \left( \frac{4}{\pi} \right)^3 \sum_p \sum_q \sum_r \frac{(-1)^{p+q+r}}{(2p+1)(2q+1)(2r+1)} \cos \left[ (2p+1) \pi \frac{x}{h} \right] \cos \left[ (2q+1) \pi \frac{y}{k} \right] \cos \left[ (2r+1) \pi \frac{z}{l} \right]
 \end{aligned}$$

végtelen sor minden  $x$ -re konvergens, összege a hasáb minden belső pontjában 1-gyel és bármely felületi pontjában nullával egyenlő; tehát e végtelen sor  $-\frac{v}{a^2}$ -szereése éppen a keresett  $U(x, y, z)$  függvény. Ilymódon a hővezetés differenciálegyenletét, valamint az adott kezdeti és kerületi feltételt kielégítő függvény a (9) egyenlet alapján:

$$u(x, y, z, t) = vt -$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{v}{a^2} \left( \frac{4}{\pi} \right)^3 \sum_p \sum_q \sum_r \frac{(-1)^{p+q+r} \left\{ 1 - e^{-[(2p+1)^2 \frac{\pi^2}{h^2} + (2q+1)^2 \frac{\pi^2}{k^2} + (2r+1)^2 \frac{\pi^2}{l^2}] t} \right\}}{(2p+1)(2q+1)(2r+1) \pi^2 \left[ \left( \frac{2p+1}{h} \right)^2 + \left( \frac{2q+1}{k} \right)^2 + \left( \frac{2r+1}{l} \right)^2 \right]} \cdot \\
 \cdot \cos \left[ (2p+1) \pi \frac{x}{h} \right] \cdot \cos \left[ (2q+1) \pi \frac{y}{k} \right] \cdot \cos \left[ (2r+1) \pi \frac{z}{l} \right]
 \end{aligned}$$

Az alábbiakban közöljük a  $U(x, y, z)$  függvénynek »relatív stacionárius hőmérsékleteloszlás« a paralelepipedon három szimmetriatengelyével egybeeső  $x, y, z$  koordinátatengelyek mentén felvett értékeit (lásd az 1. ábrát)

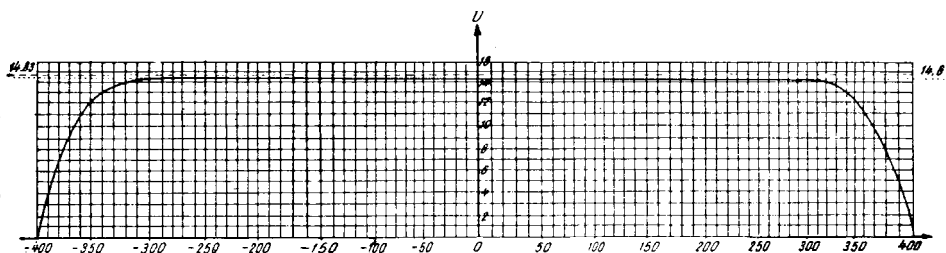


1. ábra.

magábanfoglaló táblázatot.\* Összehasonlításul közöljük továbbá azon  $U^*(z)$  függvénynek a  $z$  koordinátatengely mentén felvett értékét, amely a 80 mm vastagságú planparallel lemezben azonos kezdeti és kerületi feltétel esetén létrejövő »relatív stacionárius hőmérsékleteloszlás«-t írja le. (A környezet hűtési sebessége :  $v = 10\text{ C}^\circ$  (óra).

$x\text{mm}$	$U(x,0,0)^{\text{C}^\circ}$	$y\text{mm}$	$U(0,y,0)^{\text{C}^\circ}$	$z\text{mm}$	$U(0,0,z)^{\text{C}^\circ}$	$U^*(z)^{\text{C}^\circ}$
0	0,146	0	0,146	0	0,146	0,148
51	0,146	16	0,146	5,1	0,144	0,146
102	0,146	32	0,144	10,2	0,137	0,139
153	0,146	48	0,141	15,3	0,125	0,127
204	0,146	64	0,134	20,35	0,108	0,110
255	0,146	80	0,123	25,45	0,087	0,088
280	0,145	88	0,113	28	0,075	0,076
306	0,143	96	0,100	30,55	0,061	0,062
311	0,136	103	0,083	33,1	0,046	0,047
356	0,119	111	0,060	35,65	0,030	0,030
382	0,073	119	0,028	38,2	0,013	0,013
400	0,0	125	0,0	40,0	0,0	0,0

Az  $U(x, 0, 0)$  hőmérsékleteloszlást az 1. sz. diagramm, az  $U(0, y, 0)$  hőmérsékleteloszlást a 2. sz. diagramm, végül az  $U(0, 0, z)$  hőmérsékleteloszlást a 3. sz. diagramm szemlélteti. Mindhárom diagrammban feltüntettük (szaggatott vonallal) azon  $U^*(z)$  »relatív stacionárius hőmérsékleteloszlást« is, amely a tárgyalt paralelepipedonnal  $z$  irányban megegyező vastagságú planparallel lemezben alakul ki, azonos kezdeti és kerületi feltételek mellett.

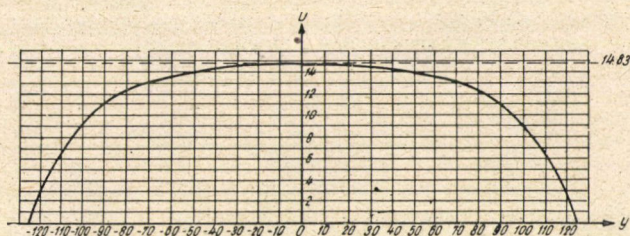


1. diagramm

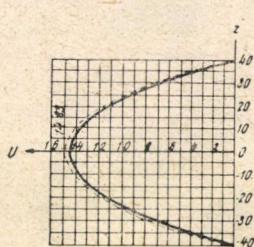
\* A közölt numerikus eredmények kiszámításánál közreműködött Rózsa Pál okl. gépészmérnök, aspiráns.



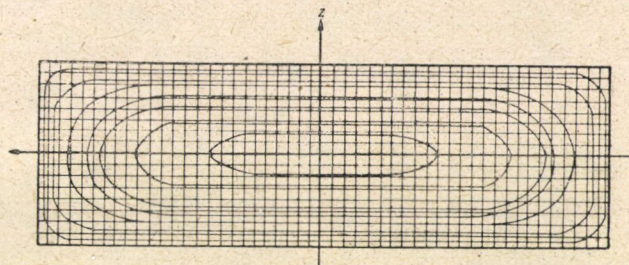
Végül a 4. sz. diagrammban bemutatjuk a paralelepipedon  $(y,z)$  síkmetszetében létrejövő »relatív-stacionárius« hőmérsékeloszlást szemléltető izotermákat.



2. diagramm



3. diagramm



4. diagramm

## IRODALOM

1. Lásd pl. A. H. Тихонов А. А. Самарский : Уравнения математической физики 455. old.
2. Lásd ugyanott : 416. old.
3. Lásd ugyanott : 456. old.
4. Lásd G. Kirchhoff : Vorlesungen ü. Wärmelehre, 25. oldal.

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ КРАЕВОМ УСЛОВИИ, ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМОМ ОТ ВРЕМЕНИ. (ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОХЛАЖДЕНИЯ, Т. Е. НАГРЕВАНИЯ ТЕЛА, ПОМЕЩЕННОГО В СРЕДУ С РАВНОМЕРНО ПЕРЕМЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

Э. ЭГЕРВАРИ—В. ЛОВАШ—НАДЬ

## Резюме

Предмет настоящей работы — определение функций, описывающих распределение температуры тел, помещенных в среду с равномерно переменной температурой. Функция, удовлетворяющая однородному дифференциальному уравнению  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$

при неоднородном краевом условии  $b \frac{\partial u}{\partial t} + u = v \cdot t$  и при начальном условии  $u(x, y, z, 0) = 0$ , определяема как сумма  $u = u_1 + u_2$  партикулярного решения  $u_1 = vt + U(x, y, z)$  удовлетворяющего однородному дифференциальному уравнению и неоднородному краевому условию и общего решения  $u_2$  удовлетворяющего однородному дифференциальному уравнению с однородным краевым условием и начальным условием

$$u_2(x, y, z, 0) = U(x, y, z)$$

Этот способ трактовки делает возможным использование формальных аналогий, возникающих между процессом охлаждения, т. е. нагревания и другими проблемами математической физики (колебание мембранов, кручение и т. д.)

## LA SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA CONDUCTION CALORIQUE AVEC CONDITION PÉRIPHÉRIQUE DÉPENDANT LINÉAIREMENT DE LA DURÉE.

(EXAMEN DU PROCESSUS DE REFROIDISSEMENT RESPECTIVEMENT DE RECHAUFFEMENT D'UN CORPS PLACÉ DANS UN MÉDIUM DONT LA TEMPÉRATURE VARIE D'UNE MANIÈRE UNIFORME.)

E. EGERVÁRY ET V. LOVASS-NAGY

### Résumé

Le sujet de l'article présent est la détermination des fonctions décrivant la distribution des températures d'un corps placé dans un médium de température variable. La fonction qui satisfait l'équation différentielle homogène  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta u$  dans le cas d'une condition périphérique *non-homogène*  $b \frac{\partial u}{\partial t} + u = v \cdot t$ , et d'une condition initiale  $u(x, y, z, 0) = 0$  peut être déterminé comme la somme  $u = u_1 + u_2$  de la solution particulière  $u_1 = v \cdot t + U(x, y, z)$  qui satisfait la condition périphérique non-homogène et la solution générale  $u_2$  qui satisfait l'équation différentielle homogène avec une condition périphérique homogène et avec le condition initiale  $u_2(x, y, z, 0) = U(x, y, z)$ . Cette méthode de traitement rend possible d'utiliser les analogies formelles qui existent entre le processus de refroidissement respectivement de rechauffement et les autres problèmes de la physique mathématique (vibrations de membranes, torsion, etc.).



# SAJÁT SÍKJÁBAN NYOMOTT KÖRLEMEZEK KIHAJLÁSÁRÓL

LOVASS-NAGY VIKTOR

## ÖSSZEFOGLALÁS

Szerző jelen dolgozatában saját síkjában ható nyomás által terhelt köralakú síklemezek kihajlásának vizsgálatával foglalkozik. Kármán T. és M. Biot egyenes rudak kihajlásának vizsgálatánál alkalmazott módszerét köralakú síklemezekre általánosítva meghatározza, a kihajlításhoz szükséges rugalmas munkát, és ebből számítja ki a kihajlást előidéző kritikus nyomás értékét. •

(E dolgozat a Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Osztályának megbízásából végzett, nyomásmérésre használt köralakú lemezek deformációjára vonatkozó vizsgálatainkkal kapcsolatosan készült.)

Saját síkjában ható nyomás által igénybevett lemezek kihajlásának matematikai vizsgálatával *H. Reissner* és *A. Willers* foglalkozott [1]. Mindkét szerző a problémát a variáció-számítás segítségével vizsgálja, keresve azon legkisebb nyomóerő nagyságát, amely a lemez kihajlását\* eredményezi. Jelen dolgozat *Th. v. Kármán* és *M. Biot* által egyenes rudak kihajlásának vizsgálatánál [2] alkalmazott módszerének általánosítását felhasználva kísérli meg saját síkjában ható, egész kerülete mentén egyenletesen eloszló nyomás által terhelt, kerületén befogottnak vagy megtámasztottnak tekintett körlemez kihajlásának, illetve a kihajlást előidéző legkisebb nyomásnak meghatározását.

Bevezetve a hajlítási szilárdság ( $D$ ) fogalmát,\*\* a kerületén befogott, vagy megtámasztott tetszésszerű alakú lemez kihajlását a

$$(1) \quad D\Delta\Delta w + P\Delta w = 0$$

\* A magyarnyelvű irodalomban általánosan használt »kihajlás« szót használjuk a német »Knickung«, ill. az angol »Buckling« kifejezésekkel jelölt fogalom megnevezésére, az etimológiailag helyesebb »kibillenés« helyett.

\*\* Hajlítási szilárdságnak (németül: Biegungssteifigkeit, angolul: flexural rigidity) nevezzük a következő állandó törtet:

$$D = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2}$$

Itt  $h$  jelenti a lemez vastagságát,  $\nu$  pedig az ú. n. »Poisson-féle számot«.

differenciálegyenlet írja le [3]. Itt  $P$  jelenti a lemez kerülete mentén egyenletesen eloszló, a kerületre mindenütt merőleges irányú, a lemez síkjában ható nyomóerőnek a hosszegységre vonatkoztatott nagyságát,  $w$  pedig valamely elemi lemezrészecskének a terheletlen lemez síkjára merőleges elmozdulását.

Az (1) egyenletet

$$(1.1) \quad \Delta(D\Delta w + Pw) = 0$$

alakban írva, látható, hogy a negyedrendű differenciálegyenlet általános megoldásának megkonstruálásához szükséges négy független partikuláris megoldás közül kettőt a

$$(2) \quad D\Delta w + Pw = 0$$

differenciálegyenlet megoldásával nyerhetünk, további kettőt pedig a

$$(3) \quad \Delta w = 0$$

differenciálegyenlet két független partikuláris megoldása szolgáltat. Köralakú lemez esetén, melyet kerülete mentén mindenütt a lemez középpontja felé irányuló egyenletes nyomás terhel, tehát a terhelés körszimmetriát mutat, a kihajtott lemez kénytelen forgásfelületet-alakot felvenni: ha  $r$  jelenti valamely elemi lemezdarabnak a terheletlen lemez középpontjától mért távolságát,  $w$  csak  $r$ -től függ. E körszimmetria kihasználásával a (2) differenciálegyenlet

$$(2.1) \quad D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + Pw = 0$$

alakban írható, a (3) differenciálegyenlet pedig

$$(3.1) \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 0$$

alakba megy át.\* Bevezetve a  $\frac{P}{D} = \lambda^2$  rövidítést, a

$$2.1.2) \quad -\frac{d^2}{(d\lambda r)^2} w + \frac{1}{\lambda r} \frac{d}{d\lambda r} w + w = 0$$

egyszerűbb alakban írt differenciálegyenlet ismert általános megoldása:

$$(2.1.3) \quad w = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r),$$

ahol  $J_0$  az első-,  $Y_0$  pedig a másodfajú, nullarendű Bessel-féle függvényt

\* U. i. a »Laplace-féle operátor«-t polárkoordinátákra alkalmazva, ha  $w$  csak  $r$ -től függ:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}$$

jelenti.\*\* Behelyettesítéssel igazolható továbbá, hogy a  $w = \text{const.}$  és a  $w = \ln r$  függvények a (3.1) egyenletet azonosan kielégítik, tehát az (1) differenciálegyenlet általános megoldása szimmetrikusan terhelt körlemez esetén

$$(1.1) \quad w = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r) + C_3 + C_4 \ln r$$

alakban állítható elő.

Tekintve, hogy a  $C_2$  és  $C_4$  állandók bármelyikének nullától különböző értéke esetén  $w$  értéke az  $r = 0$  helyen végtelen naggyá válna, szükségképpen  $C_2$  és  $C_4$  értéke nullának vehető. A  $C_3$  értéke az alább tárgyalandó kerületi feltételekből kiszámítható, ezzel szemben a kerületi feltételek a  $C_1$  amplitudó kiszámítására nem nyújtanak lehetőséget. Ez annyit jelent, hogy amennyiben a kerületen ható nyomás nagysága akkora, hogy a kihajlás létrejöhet, akkor a kihajlott lemez alakja oly forgásfelület lesz, melynek meridiángörbéje Bessel-féle függvény és amelynek kidomborodása a rugalmassági határon belül tetszésszerűen tehető. Az amplitudó e határozatlansága a rugalmas egyensúlyt kifejező differenciálegyenlet magasabbfokú tagjainak elhanyagolásából származik; tekintve, hogy számításaink további során ugyanilyen rendű elhanyagolásokat fogunk alkalmazni, a legkisebb, kihajlást előidéző erő kiszámításánál e határozatlanság nem jelent majd akadályt.

A kihajlott lemez alakját leíró

$$w = C_1 J_0(\lambda r) + C_3$$

függvények\*\*\* a következő kerületi feltételeket kell kielégítenie:

- |  |  |
|--|--|
| a) A körlemez egész kerülete mentén befogást tételezve fel : | b) A körlemez egész kerülete mentén megtámasztást tételezve fel: |
|--|--|

### I. kerületi feltétel:

A kerület minden pontjának a terheletlen lemez síkjára merőleges elmozdulása nulla :

$$w(R) = 0$$

\*\* Ugyanis a

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{P}{D} w = 0$$

differenciálegyenletnek mindig van a kerületi feltételeket egyidejűleg kielégítő  $w = 0$  triviális megoldása, továbbá vannak a paraméternek olyan értékei, melyeknél a triviálisól különböző megoldás is létezik. Ez fizikailag azt jelenti, hogy a  $P$  nyomás általában nem idéz elő kihajlást ( $w = 0$ ); kihajlás (a differenciálegyenletnek a triviálisól különböző megoldása) csak akkor lehetséges, ha a  $P$  nyomás (vagy : a  $P/D = \lambda^2$  paraméter) értéke a kerületi feltételekből nyerhető kritikus értékeket veszi fel.

Az első- és másodfajú Bessel-féle függvényt illetőleg l. pl. Kármán és Biot idézett munkájának 47 és következő oldalait.

\*\*\*

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

A  $J_0(\lambda r)$  függvény argumentumában szereplő  $\lambda r$  kifejezés dimenziótlan mennyiség, mint erről a  $P$  nyomás (kg/cm) s  $D$  hajlítási szilárdság (kg · cm) és az  $r$  (cm) technikai mértékegységeinek összehasonlításával is meggyőződhetünk.

## II. kerületi feltétel:

A forgásfelület-alakú kihajlott lemez meridiángörbéjének érintője a kerület minden pontjában vízszintes:

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=R} = 0.$$

## II. kerületi feltétel:

A megtámasztás helyén, tehát a kerület mindegyik pontjában a hajlítónyomatékok mindegyike\* nullával egyenlő:

$$\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}\right)_{r=R} = 0.$$

Az I. kerületi feltétel alapján  $C_3$ -at kiküszöbölve nyerjük, hogy

$$(4) \quad w = C_1 [J_0(\lambda r) - J_0(\lambda R)].$$

A második kerületi feltételből pedig azt kapjuk, hogy:

a) befogás esetén:

$$(5.1) \quad J_1(\lambda R) = 0$$

b) megtámasztás esetén\*:

$$(5.2) \quad (1 - \nu) J_1(\lambda R) = \lambda R J_0(\lambda R).$$

\* A kihajlított lemez valamely pontjában fellépő hajlítónyomatékokat illetően az Encyklopädie der Math. Wissenschaften (Bd. IV., Teilbd. 4., 185. old.) alapján a következő három összefüggés ad felvilágosítást: (a hajlítónyomatékokat  $G_1$ -gyel,  $G_2$ -vel és  $H$ -val jelölve)

$$G_1 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$G_2 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$H = D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

A II. ker. feltétel értelmében az  $r = R$  helyen  $G = G_1 = G_2 = H = 0$ . Abban az esetben, ha a kihajlott lemez forgásfelület, az  $w = w(r)$ , a III. egyenlet azonosan eltűnik, továbbá

$$G = -D \left( \frac{1}{R_1} + \nu \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

és mivel

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d^2 w}{dr^2}$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}.$$

tehát

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 0; \quad r = R.$$

\*\* Ennek a transzcendens egyenletnek a közelítő megoldása grafikus úton, a  $J_1(x)$  és a  $\frac{1}{1-\nu} x J_0(x)$  síkgörbék metszéspontjainak megszerkesztésével történhetik, a gyökök pontossága Newton-módszer vagy »regula falsi« segítségével történhetik.

A nullarendű és elsőrendű, elsőfajú Bessel-függvények numerikus értékeit illetően I. Jahnke—Emde: Tafeln Höherer Funktionen, Teubner, 1948. 166. old., (a  $J_1(x) = 0$  egyenlet gyökeit illetően), továbbá 156. és a következő oldalakat.

Az (5.1) és (5.2) egyenletekből nyerhetők a  $\frac{P}{D} = \lambda$  paraméternek azon értékei, amelyek mellett a (2.1) differenciálegyenletnek a  $w = 0$  triviális megoldástól különböző megoldása, tehát a Bessel-függvény alakú megoldás is létezik. A karakterisztikus egyenlet gyökei:

a) befogás esetén:

$$\lambda_1 = \frac{3,83}{R}, \quad \lambda_2 = \frac{7,02}{R}, \quad \lambda_3 = \frac{10,17}{R}, \dots$$

b) megtámasztás esetén:

$$\lambda_1 = \frac{2,05}{R}, \quad \lambda_2 = \frac{5,39}{R}, \quad \lambda_3 = \frac{8,57}{R}, \dots$$

A továbbiakban meg fogjuk mutatni, hogy mindkét esetben a legkisebb értékhez tartozó  $P = \lambda^2 D$  nyomás az a legkisebb terhelés, amely a lemez kihajlását előidézhetheti. (Ha a kerületen ható nyomás ezt a legkisebb kritikus terhelést nem éri el, akkor a lemez csak a saját síkjában deformálódik, nem hajlik ki.)

Ugyanis a lemez kihajlításához szükséges rugalmas munka: [4]

$$(6) \quad A = \frac{D}{2} \iint_T \left\{ (w)^2 - 2(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy,$$

ahol az integrációs tartomány a kihajlott lemez kerülete (melynek  $w$  elmozdulása nulla) által körülhatárolt síkrész, jelen esetben körterület-alakú kétméretű tartomány.

A lemez kihajlításához szükséges rugalmas munka kiszámításánál nem veszünk tudomást a lemez egyes részeinek esetleges vízszintes elmozdulásáról, tehát az integrációs tartomány sugara  $R$ -rel egyenlő. Mivel a kihajlott lemez alakját leíró  $w$  függvény csak  $r$ -től függ, a rugalmas munkát szolgáltató (6) képletet polárkoordináták bevezetésével át fogjuk írni és a  $\varphi$  polárszög szerinti integrálást ilymódon azonnal elvégezhetjük. Polárkoordinátákra térve át és a kihajlott lemez alakját reprezentáló forgásfelület tetszésszerinti pontjában a főgörbületeket  $1/R_1$ -gyel és  $1/R_2$ -vel jelölve, a (6) képletben szereplő egyes mennyiségek a következőképpen írhatók:

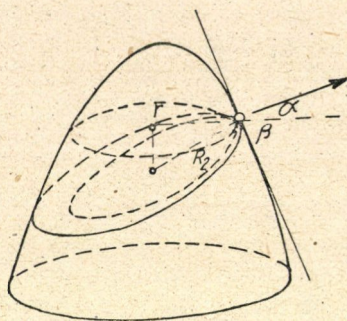
$$(7) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \cong \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}.$$

Itt az egyik főgörbület:  $\frac{1}{R_1}$  éppen a meridiángörbe görbületével egyenlő, tehát:

$$(8) \quad \frac{1}{R_1} \cong \frac{d^2 w}{dr^2} = C_1 \frac{d^2}{dr^2} J_0(\lambda r).$$



A másik főgörbület pedig kifejezhető (l. az 1. sz. ábrát is) a következőképpen :



1. ábra

A Meusnier-féle tétel értelmében a meridiángörbe síkjára merőleges főmetszet és a vízszintes síkban levő ferde metszet (ez utóbbi sugarú kör) sugara között a következő összefüggés áll fenn :

$$(9) \quad r = R_2 \cos \alpha.$$

De mivel az  $\alpha$  szög éppen a meridiángörbe érintőjének irányszögével egyenlő  $\beta$  szögnek a pótszöge, tehát

$$(10) \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} \cos \alpha = \frac{1}{r} \sin \beta \cong \frac{1}{r} \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r} C_1 \frac{d}{dr} J_0(\lambda r).$$

Mivel továbbá

$$(11) \quad \Delta w = -\lambda^2 C_1 J_0(\lambda r),$$

tehát a lemez kihajlításához szükséges rugalmas munka képlete :

$$(6.1) \quad A = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left\{ \lambda^4 C_1^2 J_0^2(\lambda r) - 2(1-\nu) C_1^2 \lambda^4 \frac{1}{\lambda r} [J_1(\lambda r) \cdot J_0(\lambda r) - \frac{1}{\lambda r} J_1^2(\lambda r)] \right\} r dr.$$

Az integrálást elvégezve [5] nyerjük, hogy a (4) egyenlet által előírt alakra való kihajlítás rugalmas munkaszüksége :

$$(6.2) \quad A = D\pi\lambda^2 C_1^2 \left\{ \frac{\lambda^2 R^2}{2} [J_0^2(\lambda R) + J_1^2(\lambda R)] - (1-\nu) J_1^2(\lambda R) \right\}.$$

Ebből az eredményből az elsőrendű Bessel-függvényt kiküszöbölhetjük, ha felhasználjuk az (5.1) és az (5.2) egyenletekben foglalt összefüggéseket :

a) befogás esetén :

$$(6.2.1) \quad A = D\pi\lambda^2 C_1^2 \frac{\lambda^2 R^2}{2} - J_0^3(\lambda R)$$

b) megtámasztás esetén :

$$(6.2.2) \quad A = D\pi\lambda^2 C_1^2 \frac{\lambda^2 R^2}{2} \left\{ J_0^2(\lambda R) - \frac{2}{\lambda R} J_0(\lambda R) J_1(\lambda R) + J_1^2(\lambda R) \right\}.$$

Ezekben a képletekben a  $\lambda$ , ill. a  $\lambda R$  helyébe az (5.1) és az (5.2) egyenletekből nyert értékek helyettesíthetők. Az ily módon kiszámított értékek jelentik azon munkaszükségletet vagy rugalmas energiát, amely a befogott vagy megtámasztott lemeznek a

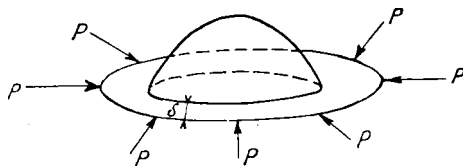
$$w = C_1 \{ J_0(\lambda r) - J_0(\lambda R) \}$$

függvény által előírt alakúra való kihajlításához szükséges. Mivel a kihajlításához szükséges munkát a kerületet terhelő nyomóerő szolgáltatja, a következőkben elő fogjuk állítani a lemez síkjában ható nyomóerő által végzett munka képletét.

A lemez síkjában ható  $P$  nyomás által a lemez összenyomása, ill. kihajlításakor végzett munkát jó közelítéssel úgy számíthatjuk ki, hogy a lemez tetszőszerinti kerületi pontjának a középpont irányába eső  $\delta$  elmozdulását megszorozzuk  $P$ -vel — u. i.  $\delta$  éppen a  $P$  (egységnyi kerületen ható erő) irányába eső elmozdulás — e szorzat a kerület 1 cm-én ható erő munkáját szolgáltatja. Az egész kerületi nyomás munkáját e szerint az

$$(12) \quad L = P\delta 2R\pi$$

képlettel állíthatjuk elő, azaz  $P$  éppen az  $R$  sugarú és  $\delta$  vastagságú körgyűrű területével szorzandó meg (1. a 2. sz. ábrát). Mivel a lemez kihajlása esetén  $\delta$  értékét nem ismerjük, célszerű a  $\delta 2R\pi$  körgyűrű-terület helyett a kihajlott lemez és a terheletlen lemez felületének különbségével számolni, mert a különbség közel egyenlő az  $R$  külső sugarú és  $\delta$  vastagságú körgyűrű területével.



2. ábra

Forgásfelületről lévén szó, a domború lemez felülete közelítően :

$$(13) \quad F_1 \cong 2\pi \int_0^R r \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dr}\right)^2} dr \cong 2\pi \int_0^R r \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 \right\} dr.$$

(A domború lemez felületének kiszámításánál tehát nem vesszük figyelembe azt a körülményt, hogy kihajlás közben a kerület minden pontja  $\delta$ -val elmozdult a középpont felé.)

Mivel

$$\frac{dw}{dr} = -C_1 \lambda J_1(\lambda r).$$

Tehát

$$(13.1) \quad F_1 \cong 2\pi \int_0^R \left\{ r + \frac{1}{2} C_1^2 \lambda^2 r J_1^2(\lambda r) \right\} dr.$$

Az integrálást elvégezve nyerjük, hogy :

$$(13.2) \quad F_1 \cong 2\pi \left\{ \frac{R^2}{2} + C_1^2 \lambda^2 \frac{R^2}{4} \left[ J_1^2(\lambda R) - \frac{2}{\lambda R} J_0(\lambda R) J_1(\lambda R) + J_0^2(\lambda R) \right] \right\}.$$

A terheletlen lemez felszíne :  $F_2 = R^2\pi$  lévén, a kerületi nyomás munkája az

$$\delta 2R\pi \cong F_1 - F_2$$

összefüggés felhasználásával

$$(14) \quad L \cong PC^2\pi \frac{\lambda^2 R^2}{2} \left[ J_1^2(\lambda R) - \frac{2}{\lambda R} J_0(\lambda R) J_1(\lambda R) + J_0^2(\lambda R) \right]$$

alakban írható. Ebből a képletből a kerületi feltételek felhasználásával nyerjük, hogy

a) befogás esetén :

$$(14.1) \quad L \cong PC_1^2\pi \frac{\lambda^2 R^2}{2} J_0^2(\lambda R),$$

b) megtámasztás esetén :

$$(14.2) \quad L \cong PC_1^2\pi \frac{\lambda^2 R^2}{2} \left[ J_1^2(\lambda R) - \frac{2}{\lambda R} J_0(\lambda R) J_1(\lambda R) + J_0^2(\lambda R) \right].$$

Mármost : ahhoz, hogy a lemez kihajlása létrejöhessen, szükséges, hogy a kerületi nyomás által végzett  $L$  munka legalább akkora legyen, mint amekkora a kihajlott lemez rugalmas energiája :  $A$ . E feltételből a (6.2.1) és (6.2.2) egyenleteknek a (14.1) és (14.2) összefüggésekkel való egybevetésével azt nyerjük, hogy

$$\frac{P}{D} \cong \lambda^2.$$

Mivel pedig  $\lambda$  legkisebb értéke

a) befogás esetén :

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 = \frac{3,83}{R},$$



b) megtámasztás esetén :

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 = \frac{2,05}{R},$$

tehát a legkisebb kerületi nyomás, amely a körlemez kihajlását előidézhethet

a) befogás esetén :

$$P_{\min} = \frac{14,67}{R^2} D,$$

b) megtámasztás esetén :

$$P_{\min} = \frac{4,2}{R^2} D.$$

Amennyiben a kerületen ható nyomás értéke ezeknél a kritikus értékeknél kisebb, a lemez nem hajlik ki, csak saját síkjában deformálódik (összenyomódik). Ha a kerületi nyomás értéke eléri a kiszámított alsó határt, a lemez kihajlik és felveszi a (4) egyenlet által előírt alakot [6].

#### IRODALOM

1. *H. Reissner*: Energiekriterium der Knicksicherheit. Zeitschrift für angewandte Mathematik u. Mechanik. (ZAMM) Band 5. Heft 6. *A. Willers*: Die Beullast abgestufter Kreisplatten. ZAMM, Band 19, Nr. 4.
  2. *Th. Kármán*, and *M. A. Biot*: Mathematical Methods in Engineering. McGraw — Hill, 1940.
  3. Többek között: Encyklopädie der Math. Wissenschaften Band IV, Teilband 4, 214. o.
  4. *H. Reissner* idézett cikke, ZAMM, Band 5, Heft 6. 475. o.
  5. A Bessel-függvényekkel kapcsolatos feladatok számítás-technikai megoldását illetőleg l. *G. N. Watson*: A Treatise on the Theory of Bessel-Functions, Cambridge, 1922.
  6. A lemezek szilárdságtanának elméleti alapjait illetőleg az idézett munkákon kívül l. még *A. E. H. Love*: Lehrbuch der Elastizität c. munkáját. (Deutsch v. A. Timpe.) Teubner, Leipzig.
- Derékszögű négyszögalakú lemezek kihajlásának közelítő számítását illetőleg l. *K. Sezawa*: Das Ausknicken von allseitig befestigten und gedrückten rechteckigen Platten. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Band 12, Heft 4.

#### ОБ ИЗГИБАНИИ ПОДАВИМОЙ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНКИ

В. ЛОВАШ-НАДЬ

#### Резюме

В настоящей работе автор исследует изгибание круговых плоских пластинок, нагружаемых действующим в своей плоскости давлением. Обобщая метод исследования изгибания прямых стержней, примененный М. Бю и Т. Карманом на круговые плоские пластинки, автор определяет упругую работу, необходимую для изгибания и из этой вычисляет величину вызывающего изгибание критического давления.

# SUR LA FLEXION D'UNE PLAQUE CIRCULAIRE COMPRIMÉE DANS SON PROPRE PLAN

V. LOVASS-NAGY

## Résumé

Dans son ouvrage présent l'auteur s'occupe de l'investigation de la flexion de plaques planes de forme circulaire, chargées par une pression agissant dans leur propre plan. Généralisant la méthode employée par T. Kármán et M. Biot, l'auteur détermine le travail élastique nécessaire pour effectuer la déflexion et ainsi il calcule la valeur de la pression critique causant la flexion.

## KIS ÁLLANDÓ GÖRBÜLETŰ, KÖRALAKÚ VÉKONY LEMEZEK ALAKVÁLTOZÁSÁRÓL

LOVASS-NAGY VIKTOR

### ÖSSZEFOGLALÁS

A szerző e dolgozat céljául tűzi ki kis (pozitív) állandó görbületű, köralakú vékony lemezeknek a felületre merőleges, egyenletesen eloszló állandó nagyságú erő (hidrosztatikus nyomás) hatására bekövetkező deformációjának és feszültségeloszlásának vizsgálatát, a lemez középfelületének nyúlását is figyelembe véve.

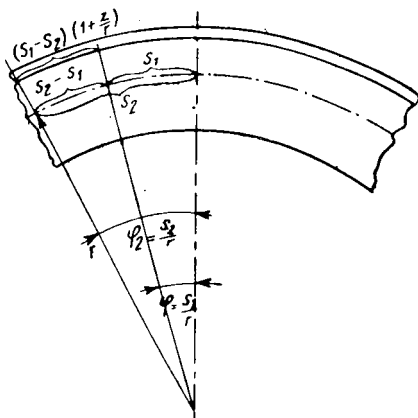
A lemezt kerületén befogottnak, vagy megtámasztottnak és rögzítettnek tételezve fel, a terhelés és a kerületi feltételek szimmetriája miatt terhelt állapotban is forgásfelület alakú lemezeknek egy meridián-metszete deformációjára lehet szorítkozni. A lemezre merőleges irányú nyúlást elhanyagolva, továbbá feltételezve, hogy egyrészt a középfelület és az azzal terheletlen állapotban párhuzamos felületek a deformáció után is párhuzamos felületereget alkotnak, másrészt, hogy a lemez deformálatlan állapotában a gömb középpontjába mutató egyenesek a deformáció során a fenti párhuzamos felületek normálisába mennek át, a lemez egy tetszőszerinti pontjának lehajlását befogott kerület esetén a (36) képlet, megtámasztott és rögzített kerület esetén pedig a (47) képlet szolgáltatja, ahol  $S$  jelenti a középfelület meridiángörbéjének a középponttól a kerületig terjedő darabjának hosszát. A normálfeszültségek a középfelület bármely pontjában ugyanakkorának adódnak, amint az a (39) és (48) képletekből látható.

Jelen dolgozat célja, hogy kis (pozitív) állandó görbületű, köralakú vékony lemezeknek a felületre merőleges, egyenletesen eloszló állandó nagyságú erő (hidrosztatikus nyomás) hatására bekövetkező deformációját és feszültségeloszlását a rugalmasságtan ismert módszereinek felhasználásával, de a lemez középfelületének nyúlását is figyelembe véve vizsgálja. Hasonló feladattal foglalkozik *G. B. Biezeno* a *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*-ban közölt egyik munkájában [1], ahol kis görbületű, köralakú lemezeknek a középpontban ható állandó koncentrált erő következtében létrejövő deformációját teszi vizsgálat tárgyává, ugyancsak a középfelület nyúlásának figyelembevétele mellett. *Biezeno* idézett dolgozata értékes tanulsággal szolgál a számításaink alapját képező differenciálegyenletek megkonstruálása során, ám mindjárt a feladat független változóinak megválasztásakor alkalmazott eltérő eljárásunkkal a számításokat egyszerűbb útra fogjuk terelni.

Az állandó hidrosztatikus nyomás által terhelt lemez deformációját kétféle kerületi feltétel mellett fogjuk vizsgálni: egyrészt abban az esetben, amikor a lemez egész kerületén befogott (befalazott); másrészt, amikor a lemez kerülete megtámasztott és rögzített, pl. egy körhenger alakú csőbe szorítjuk bele a lemezt.

A terhelés és a kerületi feltételek szimmetriája következtében a lemez terhelt állapotában is forgásfelület-alakú marad, tehát elegendő a meridián-

metszet deformációját vizsgálunk. A lemez középfelülete meridiángörbéjének (a továbbiakban röviden: »Középgörbe«) tetszősszerű pontját a lemez terheletlen állapotában egyetlen adattal: a lemez középpontjától a körív mentén mért  $s$  távolsággal határozhatjuk meg. (L. az 1. ábrát.) A középgörbén kívül fekvő tetszősszerű lemezpont helyzetét viszont két adattal: a középgörbétől mért merőleges távolságával ( $z$ ) és a középgörbére való merőleges vetületének a középponttól a körív mentén mért  $s$  távolságával adjuk meg.



1. ábra

A terheletlen állapotában gömbsüveg alakú lemez valamennyi pontjának helyzete az  $s$  és  $z$  koordinátákkal egyértelműen meg van határozva. (A terheletlen lemez középfelületének  $r$  görbületi sugara adott állandó értékkel bír.)

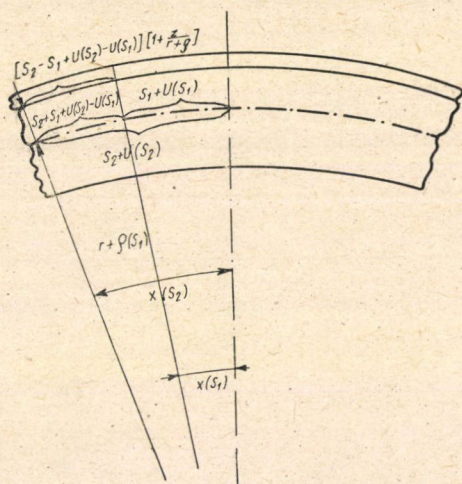
Tárgyalásunkban a deformációt illetően a következő, a lemezelméletben szokásos egyszerűsítéseket vesszük alapul:

1. A  $z$  irányú nyúlást figyelmen kívül hagyjuk.
2. A középgörbe és az ezzel párhuzamos görbék a deformáció után is párhuzamos görbe-sereget alkotnak.
3. Deformálatlan állapotban a gömb középpontjába mutató egyenesek a deformáció során a fenti párhuzamos görbék orthogonális trajektóriáiba mennek át.

A deformálatlan állapotban  $s$ ,  $z$  koordinátákkal adott pont helyzetét a  $p$  hidrosztatikus nyomás ( $\text{kg/cm}^2$ ) által deformált (többé már nem gömbsüveg alakú) lemezben a meridián-görbére való vetületének a szimmetria-tengelytől (a görbeív mentén) mért  $s + u(s)$  távolságával, továbbá a deformált középfelület normálisának a szimmetria-tengellyel bezárt  $\chi(s) = \varphi + \psi$  szögével jellemezzük. (L. a 2. ábrát.) A  $z$  koordináta egyszerűsítő feltevésünk értelmében változatlan marad.

Az  $u(s)$  és  $\psi(s)$  függvények meghatározása céljából képezzük a deformáció során létrejövő fajlagos nyúlások kifejezését. A középgörbe  $s_1 \leq s \leq s_2$  szakaszának deformált állapotban mért átlaggörbületét  $\frac{1}{r + \rho}$ -val jelölve, egy, a középgörbétől  $z$  távolságra fekvő párhuzamos görbeív nyúlásait az 1. és 2. ábrák figyelembevételével a következőképpen nyerhetjük:





2. ábra

A meridiángörbe-menti nyúlás :

$$\varepsilon_m \cong \frac{[s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1)] \left[1 + \frac{z}{r + \varrho}\right] - [s_2 - s_1] \left[1 + \frac{z}{r}\right]}{\left[1 + \frac{z}{r}\right] [s_2 - s_1]}.$$

A középgörbe deformált ívének átlag-görbülete :

$$\frac{1}{r + \varrho} = \frac{\chi(s_2) - \chi(s_1)}{s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1)},$$

tehát a meridián-görbe menti átlagos nyúlás :

$$\begin{aligned} \varepsilon_m \cong & \frac{[s_2 - s_1] \left[1 + z \frac{\chi(s_2) - \chi(s_1)}{s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1)} - \left(1 + \frac{z}{r}\right)\right]}{\left[1 + \frac{z}{r}\right] [s_2 - s_1]} + \\ & + \frac{[u(s_2) - u(s_1)] \left[1 + z \frac{\chi(s_2) - \chi(s_1)}{s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1)}\right]}{\left[1 + \frac{z}{r}\right] [s_2 - s_1]}. \end{aligned}$$

Mivel :

$$\lim_{s_2 \rightarrow s_1} \frac{\chi(s_2) - \chi(s_1)}{s_2 - s_1} = \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \frac{\frac{s_2}{r} + \psi(s_2) - \frac{s_1}{r} + \psi(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{1}{r} + \psi'(s),$$

tehát az átlagos nyúlásból  $s_2 \rightarrow s_1$  határátmenettel nyert lokális nyúlás pontos értéke :

$$\varepsilon_m = \frac{z \left[ \frac{1}{r} + \psi'(s) \right] + u'(s) \left[ 1 + z \frac{\frac{1}{r} + \psi'(s)}{1 + u'(s)} \right]}{1 + \frac{z}{r}}; \quad u' = \frac{du(s)}{ds}.$$

A tört számlálójában a kijelölt műveleteket elvégezve és összevonva nyerjük, hogy

$$(1) \quad \varepsilon_m = \frac{z\psi'(s) + u'(s)}{1 + \frac{z}{r}}.$$

A meridiángörbe síkjára merőleges irányban a nyúlást a rugalmasságtanban használatos közelítés alapján a következő képlet szolgáltatja :

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi \left\{ s + u(s) + z \left[ \frac{s}{r} + \psi(s) \right] \right\} - 2\pi s \left\{ 1 + \frac{z}{r} \right\}}{2\pi s \left\{ 1 + \frac{z}{r} \right\}}.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve és egyszerűsítve :

$$(2) \quad \varepsilon_t = \frac{u(s) + z\psi(s)}{s \left\{ 1 + \frac{z}{r} \right\}}.$$

Amennyiben a lemezvastagságot a görbületi sugárhoz képest oly kicsinek tekintjük, hogy viszonyuk négyzete már elhanyagolható, akkor :

$$\frac{1}{1 + \frac{z}{r}} \cong 1 - \frac{z}{r}$$

és a nyúlások képletei :

$$(3) \quad \varepsilon_m = \left[ 1 - \frac{z}{r} \right] [u'(s) + z\psi'(s)]$$

$$(4) \quad \varepsilon_t = \left[ 1 - \frac{z}{r} \right] \left[ \frac{u(s)}{s} + z \frac{\psi(s)}{s} \right].$$

A rugalmasságtan ismert képletei alapján a nyúlásokból kiszámíthatjuk a meridiángörbe síkjába eső ( $\sigma_m$ ) és az arra merőleges ( $\sigma_t$ ) húzó-nyomó feszültségeket : [2]

$$\sigma_m = \frac{Em^2}{m^2 - 1} \left( \varepsilon_m + \frac{1}{m} \varepsilon_t \right)$$



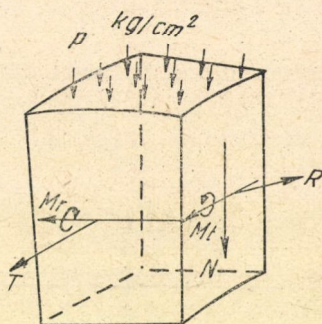
$$\sigma_t = \frac{Em^2}{m^2-1} \left( \frac{1}{m} \varepsilon_m + \varepsilon_t \right),$$

azaz, behelyettesítve a (3) és (4) kifejezésekből nyert értékeket :

$$(5) \quad \sigma_m = \frac{Em^2}{m^2-1} \left[ 1 - \frac{z}{r} \right] \left[ u' + z\psi' + \frac{1}{m} \left( \frac{u}{s} + z\frac{\psi}{s} \right) \right]$$

$$(6) \quad \sigma_t = \frac{Em^2}{m^2-1} \left[ 1 - \frac{z}{r} \right] \left[ \frac{1}{m} (u' + z\psi') + \frac{u}{s} + z\frac{\psi}{s} \right].$$

Most a húzó-nyomó feszültségek és az  $u(s)$ ,  $\psi(s)$  függvények ismeretében megszerkesztjük a hosszegységre vonatkoztatott feszültség-eredőket, illetve nyomaték-eredőket és ezek alapján felírjuk a lemez-elem egyensúlyát kifejező egyenleteket, ilymódon közvetlenül a probléma differenciál-egyenletrendszeréhez fogunk jutni. (A lemez-elem egy lapjára ható feszültségeknek, valamint nyomatékoknak általában három derékszögű komponensük van. Ezek közül mindazok, melyek a 3. sz. ábrán nem szerepelnek, a tengelyszimmetria folytán zérussal egyenlők.)



3. ábra

Először képezzük a  $\sigma_m$  és  $\sigma_t$  nomál-feszültségeknek  $R$ , ill.  $T$  (hosszegységekre vonatkoztatott) eredőit, továbbá a hidrosztatikus nyomás következtében jelentkező (ugyancsak hosszegységekre vonatkoztatott)  $N$  tangenciális feszültség-eredőt, valamint az  $M_r$  és  $M_t$  (hosszegységekre vonatkoztatott) feszültség-nyomatékokat. A hosszegységekre vonatkoztatott normál-feszültség-eredők a következő képletből nyerhetők :

$$(7) \quad R = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\sigma_m 2\pi \left[ s + u + z \left( \frac{s}{r} + \psi \right) \right]}{2\pi(s + u)} dz$$



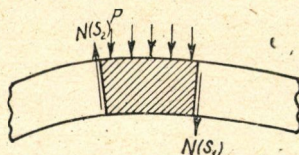
$$\begin{aligned}
 (8) \quad T &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\sigma_t \left[ s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1) \right] \left[ 1 + \frac{z}{r + c} \right]}{s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1)} dz = \\
 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_t \left[ 1 + z \frac{\frac{1}{h} + \psi'}{1 + u'} \right] dz.
 \end{aligned}$$

Az integrálásokat elvégezve és a lemezvastagság kicsinységére való tekintettel a  $h^3$ -t a  $h$ -hoz viszonyítva elhanyagolva, nyerjük, hogy

$$(9) \quad R = h \frac{Em^2}{m^2 - 1} \left( u' + \frac{1}{m} \cdot \frac{u}{s} \right)$$

$$(10) \quad T = h \frac{Em^2}{m^2 - 1} \left( \frac{1}{m} u + \frac{1}{m} \cdot \frac{u}{s} \right).$$

A tangenciális feszültségeredő (nyíróerő) meghatározását legcélszerűbb oly módon elvégezni, hogy (a 4. ábra alapján) felírjuk a lemezre merőlegesen ható erők egyensúlyi feltételét.



4. ábra

$$(11) \quad ps_2^2\pi - ps_1^2\pi + N(s_2) 2s_2\pi - N(s_1) 2s_1\pi = 0.$$

Az egyenletet  $\pi(s_2 - s_1)$ -gyel osztva,  $s_2 \rightarrow s_1$  határátmenettel nyerjük, hogy

$$(12) \quad sN(s) = -\frac{ps^2}{2}$$

és ebből

$$(13) \quad N(s) = -\frac{ps}{2}.$$

A hosszegységre vonatkoztatott feszültség-nyomatékok a 3. ábra alapján megszerkesztett alábbi egyenletekből nyerhetők:



$$(14) \quad M_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\sigma_m z 2\pi \left[ s + u + z \left( \frac{s}{r} + \psi \right) \right]}{2\pi [s + u]} dz$$

$$(15) \quad M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\sigma_t z 2\pi \left[ s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1) \right] \left[ 1 + \frac{z}{r + \rho} \right]}{2\pi [s_2 - s_1 + u(s_2) - u(s_1)]} dz$$

Az integrálás elvégzése után, az eredményben a  $h$  ötödik hatványát a harmadik hatványhoz képest elhanyagolva, továbbá az

$$\frac{\frac{s}{r} + \psi}{s + u} = \frac{\varphi + \psi}{s + u} = \frac{1}{r + \rho}$$

kifejezésnek az egységhez képest relatív kicsiny voltára való tekintettel nyerjük, hogy

$$(16) \quad M_t = \frac{h^3}{12} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \left[ \psi' + \frac{1}{m} \frac{\psi}{s} \right]$$

$$(17) \quad M_r = \frac{h^3}{12} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \left[ \frac{1}{m} \psi' + \frac{\psi}{s} \right]$$

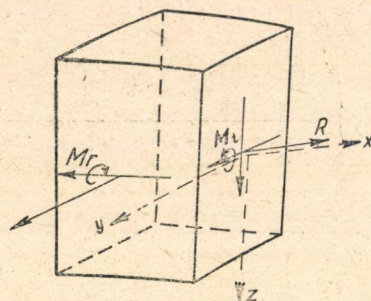
vagy, bevezetve a  $B = \frac{h^3}{12} \frac{E m^2}{m^2 - 1}$  »hajlítási szilárdság« [3] fogalmát, a (hosszegységre vonatkoztatott) feszültség-nyomatékok képlete így írható:

$$(18) \quad M_t = B \left[ \psi' + \frac{1}{m} \frac{\psi}{s} \right]$$

$$(19) \quad M_r = B \left[ \frac{1}{m} \psi' + \frac{\psi}{s} \right]$$

A (hosszegységre vonatkoztatott) feszültség-eredők és feszültségnyomatékok ismeretében a lemez-elem egyensúlyát kifejező egyenletek a következőképpen írhatók fel:

Válasszuk az egyensúlyi egyenletek felírásához koordinátatengelyeknek az  $R$  és  $N$  feszültségeredőkkel párhuzamos irányú  $x$  és  $z$  tengelyeket és az  $x, z$  síkra merőleges  $y$  tengelyt. (L. az 5. ábrát.) Ebben az  $x, y, z$  koordinátarendszerben felírva a lemez-elemre ható erők egyensúlyának feltételeit, az  $y$  tengellyel és a  $z$  tengellyel párhuzamos erőkomponensek egyensúlyát kifejező egyenletek csupán a nyíróerő és a hidrosztatikus nyomás közti már ismert összefüggést, illetve a »gyűrűs-feszültségek«  $y$  irányú komponenseinek egyensúlyának tényét foglalják magukban. Az ismeretlen  $u(s)$  és  $\psi(s)$  függvények



5. ábra

meghatározása szempontjából csupán az  $x$  tengellyel párhuzamos erőkomponensek egyensúlyát kifejező egyenlet, továbbá a parallelkör érintője körül mint tengely körül vett nyomaték-komponensek algebrai összegének eltűnését kifejező egyenlet jön számításba :

$$(20) \quad \frac{d}{ds} [R(s+u)] - T = 0$$

$$(21) \quad \frac{d}{ds} [M_t(s+u)] - N(s+u) - M_r = 0.$$

Az  $R$ s mennyiség mellett  $Ru$ -t,  $M_t$ s mellett  $M_t u$ -t,  $N$ s mellett  $Nu$ -t elhanyagolva a (20) és (21) egyenletek a következőképpen egyszerűsödnek :

$$(22) \quad s \frac{d}{ds} R + R - T = 0$$

$$(23) \quad s \frac{d}{ds} M_t + M_t - sN - M_r = 0.$$

A (9), (10), valamint (16), (17) összefüggések felhasználásával

$$(24) \quad s \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{du}{ds} - \frac{1}{s} u = 0$$

$$(25) \quad s \frac{d^2 \psi}{ds^2} + \frac{d\psi}{ds} - \frac{1}{s} \psi = \frac{p}{2B} s^2. *$$

A (24) egyenlet általános megoldása  $u(s) = C_1 s + \frac{C_2}{s}$ . Mivel a lemez közép-pontjában (az  $s = 0$  helyen) a nyúlás értéke nem lehet végtelen nagy, tehát szükségképpen  $C_2 = 0$  és  $u = C_1 s \dots \dots \dots (26)$ . A (25) egyenlet általános megoldása :

$$\psi(s) = K_1 s + \frac{K_2}{s} + \frac{p}{16B} s^3.$$

\* Az általunk levezetett (25) egyenletben foglalt összefüggést síklemezre alkalmazva, a lemez-elmélet ismert differenciálegyenletéhez jutunk. L. pl. *Hort—Thoma*: Die Differential-Gleichungen der Technik u. Physik, V. kiadás, 167. o.

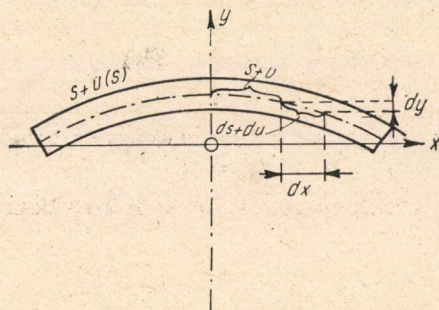


Mivel  $K_2$  szükségképpen nullával egyenlő, tehát

$$(27) \quad \psi = K_1 s + \frac{p}{16B} s^3.$$

A  $C_1$  és  $K_1$  állandók értékét a kerületi feltételek figyelembevételével a későbbiekben fogjuk kiszámítani.

A következőkben meg fogjuk konstruálni a deformált középgörbe paraméteres egyenletrendszerét — és a kerületi feltételeket is figyelembevételével — ki fogjuk számítani a lemez tetszőszerinti pontjának lehajlását szolgáltatató képletet.



6. ábra

A 6. ábra alapján a középgörbe paraméteres egyenletrendszerét az alábbi differenciálegyenletekből nyerjük:

$$(28) \quad -\frac{dy}{ds + du} = \sin \left( \frac{s}{r} + \psi \right)$$

$$(29) \quad \frac{dx}{ds + du} = \cos \left( \frac{s}{r} + \psi \right).$$

A (26) és (27) kifejezéseket behelyettesítve\* és integrálva nyerjük, hogy

$$(30) \quad y = y_0 - (1 + C_1) \left( \frac{s^2}{2r} + \frac{p}{16B} \frac{s^4}{4} + K_1 \frac{s^2}{2} \right)$$

$$(31) \quad x = x_0 + (1 + C_1) \left( s - \frac{s^3}{6r^2} - \frac{1}{r} K_1 \frac{s^3}{3} - \frac{1}{r} \frac{p}{16B} \frac{s^5}{5} - \frac{1}{2} K_1^2 \frac{s^3}{3} - K_1 \frac{p}{16B} \frac{s^5}{5} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{(16B)^2} \frac{s^7}{7} \right).$$

A) A lemez kerületét mindenütt befogottnak (befalazottnak) tételezve fel, az eddig határozatlan állandók kiszámítására a következő feltételek állanak rendelkezésünkre:

\* A 28. és 29. egyenletekben szereplő sinus és cosinus függvényeket másodfokú Taylor-polinomjaikkal közelítjük meg.

I. A kerületben  $\psi$  mindenütt nullával egyenlő, tehát

$$\psi(S) = 0,$$

azaz :

$$K_1 S + \frac{p}{16B} S^3 = 0,$$

tehát :

$$K_1 = -\frac{p}{16B} S^2$$

és így a  $\psi(s)$  függvény :

$$(32) \quad \psi = \frac{p}{16B} (s^3 - S^2 s).$$

II. A lemez középpontjának  $x$  koordinátája az axiális szimmetriára való tekintettel nullával egyenlő, tehát  $x_0 = 0$ .

III. A lemez kerületének rögzített voltából következik, hogy

$$x(s) = r \sin \frac{S}{r} \cong S - \frac{S^3}{6r^2},$$

ebből

$$(33) \quad 1 + C_1 = \frac{S - \frac{S^3}{6r^2}}{S - \frac{S^3}{6r^2} + \frac{1}{r} \frac{2p}{240B} S^5 - \frac{4}{165} \left( \frac{p}{16B} \right)^2 S^7}$$

$$C_1 = \frac{1}{1 - \frac{S^2}{6r^2} - \frac{\frac{4}{105} \left( \frac{p}{16B} \right)^2 S^6 - \frac{1}{r} \frac{2p}{240B} S^4}{1}}$$

IV. A lemez kerületének rögzítettségéből következik, hogy

$$y(S) = 0, \text{ tehát } y_0 = (1 + C_1) \left( \frac{S^2}{2r} - \frac{p \cdot S^4}{64B} \right).$$

Az I–IV. feltételek alapján a középgörbe paraméteres egyenletrendszere – kis elhanyagolással egyszerűsített alakban – így írható :

$$(34) \quad x = \frac{1}{S - \frac{4}{105} \left( \frac{p}{16B} \right)^2 S^6} \left[ -\frac{s^3}{6r^2} - \frac{1}{210} \left( \frac{p}{16B} \right)^2 (15s^7 - 42S^2 s^5 + 35S^4 s^3) \right]$$

$$(35) \quad y = \frac{1}{1 - \frac{4}{105} \left( \frac{p}{16B} \right)^2 S^6} \left[ \frac{S^2 - s^2}{2r} - \frac{p}{64B} (S^2 - s^2)^2 \right],$$

ebből a középgörbe  $s$  koordinátájú pontjának lehajlása :\*

$$(36) \quad w = \frac{1}{1 - \frac{4}{105} \left( \frac{p}{16B} \right)^2 S^6} \frac{S^2 - s^2}{2r} + \frac{1}{1 - \frac{4}{105} \left( \frac{p}{16B} \right)^2 S^6} \cdot \frac{p}{64B} (S^2 - s^2)^2.$$

A  $\psi(s)$  és  $u(s)$  függvények ismeretében felírhatjuk a húzó-nyomó feszültségeket és a hajlító nyomatékokat, illetve az utóbbiakból kiszámíthatjuk a hajlító feszültségeket. Az 5. és 6. egyenletek alapján

$$(37) \quad \sigma_m = \frac{Em^2}{m^2 - 1} \left\{ 1 - \frac{z}{r} \right\} \left\{ \frac{m+1}{m} \frac{1}{\frac{4}{105} \left( \frac{p}{16B} \right)^2 S^6 - 1} + \right. \\ \left. + z \frac{p}{16B} \left[ 2s^2 + \frac{m+1}{m} (s^2 - S^2) \right] \right\},$$

$$(38) \quad \sigma_t = \frac{Em^2}{m^2 - 1} \left\{ 1 - \frac{z}{r} \right\} \left\{ \frac{m+1}{m} \frac{1}{\frac{4}{105} \left( \frac{p}{16B} \right)^2 S^6 - 1} + \right. \\ \left. + z \frac{p}{16B} \left[ \frac{2}{m} s^2 + \frac{m+1}{m} (s^2 - S^2) \right] \right\},$$

tehát a lemez középfelületének bármelyik pontjában ( $z = 0$ ) a két húzó-nyomó feszültség ugyanakkora értékkel bír :

$$(39) \quad \sigma_m = \sigma_t = \frac{Em}{m-1} \frac{1}{\frac{140}{3} \frac{m^2}{(m^2-1)} \left( \frac{E}{p} \right)^2 \left( \frac{h}{s} \right)^6 - 1}.$$

Ez az általunk levezetett eredmény azt mutatja, hogy a húzó-nyomó feszültség értéke elméletileg minden határon túl növekszik, ha

$$\left( \frac{E}{p} \right)^2 \left( \frac{h}{S} \right)^6 \rightarrow \frac{3}{140} \frac{m^2 - 1}{m^2}.$$

\* Amennyiben a középgörbe nyúlását elhanyagolhatónak tekintjük,  $C_1 = 0$  é

$$W = \frac{p}{64B} (S^2 - s^2)^3.$$

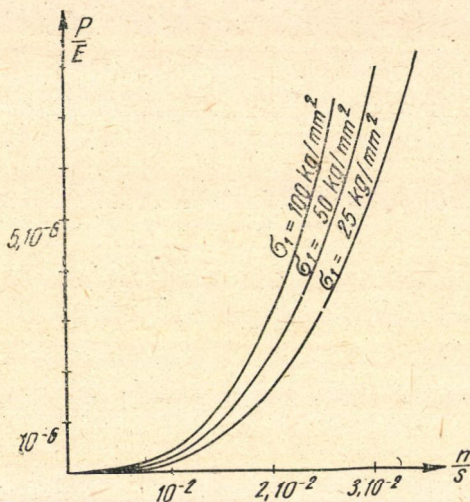
Ezt a képletet *köralakú síklemezre* alkalmazva a lemez-elmélet ismert eredményére jutunk. (V. ö. Handbuch der Physik, Band VI., 214. o.)



Természetesen a húzó-nyomó feszültségnek ez a növekedése csak a Hooke-törvény érvényességi határáig lehetséges. Abban az esetben, ha előírjuk, hogy a lemez középfelületében fellépő húzófeszültség értéke valamely adott  $\sigma_1$  értéket ne lépjen túl, a lemez méretei és a megengedhető hidrosztatikus nyomás értéke között az alábbi összefüggést nyerjük :

$$(40) \quad \frac{p}{E} \cong \sqrt{\frac{\frac{140}{3} \frac{m^2}{m^2-1}}{\frac{Em}{m-1} \frac{1}{\sigma_1} + 1}} \left( \frac{h}{S} \right)^3,$$

tehát adott  $\frac{h}{S}$  viszony esetén megengedhető legnagyobb hidrosztatikus nyomás értékeket különböző megengedett  $\sigma_1$  maximális húzó-nyomó feszültségek esetén harmadfokú parabolák ábrázolják. (L. 7. ábra.)



7. ábra

A  $M_t$  és  $M_r$  hajlító-nyomatékok (hosszegységre vonatkoztatott) értékei a (18) és (19) összefüggések alapján a  $\psi(s)$  függvény ismeretében a következő képletekből számíthatók :

$$(41) \quad M_t = \frac{p}{16} \left( \frac{m+1}{m} S^2 - \frac{3m+1}{m} s^2 \right)$$

$$(42) \quad M_r = \frac{p}{16} \left( \frac{m+1}{m} S^2 - \frac{3+m}{m} s^2 \right).$$

Ezek a képletek figyelemreméltó analógiát mutatnak a köralakú síklemezben hidrosztatikus nyomás hatására fellépő hajlítónyomatékok ismert képletével ; amennyiben pedig a (41) és (42) összefüggéseket síklemezre alkalmazzuk, az ismert képlettel azonos formulához jutunk. [4]

A (41) és (42) összefüggések alapján a hajlítófeszültségek értéke a lemez középpontjában ( $s = 0$ ) és a kerületen ( $s = S$ ) a következő:

$$\sigma_{M_t}(0) = \sigma_{M_r}(0) = \frac{3}{8} \frac{m+1}{m} \frac{p}{h^2} S^2$$

$$\sigma_{M_t}(S) = \frac{3}{4} \frac{p}{h^2} S^2$$

$$\sigma_{M_r}(S) = \frac{1}{m} \frac{3}{4} \frac{p}{h^2} S^2.$$

B) A lemez kerületét megtámasztottnak és rögzítettnek tételezve fel, a határfeltételek a következőképpen módosulnak:

I. A kerületen  $M_t$  értéke mindenütt nullával egyenlő [5], tehát

$$M_t(S) = \frac{h^3}{12} \cdot \frac{Em^2}{m^2-1} \left( \psi'(s) + \frac{1}{m} \cdot \frac{\psi(S)}{S} \right) = 0,$$

azaz

$$K_1 + \frac{p}{16B} S^2 + m \left( K_1 + \frac{3p}{16B} S^2 \right) = 0,$$

tehát megtámasztás esetén

$$K_1 = - \frac{p}{16B} \cdot \frac{1+3m}{1+m} \cdot S^2,$$

ebből a  $\psi(s)$  függvény

$$(43) \quad \psi(s) = \frac{p}{16B} \left( s^3 - \frac{1+3m}{m} S^2 s \right).$$

II. A lemez középpontjának  $x$  koordinátája az axiális szimmetriára való tekintettel továbbra is nullával egyenlő, tehát  $x_0 = 0$ .

III. Mivel a lemez kerülete rögzített, azaz elmozdulás nem lehetséges, tehát

$$x(S) = r \cdot \sin \frac{S}{r} \cong S - \frac{S^3}{6r^2},$$

ebből következik, hogy

$$1 + C_1 = \frac{S - \frac{S^3}{6r^2}}{S - \frac{S^3}{6r^2} + \frac{1}{r} \frac{p}{240B} \frac{1+6m}{1+m} S^5 - \frac{2}{105} \left( \frac{p}{16B} \right)^2 \frac{51m^2 + 3m + 2}{(1+m)^2} S^7}$$

$$(44) \quad C_1 = \frac{1}{1 - \frac{S^2}{6r^2} - \frac{\frac{2}{105} \frac{51m^2 + 3m + 2}{(1+m)^2} \left(\frac{p}{16B}\right)^2 S^6 - \frac{1}{r} \frac{1+6m}{1+m} \frac{p}{240B} S^4} - 1$$

IV. A lemez kerületének rögzítettsége következtében  $y(S) = 0$ , akármekkora is a  $p$  nyomás, tehát

$$y_0 = (1 + C_1) \left( \frac{S^2}{2r} - \frac{p}{16B} \frac{1+5m}{1+m} \frac{S^4}{4} \right).$$

Az I–IV. feltételek alapján a megtámasztott lemez középgörbéjének paraméteres egyenletrendszere — kis elhanyagolással egyszerűsített alakban — a következőképpen írható:

$$(45) \quad x = \frac{1}{1 - \frac{2}{105} \frac{51m^2 + 3m + 2}{(1+m)^2} \left(\frac{p}{16B}\right)^2 S^6} \left[ s - \frac{s^3}{6r^2} - \frac{1}{210} \frac{1}{(1+m)^2} \left(\frac{p}{16B}\right)^2 \cdot [15(1+m)^2 s^7 - 42(1+m)(1+3m)s^5 S^2 + 35(1+3m)^2 S^4 s^3] \right]$$

$$(46) \quad y = \frac{1}{1 - \frac{2}{105} \frac{51m^2 + 3m + 2}{(1+m)^2} \left(\frac{p}{16B}\right)^2} \left[ \frac{S^2 - s^2}{2r} - \frac{p}{64B} (S^2 - s^2) \left( s^2 - \frac{1+5m}{1+m} S^2 \right) \right],$$

tehát a középgörbe  $s$  koordinátájú pontjának a  $p$  hidrosztatikus nyomás hatására létrejövő lehajlása:

$$(47) \quad w = \frac{1}{1 - \frac{2}{105} \frac{51m^2 + 3m + 2}{(1+m)^2} \left(\frac{p}{16B}\right)^2} \frac{S^2 - s^2}{2r} + \frac{1}{1 - \frac{2}{105} \frac{51m^2 + 3m + 2}{(1+m)^2} \left(\frac{p}{16B}\right)^2} \frac{p}{64B} \cdot (S^2 - s^2) \left( s^2 - \frac{1+5m}{1+m} S^2 \right).$$

A kerületen megtámasztott és rögzített lemezben ébredő húzó-nyomó feszültségek a  $\psi(s)$  és  $u(s)$  függvények ismeretében az (5) és (6) egyenlet alapján kiszámíthatók. A húzó-nyomó feszültségek általános kifejezésének felírását mellőzve, a befogott lemezzel való összehasonlítás végett (l. a 39. sz. képletet) meghatározzuk a középfelület valamely pontjában megtámasztás esetén ébredő húzó-nyomó feszültségeket. A  $\psi(s)$  és  $u(s)$  függvények kifejezését az (5) és (6) egyenletekbe helyettesítve és  $z$  helyébe nullát írva, arra az eredményre jutunk, hogy — akárcsak a befogott lemeznél — a középfelület bár-



melyik pontjában a két húzó-nyomó feszültség ( $\sigma_m$  és  $\sigma_t$ ) ugyanakkora értékkel bír:

$$(48) \quad \sigma_m = \sigma_t = \frac{Em}{m-1} \frac{1}{\frac{280}{3} \frac{(1+m)^2}{(51m^2+3m+2)} \left(\frac{E}{p}\right)^2 \left(\frac{h}{s}\right)^6 - 1}.$$

Tehát a húzó-nyomó feszültség értéke független a helytől és a képlet szerint minden határon túl növekszik, ha

$$\left(\frac{E}{p}\right)^2 \left(\frac{h}{s}\right)^6 \rightarrow \frac{3}{280} \frac{51m^2+3m+2}{(1+m)^2}.$$

Ha előírjuk, hogy a lemez középfelületében keletkező húzó-nyomó feszültség értéke egy adott  $\sigma$  határ alatt maradjon, akkor a lemez méretei és a megengedhető legnagyobb  $p$  hidrosztatikus nyomás között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$(49) \quad \frac{p}{E} \leq \sqrt{\frac{\frac{280}{3} \frac{(m+1)^2}{51m^2+3m+2} \left(\frac{h}{s}\right)^3}{\frac{Em}{m^2-1} \frac{1}{\sigma_1} + 1}},$$

tehát adott  $\frac{h}{s}$  viszony esetén a megengedhető legnagyobb hidrosztatikus nyomás értékét szolgáltató függvény — akárcsak a befogott lemez esetében — harmadfokú parabolával ábrázolható.

A (hosszegységre vonatkoztatott) hajlító-nyomatékok értékeit szolgáltató képletek a (18) és (19) összefüggésekből nyerhetők, amennyiben a  $\psi(s)$  függvénynek a megtámasztásnak, mint kerületi feltételnek, figyelembevételével nyert kifejezését oda behelyettesítjük:

$$(50) \quad M_t = -\frac{3m+1}{16m} p (S^2 - s^2)$$

$$(51) \quad M_r = -\frac{3m+1}{16m} p \left( S^2 - \frac{m+3}{3m+1} s^2 \right).$$

Az ilymódon nyert képletek — a befogott lemeznel tapasztaltakhoz hasonlóan — analógiát mutatnak a köralakú síklemezben fellépő hajlító-nyomatékok kiszámítására szolgáló ismert képletekkel [6], illetve síklemezre alkalmazva az általuk levezetett képletek az ismert formulákba mennek át.

Az (50) és (51) képletekből a hajlítófeszültség értéke a lemez középpontjában és a kerületen a következő:

$$\sigma_{M_t}(0) = \sigma_{M_r}(0) = -\frac{3(3m+1)}{8m} \frac{p}{h^2} S^2$$

$$\sigma_{M_t}(S) = 0$$

$$\sigma_{M_t}(S) = \frac{3}{4} \frac{m-1}{m} \frac{p}{h^2} S^2.$$

## IRODALOM

1. C. B. Biezeno: Über die Bestimmung der »Durchschlagkraft« einer schwach-gekrümmten, kreisförmigen Platte. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechanik, Band 15, H 1/2, 110.
2. L. pl. Handbuch der Physik, Band VI. (Berlin, Verlag von J. Springer, 1928), 60. o.: Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie c. fejezetet.
3. Handbuch der Physik, Band VI. 210. o.
4. L. pl. Handbuch der Physik, Band VI. 214. o.
5. L. Handbuch der Physik, Band VI. 214. o.
6. L. Handbuch der Physik, Band VI. 214. o.

## О ДЕФОРМАЦИЯХ КРУГЛЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК С МАЛОЙ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНОЙ

В. ЛОВАШ—НАДЬ

### Р е з ю м е

Автор ставит себе целью исследование деформации и распределения напряжения происходящего из действия перпендикулярного на поверхность равномерно распределенной силы постоянной величины (гидростатического давления) круглых тонких пластинок с малой (положительной) постоянной кривизной, обращая внимание тоже на вытяжку средней поверхности пластинки.

Предполагая пластинку охватываемой на окружности или подпираемой и закрепленной, можно ограничиться деформацией меридианного сечения пластинки, которая обладает формой поверхности вращения и в нагруженном состоянии, из-за симметричности нагрузочных и краевых условий. Пренебрегая вытяжкой, перпендикулярной на пластинку, дальше предполагая, что

а) средняя поверхность и поверхности, параллельные к тому в ненагруженном состоянии, создают совокупность параллельных поверхностей и после деформации;

б) в недеформированном состоянии пластинки, прямые, которые в недеформированном состоянии пластинки идут через центр шара, переходят в нормали вышеуказанных параллельных поверхностей в течении деформации — нагиб любого пункта пластинки доставляется в случае схватываемой окружности формулой (36), а в случае подпираемой и закрепленной окружности формулой (47), где  $S$  длина части меридианной кривой средней поверхности, протягивающейся от центра до окружности. Нормальные напряжения тождественны в любом пункте средней поверхности, как видимо из формул (39) и (48).

## SUR LA DEFORMATION DES PLAQUES MINCES DE FORME CIRCULAIRE ET D'UNE PETITE COURBURE CONSTANTE

V. LOVASS—NAGY

### R é s u m é

Le but de ce travail est l'investigation de la déformation et de la distribution des tensions qui se produisent sous l'effet d'une force de grandeur constante, perpendiculaire à la surface et distribuée d'une manière uniforme (pression hydrostatique) des plaques minces de forme circulaire et d'une petite courbure constante (positive), en tenant compte aussi de la dilatation de la surface moyenne de la plaque.

En supposant que la plaque est encastrée ou supportée et fixée sur la périphérie, on peut, vu la symétrie de la charge et des conditions périphériques, se borner à la déformation d'une section méridionale de la plaque qui, étant chargée ne cesse pas d'avoir la forme d'une surface de rotation. En négligeant la dilatation dans la direction perpendiculaire à la plaque et en supposant en outre que, d'une part la surface moyenne et les surfaces qui, dans l'état non-chargé, sont parallèles à cette dernière, forment une famille des surfaces parallèles, aussi après la déformation, et, d'autre part, que les lignes droites passant par le centre de la sphère dans l'état non déformé passent après la déformation dans les normales des surfaces parallèles mentionnées plus haut, la déflection d'un point arbitraire de la plaque est fournie au cas d'une périphérie encastrée, par la formule (36) et en cas d'une périphérie supportée et fixée, par la formule (47) dans lesquelles  $S$  signifie la longueur de la partie s'étendant du centre jusqu'à la périphérie de la courbe du méridien de la surface moyenne.

Les tensions normales sont constantes dans les points de la surface moyenne, comme on le voit des formules (29) et (48).

# PLASZTIKUS ÉS ÖSSZETETT FESZÜLTSEGI ÁLLAPOTOK VIZSGÁLATA VASTAGFALÚ CSÖVEKBEN\*

LOVASS-NAGY VIKTOR

## ÖSSZEFOGLALÁS

Szerző jelen dolgozatában nagy hidrosztatikus nyomás által terhelt vastagfalú csövekben kialakuló plastikus és összetett (részben plastikus, részben elasztikus) feszültségi állapotok matematikai vizsg. latával foglalkozik. A folyási határt meghaladó igénybevételek esetén keletkező  $\sigma_r^*$  és  $\sigma_t^*$  feszültségek meghatározására a koaxiális körhengerek által határolt (és végtelen hosszúnak tekintett) testnek tengelyszimmetrikus terhelés esetén fennálló ismert egyensúlyi egyenletén kívül a Saint Venant-Tresca, valamint a Mises-Hencky féle plasticitási elmélet kompatibilitási feltételeit használja fel.

A plastikus feszültségi állapotot leíró függvényeknek minkét plasticitási elméletnek megfelelő meghatározása után szerző megállapítja az összetett (plastikus és elasztikus) igénybevétel esetén a plastikus és elasztikus részeket elválasztó körhenger sugarát.

(Jelen dolgozat egy részletét képezi szerző 1948-ban a Ganz Villamossági Gyár megbízása alapján Egerváry akadémikus munkatársaként végzett számításainak.)

A műszaki gyakorlatban előfordul szerkezeti anyagoknak olyan igénybevétele, hogy bennük a rugalmassági határt meghaladó feszültségek ébrednek. Az ily módon igénybe vett testek (gépalkatrészek, centrifugális tömegezők által igénybe vett rotorok vasteste, felületi normálfeszültségek által terhelt vastagfalú csövek stb.) egy részében tehát az anyag viselkedését már nem kísérhetjük figyelemmel a Hooke-féle törvény érvényességét feltételező képletek segítségével, hanem külön vizsgálat tárgyává kell tennünk, milyen összefüggésekkel írhatjuk le a testeknek a rugalmassági határon túl igénybe vett részében kialakult feszültség-eloszlásokat.

E vizsgálatok elvégzését a következő gyakorlati megfontolás teszi indokolttá: Ha el akarjuk dönteni, hogy vajon egy gépalkatrész vagy vastagfalú cső, amelynek egy részében a rugalmassági határt meghaladó feszültségek ébrednek, megfelelő biztonsággal bír-e a műszaki alkalmazás szempontjából, meg kell állapítanunk, hogy az illető testnek a rugalmassági határon túl igénybe vett részében vajon plastikus egyensúlyi állapot jön-e létre, és hogy a plastikusan igénybe vett rész és az elasztikusan igénybe vett rész egymáshoz viszonyított aránya mekkora. Ez utóbbi arányból ugyanis következtethetünk arra, hogy mennyiben várható az illető alkatrésztől megkívánt stabilitás elérése.

\* Jelen dolgozat a Ganz Villamossági Gyár megbízása alapján 1948-ban végzett számításokkal kapcsolatos matematikai vizsgálatok egy részletét képezi.



A fentiek előrebocsátása után a következőképpen körvonalazhatjuk azokat a feladatokat, amelyek megoldása e dolgozat tárgyát képezi:

Meg fogjuk kísérni, hogy a szilárdságtan által rendelkezésünkre bocsátott elméletek segítségével olyan egyenleteket konstruáljunk, amelyek által leírhatók felületi normálfeszültségek által igénybe vett vastagfalú csövekben létrejövő plasztikus feszültségi állapotok. Továbbá meg fogjuk kísérni olyan számítási eljárás kidolgozását, amely alkalmazásával megállapíthatjuk a plasztikusan és elasztikusan igénybe vett részek egymáshoz viszonyított arányát.

Ismeretes, hogy koaxiális körhengerek által határolt (és végtelen hosszúnak tekintett) testekben tengelyszimmetrikus igénybevétel esetén keletkező  $\sigma_r$  radiális és  $\sigma_t$  tangenciális húzó-nyomó feszültségek a

$$(1) \quad \frac{d}{dr} (r\sigma_r) - \sigma_t = P_r \cdot r$$

differenciál egyenletben foglalt egyensúlyi feltételnek [1] tesznek eleget, ahol  $P_r$  az egységre vonatkoztatott tömegeerőt jelenti.

Az ismeretlen  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  feszültségek meghatározásához szükséges további összefüggést az anyag rugalmas vagy plasztikus viselkedésére vonatkozó feltevéseinkből kell származtatni.

Rugalmas alakváltozás esetén a  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  feszültségek közötti további összefüggést a klasszikus rugalmasságtanban mindenütt alapul vett Hooke-féle törvény szolgáltatja, amennyiben megadja a  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  feszültségek és az  $u(r)$  radiális elmozdulás, valamint annak deriváltja,  $\frac{du}{dr}$  közötti összefüggéseket:

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{m + \frac{1}{m}} \left( \frac{u}{r} + m \frac{du}{dr} \right) \\ \sigma_t &= \frac{E}{m - \frac{1}{m}} \left( \frac{du}{dr} + m \frac{u}{r} \right) \end{aligned} \right\}$$

A  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  ezen kifejezéseit az (1) differenciálegyenletbe helyettesítve, az  $u$  radiális elmozdulásokat meghatározó másodrendű differenciálegyenlethez jutunk:

$$(3) \quad \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) - \frac{u}{r} = \frac{m - \frac{1}{m}}{mE} P_r r$$

A (3) differenciálegyenletből nyert  $u(r)$  függvény ismeretében  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  meghatározhatók a (2) egyenletek segítségével.

Plasztikus alakváltozás esetén nem szükséges az  $u$  radiális elmozdulás segítségével fejezni ki a  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  feszültségek összefüggését, hanem az anyag plasztikus viselkedését egy, maguk a  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  feszültségek között fennálló  $F(\sigma_r, \sigma_t)$  plaszticitási függvénnyel jellemezhetjük a következőképpen [2]: Az anyagnak abban a részében, melyben az elasztikus feszültségek behelyettesítésével nyert  $F(\sigma_r, \sigma_t)$  függvényérték egy, az anyag minőségétől függő  $k$  állandó alatt marad, az anyag elasztikusan viselkedik és a feszültségek a fenti (3) differen-



ciálegyenlet alapján adódnak. Az anyagnak azon részében pedig, amelyben az elasztikus feszültségekkel számított  $F(\sigma_r, \sigma_t)$  függvényérték a  $k$  állandót elérné vagy túlhaladná, az anyag viselkedése plasztikussá válik, ami matematikailag azáltal van jellemezve, hogy a plasztikusan igénybevett rész mindig egyik pontjában

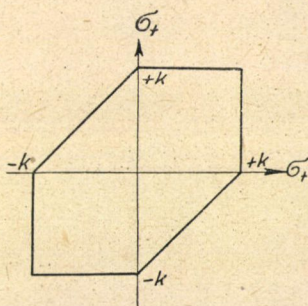
$$F(\sigma_r, \sigma_t) = k$$

Az anyag plasztikus viselkedését meghatározó  $F(\sigma_r, \sigma_t)$  függvény alakjára nézve több feltevés szerepel az irodalomban. Ezeknek szemléltetése és összehasonlítása érdekében célszerű a  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  feszültségeket mint derékszögű koordinátákat ábrázolni. Ekkor az  $F(\sigma_r, \sigma_t) = k$  egyenlet a  $\sigma_r, \sigma_t$  síkban zárt görbét jelent, és az anyag összes lehetséges elasztikus feszültségi állapotai a görbén belül fekvő pontok által, a plasztikus állapotok pedig a görbén és azon kívül fekvő pontok által vannak szemléltetve. Ha az  $F(\sigma_r, \sigma_t) = k$  összefüggés alapján  $\sigma_t$ -t az (1) differenciálegyenletből elimináljuk, akkor a plasztikus  $\sigma_r$  meghatározására elsőrendű differenciálegyenletet nyerünk, melynek általános megoldása tehát csupán egy független állandót tartalmaz.

A Saint Venant—Tresca-féle plaszticitási elmélet szerint a maximális csúsztató (nyíró) feszültségnek kell a  $k$  határ alatt maradnia; miután a vizsgálandó feszültségi állapotban a főfeszültségek:

$\sigma_r, \sigma_t$  és 0, tehát a maximális csúsztató-feszültség a

$|\sigma_r - \sigma_t|$ ,  $|\sigma_r|$  és  $|\sigma_t|$  mennyiségek legnagyobbika. Eszerint a Saint Venant—Tresca-féle elméletnek megfelelő görbe, mely az elasztikus tartományt a plasztikustól elválasztja, az 1. ábrán látható hatszög.



1. ábra

Mint látni fogjuk, a Saint Venant—Tresca-féle elmélet számítástechnikailag könnyebben kezelhető, hátrányára írható viszont, hogy benne a középső főfeszültség semmi szerepet sem játszik.

A Mises—Hencky-féle elmélet szerint a *rugalmas alak-változási munkát* jellemző

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2,$$

jelen esetben tehát a

$$(\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - 0)^2 + (\sigma_r - 0)^2 = 2(\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2)$$

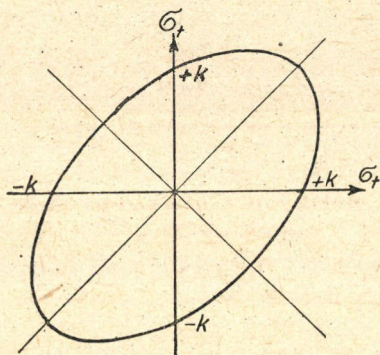
kifejezésnek kell egy állandó határ alatt maradnia. A plasztikus határt, az elasztikustól a plasztikus tartományt elválasztó határgörbét tehát a jelen



esetben egy olyan ellipszis jelenti, melynek nagytengelye a  $+\sigma_r$  tengellyel  $45^\circ$ -os szöget zár be és tengelyeinek viszonya :

$$\frac{\text{kistengely}}{\text{nagytengely}} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Mint látni fogjuk, a Mises—Hencky-féle elmélet alkalmazása aránylag egyszerű esetekben is jelentékeny számítástechnikai nehézségekkel jár és ha figyelembe vesszük, hogy a Mises—Hencky-féle ellipszist a Saint Venant—Tresca-féle hatszög (mint az előbbinek húrsokszöge) jól megközelíti, akkor megállapíthatjuk, hogy a könnyebb számítást igénylő Saint Venant—Tresca-féle feltevésből nyert eredmények többnyire kielégítőnek minősíthetők.



2. ábra

Ezzel szemben már ezen a helyen rá kívánunk mutatni arra a körülményre, hogy a Mises—Hencky-féle feltevés elméletileg jobban megalapozott, mint a Saint Venant—Tresca-féle elmélet, amely körülmény már az elméletek leg-egyszerűbb alkalmazása során nyomban kitűnik.

### Elasztikus feszültségeloszlás felületi normálfeszültségek által igénybevett vastagfalú csövekben

Alkalmazzuk az (1) egyenletben található összefüggést egy olyan végtelen hosszúnak tekintett és két koaxiális körhenger által határolt testre, amelyet csak felületi normál (húzó-nyomó) feszültségek terhelnek. Ebben az esetben nem szükséges az (1) egyenlet átalakításából nyert (3) másodrendű differenciálegyenletből meghatároznunk a  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  függvényeket, hanem a következő egyszerűbb eljárást alkalmazhatjuk :

Tekintve, hogy jelen esetben az egységnyi térfogatra ható tömegerő :  $P_r = 0$ , tehát :

$$\frac{d}{dr} (r\sigma_r) - \sigma_t = 0,$$



ami továbbá így írható :

$$(4) \quad \frac{d\sigma_r}{d \ln r} + \sigma_r - \sigma_t = 0.$$

Ha viszont a henger anyaga a Hooke-féle törvény szerint viselkedik, akkor a  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  között az alábbi kompatibilitási egyenlet írható fel :

$$(5) \quad r \frac{d}{dr} (m\sigma_t - \sigma_r) = (m+1) (\sigma_r - \sigma_t).$$

Ebből :

$$\sigma_r - \sigma_t = r \frac{d}{dr} \frac{m\sigma_t - \sigma_r}{m+1}.$$

Ha a  $(\sigma_r - \sigma_t)$ -re ily módon nyert kifejezést a (4) egyenletbe beírjuk, nyerjük, hogy :

$$\frac{d\sigma_r}{d \ln r} + r \frac{d}{dr} \frac{m\sigma_t - \sigma_r}{m+1} = 0,$$

azaz :

$$r \frac{d}{dr} \frac{m\sigma_t - \sigma_r + (m+1)\sigma_r}{m+1} = 0,$$

tehát :

$$\frac{m}{m+1} d(\sigma_r + \sigma_t) = 0.$$

Ebből :

$$\sigma_r + \sigma_t = C.$$

Ebből  $\sigma_t$ -t kifejezve :

$$\sigma_t = C - \sigma_r.$$

A  $\sigma_t$  így nyert kifejezését a (4) egyenletbe helyettesítve,  $\sigma_r$ -re a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenletet nyerjük :

$$\frac{d\sigma_r}{d \ln r} + 2\sigma_r = C.$$

A fentiek alapján arra az eredményre jutunk, hogy az elasztikusan igénybevett vastagfalú csőben a  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  feszültségek eloszlását a következő egyenletek határozzák meg :

$$(6') \quad \sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2}$$

$$6'') \quad \sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2}.$$

Az ily módon nyert függvények két önkényes állandót tartalmaznak, nevezetesen:  $C_1$  és  $C_2$  állandókat; tehát a  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  függvények általános, megoldásait szolgáltatják. Az állandók meghatározása a henger belső és külső palástjára vonatkozó feszültségi feltételek alapján történik.

A  $\sigma_r = \sigma_r(r)$  és  $\sigma_t = \sigma_t(r)$  feszültségeloszlásokat ábrázoló görbéket illetőleg már a (6) egyenletek alapján megállapíthatjuk a következőket: a két feszültség összege állandó ( $\sigma_r + \sigma_t = 2C_1$ ) és minthogy az  $r$  minden határon túl való növekedése esetén mindkét feszültségi függvény értékei ugyanazon értékhez konvergálnak: (továbbá mivel  $|\sigma_r - \sigma_t|$  monoton csökken az  $r$  növekedésével)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_t = C_1$$

tehát a  $\sigma_r(r)$  és a  $\sigma_t(r)$  függvényeket ábrázoló két görbe egymást nem metszi. Ezt a tulajdonságát az elasztikus feszültségeloszlásnak a későbbiek során fel fogjuk használni a plasztikus és elasztikus állapotokat elválasztó hengerfelület sugarának meghatározásánál.

Mint láttuk, a (6) egyenletek két tetszésszerint megválasztható állandót ( $C_1$  és  $C_2$ ) tartalmaznak, tehát a  $\sigma_r(r)$  és  $\sigma_t(r)$  függvények értékei közül *kettőt* tetszés szerint előírhatunk és ezáltal a két függvényt már egyértelműen meghatároztuk.

Előírhatjuk pl. a  $\sigma_r(r)$  függvény értékeit a belső hengerpaláston és a külső hengerpaláston:

A belső hengerpaláston ( $r = r_0$ ):  $\sigma_r(r_0) = \sigma_{r_0}$

A külső hengerpaláston ( $r = r_1$ ):  $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$

Ebből a  $C_1$  és  $C_2$  állandók kiszámíthatók és a feszültségek számára a következő képleteket nyerjük:

$$(7') \quad \sigma_r = \frac{\sigma_{r_1} r_1^2 - \sigma_{r_0} r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} - \frac{\sigma_{r_1} - \sigma_{r_0}}{r_1^2 - r_0^2} \frac{r_1^2 \cdot r_0^2}{r^2}$$

$$(7'') \quad \sigma_t = \frac{\sigma_{r_1} r_1^2 - \sigma_{r_0} r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{\sigma_{r_1} - \sigma_{r_0}}{r_1^2 - r_0^2} \frac{r_1^2 \cdot r_0^2}{r^2}.$$

Tekintve, hogy  $r$  negatív értéket nem vehet fel és  $r_1 > r_0$ , tehát a  $\sigma_r(r_0) = \sigma_{r_0}$  és  $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$  értékek előírásával a feszültségi függvényeknek kétféle elhelyezést adhatunk egymáshoz viszonyítva:

$$a) \quad \sigma_r > \sigma_t \text{ (minden } r \text{ értékre), ha } \sigma_{r_0} > \sigma_{r_1} \quad \begin{cases} \sigma_{r_0} \text{ húzó vagy nulla} \\ \sigma_{r_1} \text{ nyomó} \end{cases}$$

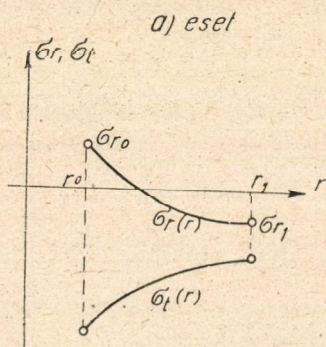
vagy:

$$b) \quad \sigma_r < \sigma_t \text{ (minden } r \text{ értékre), ha } \sigma_{r_0} < \sigma_{r_1} \quad \begin{cases} \sigma_{r_0} \text{ nyomó vagy nulla} \\ \sigma_{r_1} \text{ húzó} \end{cases}$$

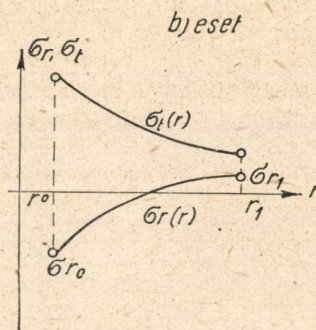
Ugyanis:

$$\sigma_r - \sigma_t = -2 \frac{\sigma_{r_1} - \sigma_{r_0}}{r_1^2 - r_0^2} \frac{r_0^2 \cdot r_1^2}{r^2}.$$

Az elasztikus feszültségeloszlás tehát kétféleképpen alakulhat:



3. ábra



4. ábra

### Nyomott csövekben kialakuló plasztikus feszültségi állapot vizsgálata a St. Venant—Tresca-féle elmélet alapján

A bevezetésben ismertettük már *St. Venant*-nak *Tresca* kísérletei alapján kidolgozott elméletét, mely szerint a szilárd testek képlékeny (plasztikus) állapotában a maximális csúsztatófeszültség az igénybe vett anyag minden pontjában ugyanakkora, állandó értékkel bír.

Tekintettel arra, hogy vizsgálatainkat elméletileg végtelen hosszúnak tekintett, koncentrikus körhengerek által határolt 3 dimenziós testekben axiális szimmetriát mutató terhelés alatt kialakuló feszültségi állapotokra végeztük, a vizsgált test minden egyes pontjában három főfeszültség különböztetendő meg:

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = \sigma_r, \sigma_3 = \sigma_z \equiv 0.$$

Így a fő csúsztatófeszültségekre a

$$\sigma_t - \sigma_r; \sigma_t - 0 \text{ és } \sigma_r - 0$$

értékeket nyerjük és a St. Venant-féle törvény oda módosul, hogy a

$$|\sigma_t - \sigma_r|; |\sigma_t|; |\sigma_r|$$

értékek legnagyobbika az egész plasztikusan igénybe vett anyagban állandó értékkel bír. Ez a matematika nyelvére lefordítva azt jelenti, hogy a plasztikusan igénybe vett résznek egy tetszés szerinti pontjában fennáll a következő 3 reláció valamelyike:

$$(I) \quad |\sigma_t^* - \sigma_r^*| \leq k$$

$$(II) \quad |\sigma_t^*| \leq k$$

$$(III) \quad |\sigma_r^*| \leq k.$$

(A továbbiakban — tévedések elkerülése céljából — a plasztikus feszültségeket csillaggal fogjuk megkülönböztetni az elasztikus feszültségektől.)

Tegyük fel, hogy a testre ható külső terhelés, amelynek hatására a vizsgált feszültségi állapot kialakul, olyan, hogy a plasztikus rész minden pontjában



az (I) összefüggés áll fenn. Keressük ebben az esetben a plasztikus részben kialakuló feszültségeloszlást meghatározó  $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r)$  és  $\sigma_t^* = \sigma_t^*(r)$  függvényeket.

Plasztikus egyensúlyi állapot esetén az (I) összefüggés alapján írhatjuk, hogy :

$$(I') \quad |\sigma_t^* - \sigma_r^*| = k ; \quad \sigma_t^* - \sigma_r^* = \pm k$$

és pedig

$$\sigma_t^* - \sigma_r^* = +k, \text{ ha } \sigma_t^* > \sigma_r^*$$

$$\sigma_t^* - \sigma_r^* = -k, \text{ ha } \sigma_t^* < \sigma_r^*.$$

A (I') feltételből és az  $\frac{d}{dr}(r\sigma_r^*) - \sigma_t^* = 0$  dinamikai egyenletből nyerjük, hogy :

$$\frac{d}{d \ln r} \sigma_r^* = \pm k$$

$$(8') \quad \sigma_r^* = \pm k \ln \frac{r}{c}$$

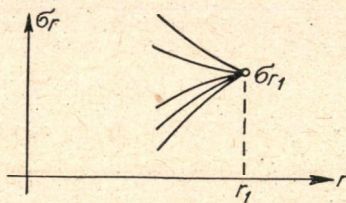
$$(8'') \quad \sigma_t^* = \sigma_r^* \pm k = \pm k \left( 1 + \ln \frac{r}{c} \right).$$

Keressük most annak a körhengernek az  $r = x$  sugarának az értékét, amely hengerfelület — összetett igénybevétel esetén — a plasztikus és elasztikus feszültségi állapotokat elválasztó határfelület. Tekintve, hogy birtokában vagyunk az elasztikus és az (I') feltételnek eleget tevő plasztikus feszültségeloszlásokat leíró függvényeknek, az  $x$  átmeneti sugár meghatározását a következőképpen végezhetjük :

(Megjegyezzük, hogy az itt megállapított irányelvek általános jelentőséggel bírnak az  $x$  átmeneti sugár megállapítását illetőleg minden olyan esetben, amikor összetett feszültségi állapottal van dolgunk és ismeretesek az elasztikus és plasztikus feszültségeloszlásokat leíró függvények.)

Tetszés szerint előírhatjuk a  $\sigma_r$  elasztikus feszültség értékét az  $r_1$  külső sugáron, ebből kiadódik a  $C_1$  konstans. [(6') egyenlet.] Ám a  $C_1$  konstans meghatározó összefüggés tartalmazni fogja a  $C_2$  konstans is. A  $\sigma_t$  tangenciális feszültség értékét ugyanis már *fizikailag* nem írhatjuk elő tetszés szerint, ha valahol a  $\sigma_r$  radiális feszültség értékét már előírtuk.

Tehát a  $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$  érték előírása után is végtelen sok olyan  $\sigma_r(r)$  függvény van, amely a  $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$  egyenletet kielégíti. (L. 5. ábra.)



5. ábra

Tetszés szerint előírhatjuk a plasztikus feszültség értékét az  $r = r_0$  belső sugáron ; ezáltal kiszámíthatóvá válik a  $C_2$  konstans. Tehát, ha a plasztikus rész valamely pontjában a  $\sigma_r^*$  vagy  $\sigma_t^*$  feszültség értékét előírtuk, ezáltal már előírtuk a másik feszültségi függvény értékét is, tehát  $\sigma_r^*(r)$  és  $\sigma_t^*(r)$  értékét a plasztikus rész valamennyi helyén, így már meg vannak határozva az  $r = x$  átmeneti sugárnál felvett  $\sigma_r^*(x)$  és  $\sigma_t^*(x)$  értékek is.

Most már az a feladatunk, hogy az ismert  $\sigma_r^*(r)$  és  $\sigma_t^*(r)$  függvények mellé kiválasszuk azokat a  $\sigma_r(r)$  és  $\sigma_t(r)$  elasztikus feszültségi függvényeket, amelyek az  $r = x$  helyen kielégítik a

$$\sigma_r(x) = \sigma_r^*(x)$$

és

$$\sigma_t(x) = \sigma_t^*(x)$$

egyenleteket ; emellett a  $\sigma_r(r)$  elasztikus feszültségi függvénynek az előbbieknél alapján az  $r = r_1$  külső sugáron a már rögzített  $\sigma_{r_1}$  értékkel kell bírnia.

Tehát a feladat végül oda vezet, hogy két egyenletet fogunk nyerni, amelyek mindegyike két ismeretlent tartalmaz :  $x$ -et és  $C_2$ -öt. Ha e két egyenlet valamelyikéből  $C_2$  értékét  $x$ -szel kifejezzük, és az így nyert kifejezést a másik egyenletbe helyettesítjük, akkor egyetlen egyenletet nyerünk az  $x$  átmeneti sugár meghatározására.

Ha előírjuk, hogy :  $\sigma_r^*(r_0) = \sigma_{r_0}^*$  akkor a (8) alapján kapjuk, hogy a plasztikus részben :

$$\sigma_{r_0}^* = \pm k \ln \frac{r_0}{C}$$

$$\frac{r_0}{C} = e^{\pm \frac{\sigma_{r_0}^*}{k}}$$

(9)

$$C = r_0 e^{\mp \frac{\sigma_{r_0}^*}{k}}$$

Ebből nyerjük, hogy :

$$(10') \quad \sigma_r^*(r) = \pm k \ln \frac{r}{r_0 e^{\pm \frac{\sigma_{r_0}^*}{k}}} = \pm \sigma_{r_0}^* \pm k \ln \frac{r}{r_0}$$

$$(10'') \quad \sigma_t^*(r) = \sigma_{r_0}^* \pm k \left( 1 + \ln \frac{r}{r_0} \right).$$

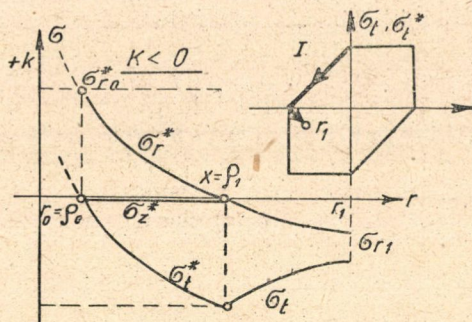
Nézzük most, hogy a  $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$  érték előírása esetén hogyan fog alakulni a feszültségeloszlás aszerint, hogy

$$k > 0 \quad \text{vagy} \quad k < 0.$$

Ezt a két lehetőséget a 6. és a 7. ábrák szemléltetik. Meg kell jegyeznünk, hogy az (I') feltételt kielégítő plasztikus feszültségi állapot csak a

$$\varrho_0 \leq r \leq \varrho_1$$



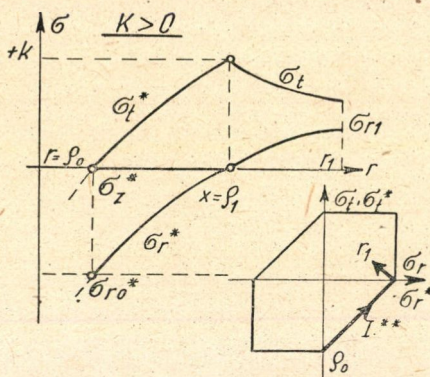


6. ábra

intervallumban létezik, ahol a  $\varrho_0$  és  $\varrho_1$  értékeket a következő egyenlőségek állapítják meg:

$$\sigma_t^*(\varrho_0) = 0 \quad \text{és} \quad \sigma_r^*(\varrho_1) = 0.$$

A  $\varrho_0 \leq r \leq \varrho_1$  intervallumon kívül már nem a  $\sigma_t^* - \sigma_r^*$  lesz a maximális és zstatófeszültség, azaz a vizsgálat alapját képező (I') összefüggés érvényét veszti.



7. ábra

Mindkét ábra azt a határesetet tünteti fel, amikor  $r_0 = \varrho_0$  és  $x = \varrho_1$ . Az ábrákba berajzoltuk a  $\sigma_z^* \equiv 0$  feszültségi függvényt is, így szemléletesen demonstrálható, hogy a vázolt plasztikus feszültségi állapot csak a  $\varrho_0 \leq r \leq \varrho_1$  intervallumban létezik. Mindkét ábra mellé felrajzoltuk a St. Venant-féle hatszöget és ábrázoltuk, hogy ha az  $r$  sugár értéke  $\varrho_0$ -tól  $r_1$ -ig nő, hogyan követhetjük a plasztikus feszültségek változását a St. Venant-féle hatszögben.

A vázolt két lehetőség közül azonban a  $k < 0$  eset csak elméletben létezik, mert belülről húzott és kívülről nyomott csövet fizikailag nem tudunk megvalósítani. A továbbiakban tehát csak a  $k > 0$  eset vizsgálatára szorítkozunk. Tegyük fel, hogy (ez a  $\sigma_{r1}$  érték megfelelő előírása által elérhető) azon a hengerpaláston, ahol a  $|\sigma_t^* - \sigma_r^*| \leq k$  feltétel megszűnik, (vagyis



ahol  $\sigma_r^* = 0$  és  $\sigma_t^* = +k$ ) a plasztikus feszültségi állapot tüstént átmegy az elasztikus feszültségi állapotba. (Mint később látni fogjuk, ez nem feltétlenül szükséges, mert a  $\sigma_{r_1}$  más előírásával elérhetjük, hogy az (I) összefüggés érvényességének megszűntével az (I') egyenlőséget kielégítő plasztikus feszültségi állapot nem megy át közvetlenül az elasztikus feszültségi állapotba, hanem előbb a (II) összefüggés által előírt feszültségi állapot lép fel növekvő  $r$  sugár mentén és ez a második fajta (később részletesen tárgyalandó) plasztikus feszültségi állapot megy át az  $r = x$  sugárnál az elasztikus feszültségi állapotba.)

Nézzük most, hogy a  $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r)$  és  $\sigma_t^* = \sigma_t^*(r)$  összefüggésekből kiolvasható egyes feszültségi állapotok hogyan jelentkeznek a St. Venant-féle hatszögben? Tekintve, hogy az elasztikus állapotban  $\frac{\sigma_r + \sigma_t}{2} = \text{constans}$ ,

tehát  $r_0$ -tól a növekvő  $r$  sugár irányában haladva  $r$ -ig, a  $\sigma_r^*$  és  $\sigma_t^*$  függvények minden egyes értékének megfelel a St. Venant-hatszög I\* vagy I\*\* oldalának egy pontja, egészen addig, míg az  $r$  sugár el nem éri az  $r = x$  értéket, ahol u. i. már  $\sigma_r^*$  zérussá válik. Ettől kezdve az (innenről!) elasztikus feszültségi állapot minden egyes  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  értékét egy, a pozitív  $\sigma_r$  tengellyel  $135^\circ$ -os szöget bezáró egyenesnek a pontjai jellemzik, egészen az  $r = r_1$  értékig.

Ezek után állapítsuk meg az  $x$  átmeneti sugár kiszámítására alkalmas eljárást, arra az esetre, ha — mint előbb is jeleztük — a  $\sigma_{r_1}$  értéke úgy van rögzítve, hogy  $\varrho_0 < x \leq \varrho_1$ . A levezetésben már csak a  $k > 0$  esetre szorítkozva írhatjuk a következőket:

Ha előírjuk, hogy  $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$  legyen, akkor:

$$\sigma_{r_1} = C_1 - \frac{C_2}{r_1^2}$$

$$\sigma_{r_1} + \frac{C_2}{r_1^2} = C_1.$$

Tehát:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r_1} - C_2 \left( -\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r^2} \right) \\ (11') \quad \sigma_r &= \sigma_{r_1} - C_2 \frac{r_1^2 - r^2}{r_1^2 \cdot r^2} \\ (11'') \quad \sigma_t &= \sigma_{r_1} + C_2 \frac{r_1^2 + r^2}{r_1^2 \cdot r^2}. \end{aligned}$$

Az  $x$  átmeneti sugáron:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r_1} - C_2 \frac{r_1^2 - x^2}{r_1^2 \cdot x^2} = \sigma_{r_0}^* + k \ln \frac{x}{r_0} \\ \sigma_t &= \sigma_{r_1} + C_2 \frac{r_1^2 + x^2}{r_1^2 \cdot x^2} = \sigma_{r_0}^* + k \left( 1 + \ln \frac{x}{r_0} \right). \end{aligned}$$

Az első egyenletből  $C_2$ -öt kifejezve:

$$C_2 = - \left( \sigma_{r_0}^* - \sigma_{r_1} + k \ln \frac{x}{r_0} \right) \frac{r_1^2 x^2}{r_1^2 - x^2}.$$



A  $C_2$ -re ilymódon nyert értéket a második egyenletbe beírva, nyerjük, hogy

$$\sigma_{r_0}^* + k \left( 1 + \ln \frac{x}{r_0} \right) = \sigma_{r_1} - \left( \sigma_{r_0}^* - \sigma_{r_1} + k \ln \frac{x}{r_0} \right) \frac{r_1^2 \cdot x^2}{r_1^2 - x^2} \cdot \frac{r_1^2 + x^2}{r_1^2 \cdot x^2}.$$

Ezt az egyenletet rendezve a következő egyenlethez jutunk :

$$(12) \quad 2x^2(\sigma_{r_1} - \sigma_{r_0}^*) - kx^2 + kr_1^2 = -2kr_1^2 \ln \frac{x}{r_0}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket :

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{x}{r_1} &= \xi \\ \frac{x}{r_0} &= \frac{r}{r_1} \cdot \frac{x_1}{r_0} = \frac{\xi}{Q} \\ \frac{r_0}{r_1} &= Q \\ \frac{\sigma_{r_1}}{k} &= \kappa \\ \frac{\sigma_{r_0}^*}{k} &= \chi. \end{aligned}$$

Osszuk el  $(kr_1^2)$ -nel a (12) egyenletet és alkalmazzuk a (13) jelöléseket, akkor az átmeneti sugár meghatározására szolgáló egyenletet dimenziótlanná tettük, és az átmeneti sugár helyett a  $\xi = \frac{x}{r_1}$  viszonyt fogjuk meghatározni.

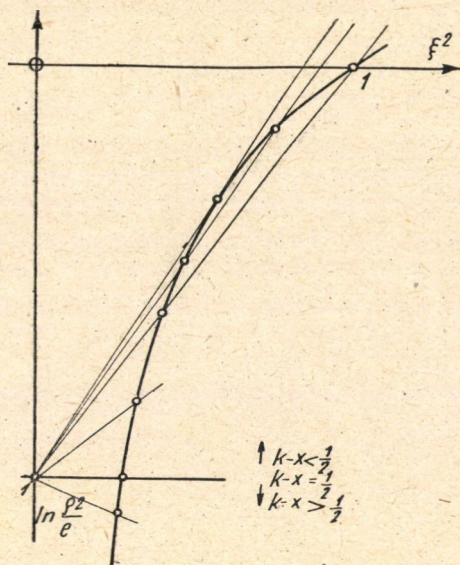
Az egyenlet átrendezve :

$$(14) \quad \ln \xi^2 = \left[ 1 - 2(\kappa - \chi) \right] \xi^2 + \ln \frac{Q^2}{e}.$$

Az ily módon nyert (14) egyenlet lehetővé teszi, hogy az  $x$  átmeneti sugár kényelmes megállapítására a következő nomogramot szerkesszük : (8. ábra.)

Egy derékszögű koordinátarendszer vízszintes tengelyére a  $\xi^2$ -et visszük fel, és akkor ebben a koordinátarendszerben a  $\ln \xi^2$  függvényt egyszerű ln-görbe, az  $[1 - 2(\kappa - \chi)] \xi^2 + \ln \frac{Q^2}{e}$  függvényt pedig egyenesek ábrázolják, melyeknek az ordinátatengellyel való metszéspont koordinátája valamennyi egyesnél  $\ln \frac{Q^2}{e}$ -tel egyenlő, az egyenesek iránýtangense pedig más és más, aszerint, hogy mekkora a  $\kappa$  és a  $\chi$ . (Ugyanis  $Q = \frac{r_0}{r_1}$  egy csőre állandó értékkel bír, míg a  $\kappa$  és  $\chi$  viszonyok ugyanannál a csőnél tetszés szerint változtathatók a  $\sigma_{r_1}$ ,  $\sigma_{r_0}^*$  határfeltételek előírásával. A keresett  $\xi^2$  értéket a logaritmusgörbének és annak az egyenesnek a metszéspontjai szolgáltatják, amely egyenes iránýtangense a  $\kappa = \frac{\sigma_{r_1}}{k}$  és  $\chi = \frac{\sigma_{r_0}}{k}$  viszonyok kiszámítása után éppen  $[1 - 2(\kappa - \chi)]$ -vel egyenlő.)





8. ábra

A nomogramm megszerkesztését illetőleg a következőket jegyezzük még meg :

Tekintve, hogy  $\xi = \frac{x}{r_1} \leq 1$  , (mert az  $x$  átmeneti sugár nem lehet nagyobb, mint az  $r$  külső sugár), tehát elég a  $\ln \xi^2$  görbét a  $0 < \xi^2 \leq 1$  szakaszon megrajzolni.

Az egyenesek az ordinátatengelyt mind a  $\ln \frac{\rho^2}{e}$  értéknél metszik, amint már előbb is említettük (ugyanarra a csőre). Mármost ez a  $\ln \frac{\rho^2}{e}$  érték mindig negatív, mert  $\rho = \frac{r_0}{r_1} < 1$  (A cső belső sugara nem lehet nagyobb a külső sugárnál!)

Tekintve, hogy az egyenesek iránytangense  $[1 - 2(\kappa - \chi)]$ -vel egyenlő, tehát ez az érték fogja meghatározni, hogy lesz-e egyáltalában az egyenesnek és a logaritmusgörbének a  $0 < \xi^2 \leq 1$  szakaszon metszéspontja és hogy hány pontban metszi az egyenes a logaritmusgörbét.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a plasztikus részben mindenütt a (II) összefüggés határozza meg a kialakuló feszültségi állapotot, azaz :

$$\sigma_t^* = \pm k (= \pm k_1^2).$$

Ezt a dinamikai egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy :

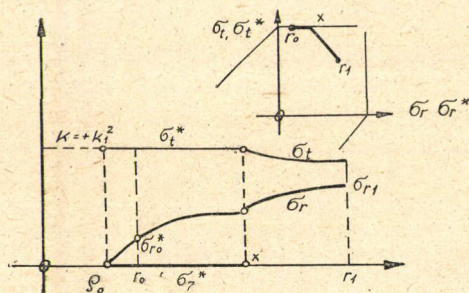
$$\frac{d}{dr} (r\sigma_r^*) = \pm k$$



$$(15) \quad \begin{aligned} r\sigma_r^* &= \pm kr + C \\ \sigma_r^* &= \pm k + \frac{C}{r}. \end{aligned}$$

Nézzük most, vajjon milyen határok között létezik a (II) feltételt kielégítő feszültségeloszlás? Ez a feszültségeloszlás csak ott állhat fenn, ahol a  $\sigma_r^*$  értéke zérus és  $\sigma_r^* = +k_1^2$  vagy  $\sigma_r^* = -k_1^2$  közé esik. Tehát a következő két eset lehetséges:

$$(16) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{0 \leq \sigma_r^* \leq \sigma_t^*}{\sigma_t^* = +k_1^2} & [k > 0] \\ & \sigma_r^* = \pm k_1^2 - \frac{C}{r^2} \\ \text{b)} \quad & \frac{\sigma_t^* \leq \sigma_r^* \leq 0}{\sigma_t^* = -k_1^2} \\ (17) \quad & \sigma_r^* = -k_1^2 - \frac{C}{r} & [k < 0]. \end{aligned}$$



9. ábra

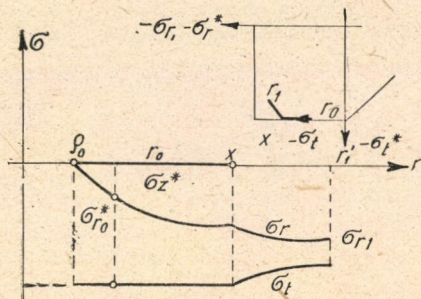
A  $\sigma_t^* = \pm k$  feltételt kielégítő feszültségeloszlás csak olyan  $r$  sugaraknál létezik, amelyek nagyobbak, mint az az  $r = r_0$  érték, ahol  $\sigma_r^* = 0$ . Ha a cső külső rétegében a feszültségeloszlás elasztikus, és előírjuk a  $\sigma_r$  feszültség értékét az  $r = r_1$  külső sugáron, akkor az előzőekben összefoglalt elv alapján most is megállapíthatjuk annak az  $r = x$  átmeneti sugárnak az értékét, ahol a  $\sigma_t^* = \pm k$  feltételt kielégítő plasztikus feszültségi állapot átmegy az elasztikus feszültségi állapotba. A 9. és 10. ábra egy-egy ilyen összetett feszültségeloszlást mutat, egyidejűleg feltüntetve, hogy a  $r_0$  értéktől az  $r_1$ -ig növekvő  $r$  sugár esetén az egyes radiális és tangenciális feszültségértékek hogyan helyezkednek el a St. Venant-féle hatszögben.

A  $\sigma_t^* = \pm k$  feltételt kielégítő plasztikus feszültségek a St. Venant-féle hatszögnek a (II') és (II'') oldalain helyezkednek el, (l. a 11. ábrát), és pedig ha az  $r$  sugár értéke  $r_0$ -tól kezdve nő minden határon túl, akkor azok a pontok, amelyek a St. Venant-féle hatszögben a  $\sigma_t^* = \pm k$  feltételt kielégítő plasztikus radiális és tangenciális feszültségi értékeket jelentik, a  $P'$ -től a  $Q'$ -höz, illetve a  $P''$ -től a  $Q''$ -höz közelednek. Ugyanis, ha  $r$  értéke minden határon túl nő,

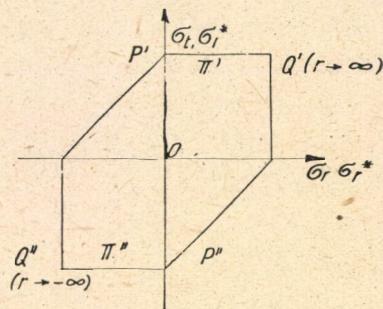


a  $\sigma_r^*$  plasztikus radiális feszültség értéke  $\pm k$ -hoz konvergál. Ha a cső külső rétegében a feszültségeloszlás elasztikus, az  $x$  átmeneti sugártól kezdve a radiális és tangenciális feszültségek értékei a St. Venant-féle hatszög belsejében, egy-egy a pozitív  $\sigma_r^*$  tengellyel  $135^\circ$ -os szöget bezáró egyenesen helyezkednek el. (L. a 9. és 10. ábrákat.)

Vizsgáljuk a továbbiakban a (15) egyenlet által meghatározott plasztikus feszültségeloszlást és keressük, hogy ha a vizsgált vastagfalú cső belső rétegében a (15) egyenlet által leírt plasztikus feszültségeloszlás, a külső részben pedig elasztikus feszültségeloszlás lép fel, adott határfeltételek mellett hogyan számítható ki az  $x$  átmeneti sugár értéke?



10. ábra



11. ábra

Előírva, hogy  $\sigma_r(r_0) = \sigma_{r0}^*$ , kapjuk a következőket :

$$(18) \quad \begin{aligned} \sigma_{r0}^* &= \pm k + \frac{C}{r_0} \\ C &= (\sigma_{r0}^* \mp k) r_0 \\ \sigma_r^* &= \pm k + \frac{r_0}{r} (\sigma_{r0}^* \mp k). \end{aligned}$$

Ha még előírjuk, hogy  $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r1}$ , akkor az  $x$  átmeneti sugár meghatározására a következő két egyenlet írható fel a  $\sigma_r(x) = \sigma_r^*(x)$  és  $\sigma_t(x) = \sigma_t^*(x)$  feltételek alapján :

$$(19') \quad \pm k + \frac{r_0}{x} (\sigma_{r0}^* \mp k) = \sigma_{r1} - C_2 \frac{r_1^2 - x^2}{r_1^2 \cdot x^2}$$

$$(19'') \quad \pm k = \sigma_{r1} + C_2 \frac{r_1^2 + x^2}{r_1^2 \cdot x^2}.$$

A (19'')-ből  $C_2$ -t kifejezve és a (19')-be helyettesítve nyerjük, hogy :

$$\pm k + \frac{r_0}{x} (\sigma_{r0}^* \mp k) = \sigma_{r1} + (\mp k + \sigma_{r1}) \frac{r_1^2 x^2}{r_1^2 + x^2} \frac{r_1^2 - x^2}{r_1^2 x^2}.$$

Rendezés után az egyenlet így alakul :

$$(20) \quad r_0(\sigma_{r0}^* \mp k) x^2 + (\pm 2kr_1^2 - 2\sigma_{r1}r_1^2) x + r_0r_1^2(\sigma_{r0}^* \mp k) = 0.$$

A (20) egyenletet dimenziótlanná tehetjük, ha mindkét oldalát elosztjuk  $kr_1^3$ -nal, és aztán bevezetjük a következő jelöléseket :

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{x}{r_1} &= \xi \\ \frac{r_0}{r_1} &= \varrho \\ \frac{\sigma_{r_1}}{k} &= \kappa \\ \frac{\sigma_{r_0}^*}{k} &= \chi. \end{aligned}$$

Az így módon dimenziótlanná tett egyenlet így írható :

$$(22) \quad (\chi \mp 1) \varrho \xi^2 + 2(\pm 1 - \kappa) \xi + \varrho(\chi \mp 1) = 0.$$

Az így nyert,  $\xi$ -ben vegyes másodfokú egyenlet megoldásai :

$$(23') \quad \begin{aligned} \text{a) } k > 0 \\ (k = +k_1^2) \end{aligned} \quad \xi_{1,2} = -\frac{1 - \kappa}{\varrho(\chi - 1)} \pm \sqrt{\left[ \frac{1 - \kappa}{\varrho(\chi - 1)} \right]^2 - 1}$$

$$(23'') \quad \begin{aligned} \text{b) } k < 0 \\ (k = -k_1^2) \end{aligned} \quad \xi_{1,2} = \frac{1 + \kappa}{\varrho(\chi + 1)} \pm \sqrt{\left[ \frac{1 + \kappa}{\varrho(\chi + 1)} \right]^2 - 1}.$$

Tehát, ha adva vannak a cső méretei ( $r_0$ ,  $r_1$ ) és a határfeltételek ( $\sigma_{r_0}^*$ ,  $\sigma_{r_1}$ ), akkor a (23) képletek segítségével közvetlenül nyerhető a  $\xi = \frac{x}{r_1}$  viszony.

Hátra van még annak az esetnek a vizsgálata, amikor a plasztikus feszültségeloszlás a  $|\sigma_r^*| \leq k$  törvény által van meghatározva. Ez a feltétel kétféleképpen teljesülhet, vagy úgy, hogy :

$$\sigma_r^* \geq \sigma_t^* \geq 0$$

vagy pedig :

$$0 \leq \sigma_t^* \leq \sigma_r^*,$$

Tehát plasztikus radiális feszültségre írhatjuk, hogy :

$$\sigma_r^* = \pm k,$$

amiből következik, hogy :

$$\frac{d}{d \ln r} \sigma_r^* = 0,$$

de akkor :

$$\sigma_r^* - \sigma_t^* = 0$$

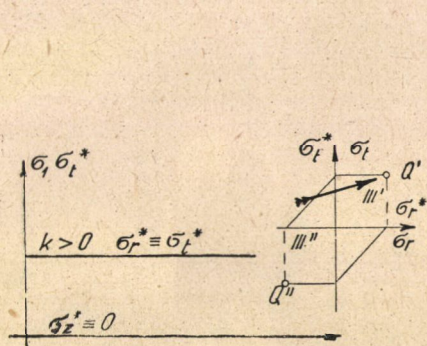
és

$$(24) \quad \sigma_r^* = \sigma_t^* = \pm k.$$

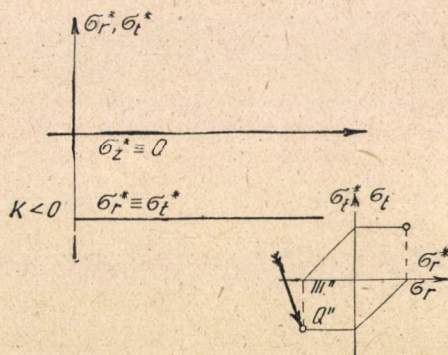


Ez az eset áll elő pl. akkor, ha egy tömör hengerre minden oldalról egyenletes nyomás hat. ( $k < 0$  eset.) Ekkor, amennyiben az igénybevétel oly nagy, hogy bekövetkezik a  $\sigma_r^* = \sigma_t^* = -k$  eset, az illető testben nem jön létre egyensúlyi állapot, hanem az anyag folyni fog. Ha viszont figyelembe vesszük, hogy a  $\sigma_r^* = \pm k$  egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha egyidejűleg:  $\sigma_t^* = \pm k$ , akkor arra a megállapításra jutunk, hogy a St. Venant-féle hatszögnek III' és III'' oldalai tulajdonképpen csak a Q' és a Q'' pontban definiálnak egy plasztikus feszültségi állapotot, amely — ellentétben az I', I'', II', II'' oldalakon fekvő pontok által definiált plasztikus egyensúlyi állapotokkal — nem jelent egyensúlyi állapotot. Tehát megállapítható, hogy a St. Venant-féle hatszög III' és III'' oldalai nem léteznek olyan értelemben, mint a plasztikus és elasztikus feszültségi állapotokat elhatároló egyenesek.

A 12. és 13. ábrák tüntetik fel a  $\sigma_r^* = \sigma_t^* = +k$ , illetve a  $\sigma_r^* = \sigma_t^* = -k$  egyenletet kielégítő feszültségeloszlásokat.



12. ábra



13. ábra

Láttuk tehát, hogy a St. Venant—Tresca feltevést matematikailag kifejező összefüggések milyen plasztikus feszültségeloszlásokra vezetnek, ha azokat a dinamika által szolgáltatott differenciálegyenletbe helyettesítjük. Reámutattunk arra a tényre is, hogy a matematika által szolgáltatott feszültségi függvények közül csak azokat használhatjuk fel plasztikus feszültségi állapotok definiálására, amely plasztikus feszültségi állapotoknak előfeltételei fizikailag is megvalósulhatnak. Összetett (részben plasztikus, részben elasztikus) feszültségi állapot szempontjából nyomott (kívülről vagy belülről) vastagfalú csövekben csak a plasztikus egyensúlyi állapotot létesítő

$$(10') \quad \sigma_r^*(r) = \sigma_{r_0}^* \pm k \ln \frac{r}{r_0}$$

$$(10'') \quad \sigma_t^*(r) = \sigma_{r_0}^* \pm k \left( 1 + \ln \frac{r}{r_0} \right)$$

illetve:

$$(18) \quad \sigma_r(r) = \pm k + \frac{r_0}{r} (\sigma_{r_0}^* \mp k)$$

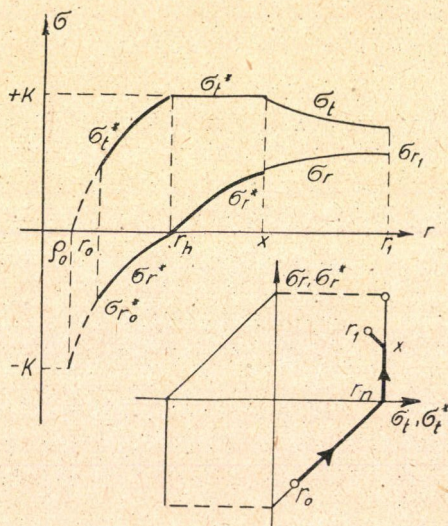
$$(II) \quad \sigma_t^*(r) = \pm k$$

feszültségi függvények jöhettek tekintetbe.



A fenti megfontolások után felvethető a következő kérdés : lehetséges-e vajjon, hogy egy, a belső paláston nyomással, a külső paláston pedig húzással igénybe vett csőben egyidejűleg *háromféle* feszültségi állapot létezzék, azaz a plasztikus résznek egy részében a (10) egyenletek, másik részében pedig a (18, II) egyenletek szerinti feszültségeloszlás lépjen fel?

Eddigi meggondolásaink alapján a következőket állapíthatjuk meg : ha a belső hengerfelületen akkora nyomó-terhelést alkalmazunk, hogy a  $|\sigma_t^* - \sigma_r^*| = k$  egyenletet kielégítő, plasztikus feszültségi állapot jön létre a cső legbelső rétegében, akkor ez a plasztikus feszültségi állapot csak azon a körhengerfelületen belül létezhet, amelynek  $r_h$  sugaránál  $\sigma_r^*(r_h) = 0$  és  $\sigma_t^*(r_h) = +k$  értéket vesz fel. (L. 14. ábra.) Ha mármost a  $\sigma_r$  elasztikus radiális feszültség értékét az  $r_1$  külső sugáron úgy írjuk elő, hogy az  $x$  átmeneti sugár értéke  $r_h$ -nál kisebb, vagy  $r_h$ -val egyenlő, akkor az I. fajta plasztikus feszültségi állapot közvetlenül megy át az elasztikus feszültségi állapotba. Felvethető a kérdés, vajjon mekkora az a  $\sigma_{r_1}$  érték, amelynél  $\sigma_r(r_h) = \sigma_r^*(r_h) = 0$  lesz? Ezt a  $\sigma_{r_1}$  értéket a következő módon nyerhetjük : ha  $r_h$  sugárnál  $\sigma_r(r_h) = 0$  és  $\sigma_t(r_h) = +k$  értékeket írunk elő az elasztikus feszültségeloszlás számára, akkor kiszámíthatjuk a  $C_1$  és  $C_2$  konstansoknak azon értékeit, melyek mellett  $\sigma_r(r)$  és  $\sigma_t(r)$  ennek a követelménynek eleget tesznek. Az így nyert  $\sigma_r = \sigma_r(r)$  függvénynek az  $r = r_1$  helyen felvett  $\sigma_r(r_1)$  értéke lesz az a  $\sigma_{r_1}$  érték, amelynél nagyobb  $\sigma_{r_1}$  előírása esetén az I. plasztikus feszültségi állapot nem megy át közvetlenül az elasztikus feszültségi állapotba, hanem közbeiktatódik egy olyan tartomány, ahol a (18; II) egyenletet kielégítő plasztikus feszültségi állapot áll fenn. Ehhez csatlakozik az  $x$  átmeneti sugáron az elasztikus feszültségi állapot.



14. ábra

A (14) ábrán bemutatunk egy ilyen összetett feszültségeloszlást, ahol tehát a vizsgált vastagfalú cső legbelső rétegében ( $r_0 \leq r \leq r_h$ ) a  $|\sigma_t^* - \sigma_r^*| \leq k$  feltételt kielégítő plasztikus feszültségeloszlás, a középső rétegben a  $|\sigma_t^*| \leq k$



feltételt kielégítő plastikus feszültségeloszlás ( $r_h \leq r \leq x$ ), a külső rétegben pedig, vagyis az  $x \leq r \leq r_1$  intervallumban elasztikus feszültségeloszlás lép fel. A II. plastikus és az elasztikus feszültségi állapotokat elválasztó  $x$  sugár értékét úgy számíthatjuk, mintha egy  $r_h$  belső sugarú vastagfalú csővünk volna, amelyben a II. plastikus és az elasztikus feszültségi állapot lép fel és a határfeltételek :

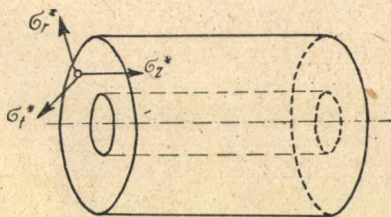
$$\sigma_r^*(r_h) = 0 \quad \text{és} \quad \sigma_r(r_1) = \sigma_{r1}.$$

A 15. ábrában is feltüntettük az egyes feszültségi állapotok ábrázolását a St. Venant-féle hatszögben is.

### A plastikus feszültségi állapot vizsgálata a Mises—Hencky-féle elmélet alapján

A Mises—Hencky-féle elmélet, amint erre már a bevezetésben rámutattunk, energetikai megfontolások alapján abból a feltevésből indul ki, hogy a plastikusan viselkedő anyagban a három fő csúsztatófeszültség négyzeteinek összege állandó értékkel bír. Tekintve, hogy vizsgálatainkat olyan kétdimenziós feszültségi állapotra végezzük el, melynél a három főfeszültség közül egyik mindenütt zérus értékkel bír, tehát a három fő csúsztatófeszültség :

$$(\sigma_r^* - \sigma_t^*) ; (\sigma_r^* - 0) ; (\sigma_t^* - 0).$$



15. ábra

Az előadottak alapján a Mises—Hencky-féle elmélet alapfeltevése így írható :

$$(25) \quad (\sigma_r^* - \sigma_t^*)^2 + (\sigma_r^* - 0)^2 + (\sigma_t^* - 0)^2 = K^2$$

a négyzetreemelés után ez így alakul :

$$(25a) \quad \sigma \sigma_r^{*2} - \sigma_r^* \sigma_t^* + \sigma_t^{*2} = k^2.$$

Ez az egyenlet szolgáltatja a  $\sigma_r^*$  és  $\sigma_t^*$  plastikus feszültségek között azt az összefüggést, amelyet az (1) egyenletbe behelyettesítve, megkapjuk a  $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r)$  vagy  $\sigma_t^* = \sigma_t^*(r)$  összefüggést szolgáltató differenciálegyenletet.

A következőkben keresni fogjuk, vajon milyen lesz a  $\sigma_r^*(r)$  és  $\sigma_t^*(r)$  plastikus feszültségek eloszlása két koncentrikus körhengerrel határolt, elméletileg végtelen hosszúnak tekintett hengeres test belsejében, amelyre a külső és a belső hengerfelületen húzó-nyomó terhelések hatnak.

Az (1) egyenletbe a  $P_r$  helyébe zérust helyettesítve, a plasztikus feszültségekre is érvényes dinamikai egyenlet így írható :

$$(1a) \quad \frac{d}{dr} (r\sigma_r^*) - \sigma_t^* = 0.$$

Ezt az egyetlen differenciálegyenletet szolgáltatja a dinamika a  $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r)$  és  $\sigma_t^* = \sigma_t^*(r)$  összefüggések meghatározására. Rendelkezésünkre áll azonban a fentebb tárgyalt (25a) összefüggés, amelyből  $\sigma_r^*$ -ot vagy  $\sigma_t^*$ -ot a másik főfeszültség függvényeként kifejezhetjük és az így nyert kifejezést az (1a) egyenletbe helyettesítve, egy elsőrendű algebrai differenciálegyenletet nyerhetünk, amelyet integrálva megkapjuk a  $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r)$  vagy  $\sigma_t^* = \sigma_t^*(r)$  függvényt.

Tekintve, hogy az (1a) differenciálegyenlet homogén lineáris és a (25a) egyenlet baloldalán álló kifejezés pedig homogén másodfokú, szabad a (25a) egyenletben foglalt mellékfeltételt a következőképpen normírozni : legyen  $k^2 = \frac{3}{4}$ , vagyis :

$$(25b) \quad \sigma_r^{*2} - \sigma_r^* \sigma_t^* + \sigma_t^{*2} = \frac{3}{4}.$$

A (25b) egyenletből  $\sigma_t^*$ -ot kifejezve :

$$\sigma_t^* = \frac{\sigma_r^*}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \sigma_r^{*2}}$$

Az így nyert eredményt az (1a) egyenletbe helyettesítve nyerjük, hogy :

$$(26) \quad \frac{d}{d \ln r} \sigma_r^* + \frac{\sigma_r^*}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \sigma_r^{*2}} = 0.$$

A (25b) egyenlet, amely geometriailag szemlélve egy ellipszis egyenlete, átírható a következő paraméteres egyenletrendszerre. [3]

$$(27') \quad \sigma_r^* = \sin \left( t + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$(27'') \quad \sigma_t^* = \sin \left( t - \frac{\pi}{6} \right)$$

A (27) összefüggéseket az (1a) egyenletbe beírva nyerjük, hogy :

$$\frac{d}{d \ln r} \left( \frac{1}{2} \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \right) + \cos t = 0.$$

A változókat szeparálva kapjuk, hogy :

$$\frac{d (\cos t + \sqrt{3} \sin t)}{\cos t} + 2 d \ln r = 0,$$

azaz :

$$d \ln \cos t + \sqrt{3} dt + 2d \ln r = 0.$$

Mindkét oldalon integrálva :

$$(28) \quad \ln r + \frac{1}{2} \ln \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} t + C = 0$$

vagy más alakban :

$$(28a) \quad r = C \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} t}}{\sqrt{\cos t}}.$$

Tekintettel arra, hogy a (28a) képletben  $\cos t$  négyzetgyökjel alatt szerepel, a  $C$  állandó a következőképpen választandó :

$$C = C, \text{ ha } 0 \leq \cos t \leq 1$$

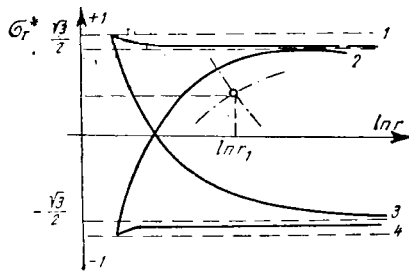
$$C = iC, \text{ ha } -1 \leq \cos t \leq 0.$$

A (27) és (28) egyenletek által meghatározott plasztikus feszültség-eloszlásokat az 1., 2. diagrammok szemléltetik.

Amennyiben birtokában vagyunk a (26) differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldását reprezentáló két integrálgörbének, a következőképpen nyerhetjük egy tetszésszerű  $\ln r_1, \sigma_{r_1}^*$  értékpárhoz tartozó két integrálgörbét :

I. A  $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sigma_r^* \leq 1$  intervallumban az 1. és 3. görbeágakat (l. 16. ábra) kell úgy párhuzamosan eltolni a  $\ln r$  tengely mentén, hogy a két görbeág egymást az adott  $\ln r_1, \sigma_{r_1}^*$  koordinátákkal bíró pontban messe.

II. A  $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sigma_r^* \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  intervallumban a 2. és 3. görbeágakat kell az adott pontba megfelelően eltolni, hogy megkapjuk az adott ponton átmenő két integrálgörbét.



16. ábra

III. A  $-1 \leq \sigma_r^* \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$  intervallumban a 2. és 4. görbeágak szolgáltatják — megfelelő eltolás után — az  $\ln r_1, \sigma_{r_1}^*$  koordinátákkal bíró ponton átmenő integrálgörbéket.



Az I—III.-ban foglaltakkal analóg módon nyerhetjük egyik  $\sigma_i^*$  ( $\ln r$ ) görbepár ismeretében bármely  $\ln r_1$ ,  $\sigma_{r_1}^*$  értékpárhoz tartozó partikuláris megoldást.

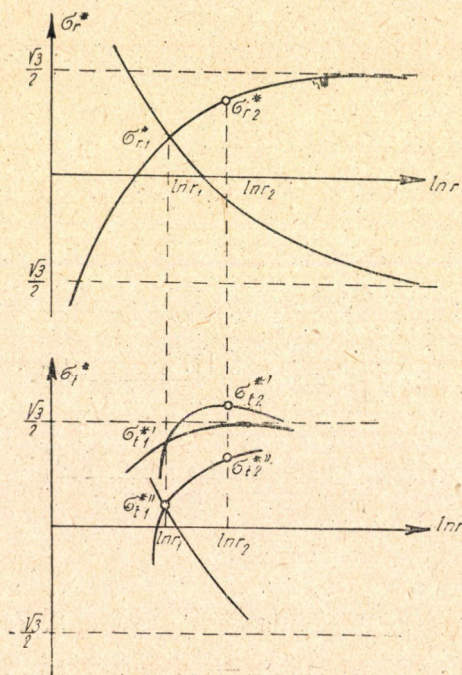
Az előadottak után még válaszolnunk kell arra a kérdésre, hogy ha ismeretes  $\ln r_1$ ,  $\sigma_{r_1}^*$  értékpárhoz tartozó két integrálgörbe, hogyan nyerhetjük a hozzájuk tartozó két  $\sigma_i^*$  ( $\ln r$ ) függvényt? Erre a kérdésre a válasz a következő:

Az adott  $\sigma_{r_1}^*$  értékhez két  $\sigma_i^*$  érték tartozik, mert:

$$\sigma_i^* = \frac{\sigma_r^*}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \sigma_r^{*2}}.$$

Mármost mindkét  $\sigma_i^*$ -hez ugyanaz a  $\ln r_1$  érték tartozván, megszerkesztjük az  $\ln r_1$ ,  $\sigma_{r_1}^*$  és  $\ln r_1$ ,  $\sigma_{r_1}^{*''}$  értékpárokon áthaladó két-két  $\sigma_i^*$  görbét. Ily módon négy  $\sigma_i^*(\ln r)$  görbét kaptunk. Ha az adott  $\sigma_r^*$  görbén kiválasztunk egy tetszős szerinti  $\ln r_2$ ,  $\sigma_{r_2}^*$  koordinátákkal bíró pontot, e pont  $\sigma_{r_2}^*$  koordinátájához ugyancsak két  $\sigma_i^*$  érték, nevezetesen:  $\sigma_{i_2}^{*'}$  és  $\sigma_{i_2}^{*''}$  van rendelve. A  $\sigma_{i_2}^{*'}$  rajta lesz a  $\sigma_{i_1}^{*'}$ -n keresztül rajzolt két  $\sigma_i^*$  görbe egyikén, a  $\sigma_{i_2}^{*''}$  érték pedig rajta lesz a  $\sigma_{i_1}^{*''}$ -n keresztülmenő két  $\sigma_i^*$  görbe egyikén. Az a két görbe, amely a  $(\ln r_2, \sigma_{i_2}^{*'})$ , illetve a  $(\ln r_2, \sigma_{i_2}^{*''})$  pontokat tartalmazza, lesz az egyik  $\sigma_r^*$  görbéhez tartozó két  $\sigma_i^*(\ln r)$  integrálgörbe. (L. a 17—18. ábrákat.)

Tehát a  $\ln r_1$ ,  $\sigma_{r_1}^*$  koordinátákkal bíró ponton átmenő két  $\sigma_r^*$  görbe mindegyikéhez két-két  $\sigma_i^*$  görbe tartozik, amint ez a (25b) egyenletből is azonnal megállapítható.



17., 18. ábra



Az összetartozó  $\sigma_r^*$  és  $\sigma_t^*$  görbeágakat az elmondottak alapján könnyűszerrel meghatározhatjuk.

Még arra a kérdésre kell válaszolnunk, hogy mi a teendő abban az esetben, ha  $K^2 = \frac{3}{4}$ , ahogy mi a (25a) egyenletet normíroztuk. Ekkor a (25b)

egyenlet alapján levezetett eredmények csak annyiban fognak változni, hogy  $\sigma_r^*$  és  $\sigma_t^*$  értékeit egy állandóval osztani vagy megszorozni kell.

Vizsgáljuk most, hogy ha olyan összetett feszültségi állapotot tételezünk fel egy vastagfalú csőben, amelynek megfelelően a plasztikus részben a feszültségek a Mises—Hencky-féle elmélet által előírt módon viselkednek, akkor hogyan kell a plasztikus és elasztikus részeket elválasztó körhengerfelület  $x$  sugarát megállapítanunk?

Ebben az esetben a plasztikusan viselkedő hengerrészben a feszültségek és a sugár közti összefüggést a (27) és (28) egyenletekből nyerjük, az elasztikus részben a feszültségeket a (6) egyenletek határozzák meg:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^* &= \sin \left( t + \frac{\pi}{6} \right) \\ \sigma_t^* &= \sin \left( t - \frac{\pi}{6} \right) \\ r &= \frac{C \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{\sqrt{\cos t}} \end{aligned} \right\} \text{plasztikus rész}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= C_1 - \frac{C_2}{r^2} \\ \sigma_t &= C_1 + \frac{C_2}{r^2} \end{aligned} \right\} \text{elasztikus rész}$$

A  $C$ ,  $C_1$  és  $C_2$  állandók értékét például úgy rögzíthetjük, hogy előírjuk a  $\sigma_r^*$  függvény értékét egy tetszés szerinti helyen és előírjuk a  $\sigma_r$  függvény értékét két tetszés szerinti helyen, vagy pedig előírhatjuk a  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  függvények értékét ugyanazon a tetszés szerinti helyen, de ez utóbbi csak elméletileg lehetséges, mert fizikailag nem tudunk olyan külső feltételeket konstruálni, amelyek egy általunk előírt  $\sigma_r$  és  $\sigma_t$  feszültséget eredményeznek a cső külső hengerpálástján.

Tekintve, hogy mind a radiális, mind pedig a tangenciális feszültségek folytonosan mennek át az elasztikus állapotból a plasztikus állapotba, írhatjuk, hogy:

$$\sigma_r(x) = \sigma_r^*(x) \quad \text{és} \quad \sigma_t(x) = \sigma_t^*(x).$$

Ebből, és a (25a) egyenletnek ilyen alakú átalakításából:

$$\left( \frac{\sigma_r^* + \sigma_t^*}{2} \right)^2 + 3 \left( \frac{\sigma_r^* - \sigma_t^*}{2} \right)^2 = k^2$$

nyerjük, hogy :

$$(29) \quad \left( \frac{\sigma_r(x) + \sigma_t(x)}{2} \right)^2 + 3 \left( \frac{\sigma_r(x) - \sigma_t(x)}{2} \right)^2 = k^2.$$

A (29) egyenletből most már a következőképpen nyerjük az elasztikus és plasztikus részeket elválasztó körhenger  $x$  sugarát :

Tekintve, hogy [a (6) egyenletekből] :

$$\frac{\sigma_r(r) + \sigma_t(r)}{2} = C_1 \quad \text{és} \quad \frac{\sigma_r(r) - \sigma_t(r)}{2} = -\frac{C_2}{r^2}$$

és

$$\frac{\sigma_r(x) + \sigma_t(x)}{2} = C_1; \quad \frac{\sigma_r(x) - \sigma_t(x)}{2} = -\frac{C_2}{x^2},$$

ahol a  $C_1$  és  $C_2$  állandók értékeit a következő egyenletek szolgáltatják :

$$(30) \quad C_1 = \frac{\sigma_{r_1} + \sigma_{t_1}}{2}; \quad C_2 = -r_1^2 \frac{\sigma_{r_1} - \sigma_{t_1}}{2} \quad \begin{matrix} \sigma_{r_1} = \sigma_r(r_1) \\ \sigma_{t_1} = \sigma_t(r_1) \end{matrix}.$$

A  $C_1$  és  $C_2$  állandók értékeit a (6) egyenletből  $\sigma_r(x)$ -szel és  $\sigma_t(x)$ -vel kifejezve és a (29) egyenletbe helyettesítve, az  $r = x$  átmeneti sugáron :

$$C_1^2 + 3 \frac{C_2^2}{x^4} = k^2.$$

Tehát :

$$(31) \quad x = \sqrt[4]{\frac{3 C_2^2}{k^2 - C_1^2}}.$$

Ha mármost előírjuk, hogy a vastagfalú cső belső hengerpalástján a plasztikus radiális feszültség értéke :  $\sigma_r^*(r_0) = \sigma_{r_0}^*$  és a külső hengerpaláston az elasztikus radiális feszültség értéke :  $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$ , akkor az  $x$  átmeneti sugár kiszámításához meg kell állapítanunk, hogy vajjon melyik az a  $\sigma_t(r_1) = \sigma_{t_1}$  érték, amelyet a (29) egyenletet kielégítő  $\sigma_t(r)$  függvény az  $r_1$  külső sugáron felvesz? Ennek az  $\sigma_{r_1}$  értéknek az ismeretében a  $C_1$  és  $C_2$  már kiszámítható a (30) egyenletekből, és az így nyert értékeknek (31)-be való helyettesítésével közvetlenül nyerhető az  $x$  átmeneti sugár értéke.

A (28) egyenlet átalakításával kapjuk, hogy :

$$(32) \quad 2 \ln \frac{C}{r} = \sqrt{3} \arcsin \frac{\sigma_r^*(r) + \sigma_t^*(r)}{2k} + \frac{1}{2} \ln \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_r^*(r) + \sigma_t^*(r)}{2k} \right)^2 \right].$$

Az  $r = x$  átmeneti sugáron :

$$2 \ln \frac{C}{x} = \sqrt{3} \arcsin \frac{\sigma_r(x) + \sigma_t(x)}{2k} + \frac{1}{2} \ln \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_r(x) + \sigma_t(x)}{2k} \right)^2 \right].$$



Ez az egyenlet, ha  $x$  értékét a (31) képletből kifejezzük, nyilván így írható :

$$2 \ln C - \frac{1}{2} \ln \frac{C_2^2}{k^2 - C_1^2} = \sqrt{3} \arcsin \frac{\sigma_r(x) + \sigma_t(x)}{2k} + \frac{1}{2} \ln \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_r(x) + \sigma_t(x)}{2k} \right)^2 \right]$$

vagy :

$$(33) \quad - \left( \ln \frac{C_2}{k} - \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \left( \frac{C_1}{k} \right)^2 \right) \right) + 2 \ln C = \sqrt{3} \arcsin \frac{C_1}{k} + \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \left( \frac{C_1}{k} \right)^2 \right)$$

Ebből az összefüggésből, tekintve, hogy  $C$  értékét a  $\sigma_{r_0}^* = \sigma_{r_0}^*(r_0)$  feltétele előírásával már rögzítettük,

$$\ln C = \frac{1}{2} \left[ 2 \ln r_0 + \sqrt{3} \arcsin \frac{\sigma_{r_0}^* + \sigma_{r_0}^*(r_0)}{2k} + \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \left( \frac{\sigma_{r_0}^* + \sigma_{r_0}^*(r_0)}{2k} \right)^2 \right) \right]$$

a keresett  $\sigma_{t_1}$  érték meghatározására a következő eljárást követhetjük :

A (33)-ból :

$$(34) \quad 2 \ln C = + \ln \frac{C_2}{k} + \sqrt{3} \arcsin \frac{C_1}{k}.$$

A (30) egyenletből  $C_1$  és  $C_2$  értékeit kifejezve :

$$2 \ln C = \ln \left( \frac{\sigma_{t_1} - \sigma_{r_1}}{2k} r_1^2 \right) + \sqrt{3} \arcsin \frac{\sigma_{t_1} + \sigma_{r_1}}{2k}$$

vagy más alakban :

$$(35) \quad \ln \left( \frac{r_1^2}{C^2} \frac{\sigma_{t_1}}{2k} - \frac{r_1^2}{C^2} \frac{\sigma_{r_1}}{2k} \right) = -\sqrt{3} \arcsin \left( \frac{\sigma_{t_1}}{2k} + \frac{\sigma_{r_1}}{2k} \right).$$

Vezessük be a következő jelöléseket :

$$(36) \quad \begin{aligned} \frac{\sigma_{t_1}}{2k} &= \xi - a \\ \frac{\sigma_{r_1}}{2k} &= a \\ \frac{r_1^2}{C^2} &= b. \end{aligned}$$

Akkor a (35) egyenlet így írható :

$$\ln (b\xi - 2ab) = -\sqrt{3} \arcsin \xi$$

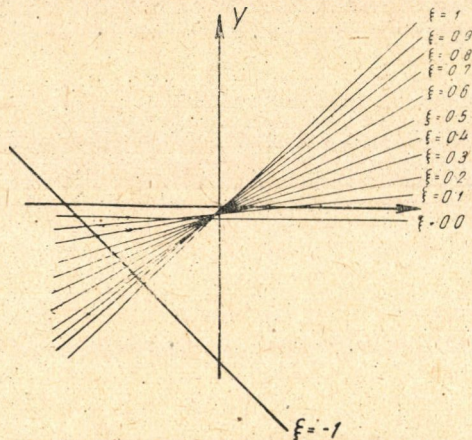
vagy :

$$(37) \quad b\xi - 2ab = e - \sqrt{3} \arcsin \xi.$$

A (37) egyenlet alapján lehetővé válik, hogy a  $\xi$  meghatározására egyenes-sereges nomogrammot készítsünk. Ugyanis a (37) egyenletet a  $X = b$  és  $Y = 2ab$  jelölések bevezetésével a következő alakban írhatjuk:

$$(38) \quad Y = \xi X - e^{-\sqrt{3} \arcsin \xi}$$

Ha  $X$ -et és  $Y$ -t pontkoordinátáknak,  $\xi$ -t pedig paraméternek tekintjük, akkor a (38) egyenlet egyenessereget jelent. A nomogramm használata úgy történik, hogy a konkrét feladat állandóiból  $X$ -et és  $Y$ -t a (36) és (38) képletek segítségével kiszámoljuk, és akkor a nomogramm adott  $(X, Y)$  pontján átmenő egyenes  $\xi$  paraméter-értéke lesz a keresett  $\xi$  érték. Ebből kiszámítható a keresett  $\sigma_{t1}$  érték és a  $C_1$  és  $C_2$  állandók értéke, és a (31) képlet alapján kiszámítható az  $x$  átmeneti sugár értéke.



19. ábra

A (36) képletek alkalmazását, illetőleg a  $\xi$  meghatározására szolgáló nomogramm megszerkesztését és használatát illetőleg szükséges megjegyeznünk a következőket:

A  $\sigma_r^*(r_0) = \sigma_{r_0}^*$  feltétel előírása után kiszámítható a  $C$  állandó értéke:

$$\ln C = \frac{1}{2} \left\{ 2 \ln r_0 + \sqrt{3} \arcsin \frac{\sigma_{r_0}^* + \sigma_{t_0}^*}{2k} + \frac{1}{2} \ln \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{t_0}^* + \sigma_{t_0}^*}{2k} \right)^2 \right] \right\}$$

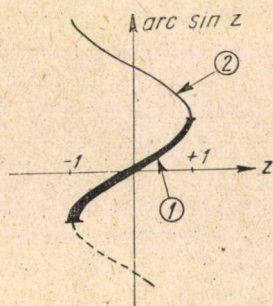
vagy:

$$C = \frac{r_0}{\sqrt[4]{1 - \frac{\sigma_{r_0}^* + \sigma_{t_0}^*}{2k}}} e^{\frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin \frac{\sigma_{r_0}^* + \sigma_{t_0}^*}{2k}}$$

Tekintve, hogy a  $C$  kiszámítására szolgáló képletben (a negyedik gyökök közül csak a pozitív valós gyök jöhet tekintetbe) szerepel a többértékű  $\arcsin$  függvény, tehát a  $C$  értékére a képletből elméletileg végtelen sok érték adódik. Ezek közül azonban csak kettőt használhatunk, mert egy  $\ln r$ ,  $\sigma_r^*(\ln r)$  ponton keresztül két  $\sigma_r^*(\ln r)$  görbe rajzolható. Viszont, ha e két  $C$  értéket



az  $\arcsin \frac{\sigma_{r_0}^* + \sigma_{t_0}^*}{2k}$  görbe (1) és (2) szakaszaiból nyerjük, akkor bármely, e kettőtől különböző  $C$  érték előállítható, mint az (1) vagy (2) szakaszból nyert  $C$ -nek és  $e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$ -nek szorzata. Ha azonban megvizsgáljuk a Mises—Hencky-féle plasztikus feszültségeloszlást szolgáltató (27) és (28), ill. (28a) egyenleteket, kitűnik, hogy ha  $C$  értékének  $C \cdot e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$ -re változása esetén  $t$  helyébe  $(t - \pi)$ -t írunk, akkor a (27) egyenletek változatlanul ugyanazt az ellipszist szolgáltatják, viszont a (28a) egyenlet ugyanolyan alakú lesz, mint a  $C$  értékének az  $e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$ -vel való szorzása előtt volt.



20. ábra

Elegendő tehát az  $\arcsin \frac{\sigma_{r_0}^* + \sigma_{t_0}^*}{2k}$  görbe (1) és (2) ágából adódó két  $C$  értéket meghatározni. Viszont a (38) egyenlethez tartozó nomogramm megszerkesztésénél is azt az ágot kell felhasználnunk az arcussinus függvénynek, amelyik ágának felhasználásával a  $C$  értékét kiszámítottuk. (Ezért két nomogrammot készítettünk: (3a) és (3b) nomogrammat.)

A St. Venant—Tresca és a Mises—Hencky-féle elméletek összehasonlítására megszerkesztettünk egy, a St. Venant—Tresca elmélet által leírt-összetett plasztikus feszültségeloszlást, ahol a plasztikus és elasztikus részeket elválasztó hengerfelület sugarának és a külső sugárnak aránya:  $= \frac{x}{r_1} = 5/8$ .<sup>\*</sup> Ha most feltesszük, hogy a feszültségek eloszlását a Mises—Hencky-féle elmélet határozza meg, és a vastagfalú cső méretei ugyanazok, mint az előbb, valamint a  $\sigma_r^*(r_0) = \sigma_{r_0}^*$  és  $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$  értékek is ugyanazok, akkor a plasztikus és elasztikus feszültségi állapotokat elválasztó hengerfelület sugarát, a következőképpen számíthatjuk ki:

A  $C$  állandó értékeire azt kapjuk, hogy:

$$\ln C = \begin{cases} 0,9 \\ \text{vagy} \\ 3,16 \end{cases}$$

<sup>\*</sup> L. a 4. diagrammot!



Ugyanis :

$$\frac{\sigma_{r_0}^*}{k} = -0,31$$

és

$$\frac{\sigma_{t_0}^*}{k} = 0,81$$

Viszont :

$$\frac{\sigma_{r_1}}{k} = 0,62$$

Az a plasztikus feszültségeloszlás, amely megközelíti a 4. diagrammon látható St. Venant—Tresca szerinti plasztikus feszültségeloszlást, akkor áll elő, ha a  $\ln C$  értékét a 3,16-nak választjuk. Akkor :

$$C = 23,5$$

$$X = 0,116$$

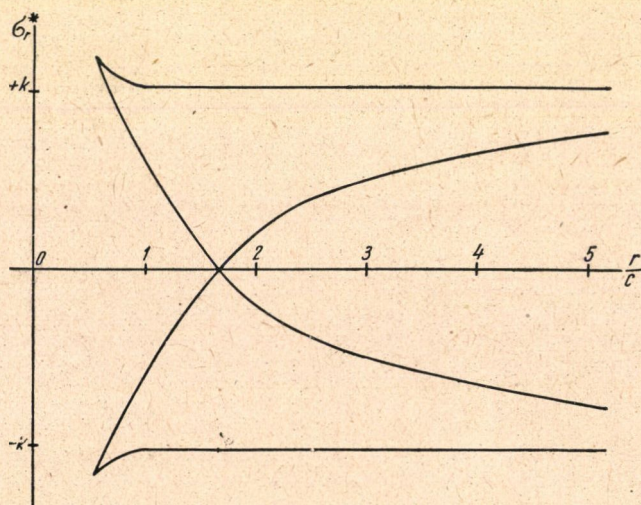
$$Y = 0,62 \cdot 0,116 = 0,072$$

Ebből azt kapjuk, hogy  $\xi = 0,8$ , mert a (3b) diagrammban az  $X = 0,116$ ,  $Y = 0,072$  koordinátákkal bíró pont éppen rajta van azon az egyenesen, amely a  $\xi = 0,8$  értékhez tartozik.

De akkor :  $\sigma_t(r_1) = 0,98$

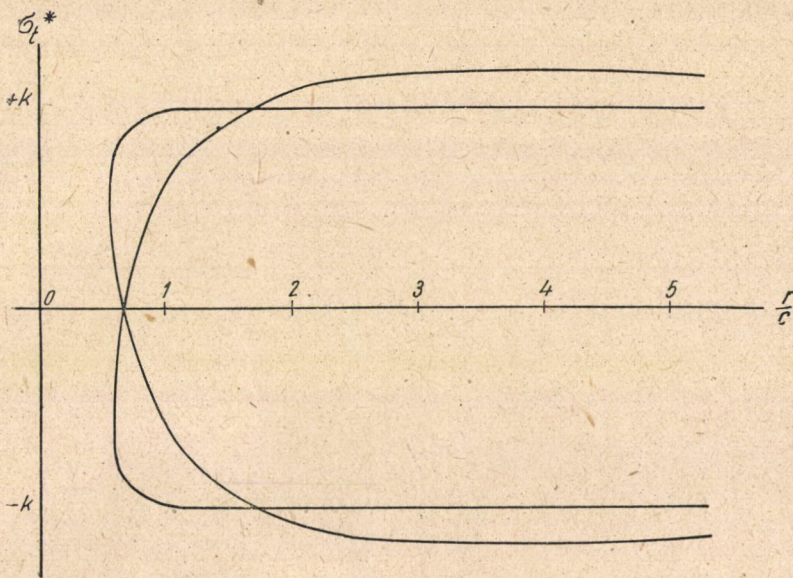
$$C_1 = 0,8k$$

$$C_2 = 11,5k$$

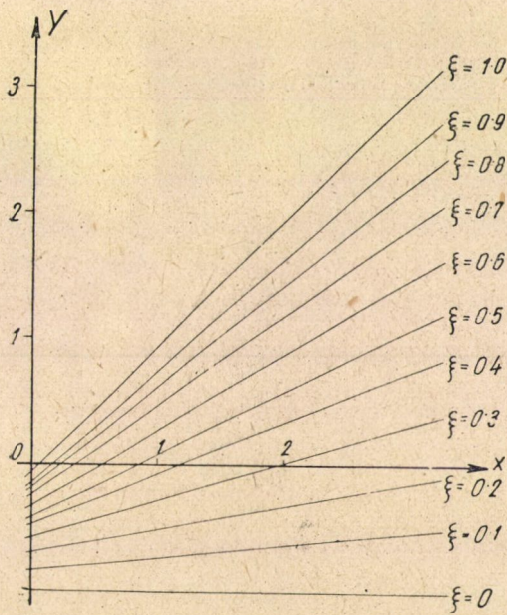


1. diagramm



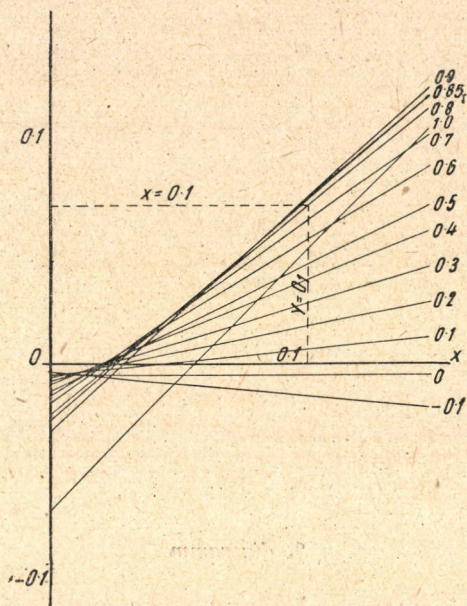


2. diagramm

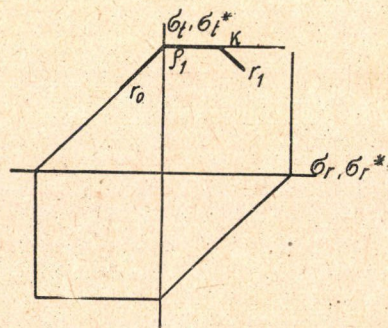
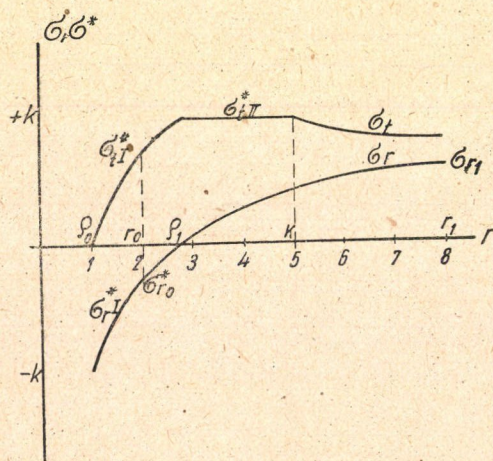


3/a. diagramm



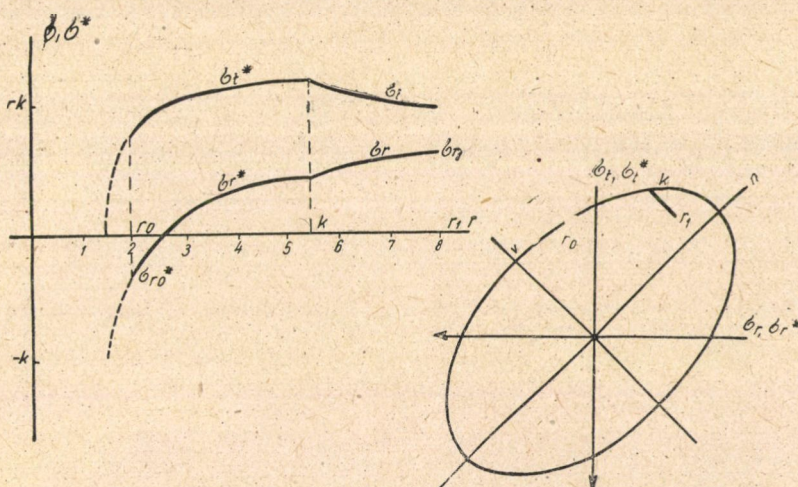


3/b. diagramm



4. diagramm





5. diagramm

Így a plasztikus és elasztikus részeket elválasztó hengerfelület sugara :  $x = 5,5$ , vagyis az átmeneti sugár és a külső sugár aránya :  $\frac{x}{r} = 5,5/8$ . Tehát a Mises—Hencky-féle, bonyolultabb számítással adódó érték viszonylag nem sokat tér el az egyszerűbb St. Venant-féle elmélet alapján végzett számítás által nyert értéktől, mint várható is volt.

#### IRODALOM

1. Lásd : Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, IV. Band, 4. Teilband, 359 oldalán. (Th. Kármán: Festigkeitsprobleme in Maschinenbau.) Leipzig, 1907—1914.
2. Lásd pl.: H. Geiger—K. Scheel: Handbuch der Physik — Mechanik der elastischen Körper, Kapitel 6. (A. Nádai: Plastizität und Erddruck.) Berlin, 1928.
3. A  $t$  segédváltozót a  $\sigma_r^*$ -re vonatkozó differenciálegyenletben szereplő irracionális eltüntetése céljából vezettük be. Hasonló parametrizálást alkalmaz a plasztikus jelenségek tárgyalásánál B. B. Соколовский: Теория пластичности. с. könyvében, Moszkva—Leningrád, 1950.

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАСТИЧНЫХ И ЭЛАСТИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ НАПРЯЖЕНИЯ В ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБКАХ

В. ЛОВАШ—НАДЬ

#### Резюме

В этой работе автор занимается математическим исследованием пластичных и сложных (частью пластичных, частью эластичных) состояний напряжения, устанавливающихся в толстостенных трубках, нагруженных большим гидростатическим давлением. К определению напряжений  $\sigma_r^*$  и  $\sigma_t^*$ , возникающих в случае нагрузок, превышающих границу течения, кроме известного, существующего в случае осесимметричной нагрузки, уравнения равновесия тел, ограниченных коаксиальными цилиндрами (и

читанных бесконечно длинным), они используют условия компатибиличности теорий пластичности Сен-Венан-Треска и Мизес-Генки.

После соответствующего обеим теориям пластичности определения функций, описывающих пластичное состояние напряжения, автор определяет в случае сложной (пластичной и эластичной) нагрузки радиус круглого цилиндра, разделяющего пластичные и эластичные части.

Настоящая работа — часть исчислений автора, выполненных в 1948 г. на основе наказа Электрической Фабрики им. Ганца, в качестве сотрудника академика Э. Эгервари.

## SUR LES ÉTATS DE TENSION PLASTIQUES ET ÉLASTIQUES DANS LES TUYAUX À PAROI ÉPAISSE

V. LOVASS—NAGY

### R é s u m é

Dans cet article l'auteur s'occupe de l'examination mathématique des états de tension plastiques et composés (partiellement plastiques partiellement élastiques) qui se présentent dans les tuyaux à paroi épaisse chargés d'une grande pression hydrostatique. Outre l'équation d'équilibre connue qui a lieu dans le cas d'une charge axiellement symétrique des corps limités par des cylindres circulaires coaxiaux (et considérés comme d'une longueur infinie) l'auteur fait usage pour déterminer les tensions qui se présentent au cas des charges dépassant la limite de *fluxion*, des conditions de compatibilité de la théorie de plasticité de Saint-Venant—Tresca, ainsi que de la théorie de plasticité de Mises—Hencky.

Après avoir déterminé les fonctions décrivant l'état de tension plastique conformément aux deux théories de plasticité, l'auteur détermine le rayon du cylindre circulaire qui sépare les parties plastiques des parties élastiques dans le cas d'un effort composé (plastique et élastique).

L'article présent forme une partie des calculs que l'auteur a effectués en 1948 sur la base d'un mandat reçu de la part de l'usine d'électricité Ganz, comme collaborateur de E. Egerváry.

## AZ OSZTÁLY MUNKATÁRSAINAK AZ OSZTÁLY MUNKÁJÁNAK EREDMÉNYEIT TARTALMAZÓ, MÁSUTT MEGJELENT DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

*Egerváry Jenő:* A Rayleigh-módszer alkalmazása forgó rendszerek kritikus szögsebességének megállapításánál. Matematikai Lapok, 1949. 1.

*Egerváry Jenő:* A matematika gyakorlati alkalmazásai, különös tekintettel a technika differenciálegyenleteire. MTA III. o. Közleményei, I. 1.

*Egerváry Jenő—Turán Pál:* A kinetikus gázelmélet bizonyos kérdéseiről. MTA III. o. Közleményei, I. 2—4.

*Lovass-Nagy Viktor:* Lehülési jelenségek matematikai vizsgálata (Véges hosszúságú körhengerek lehüléséről) I. Magyar Technika, 1951. 10. 58—63.

*Lovass-Nagy Viktor:* Lehülési jelenségek matematikai vizsgálata (Véges hosszúságú körhengerek lehüléséről) II. Magyar Technika (Sajtó alatt).

### A mechanikai és szilárdságtani osztály szemináriumában elhangzott előadások

*Pál Sándor:* Vékony domború lemezek behorpadásáról. (1952. évi.)

Olyan forgásfelület-alakú lemezeknél, melyeknél a lemez domborúsága nagy a vastagsághoz képest, az előadó a lemez viselkedését a tengelyben ható koncentrált terhelés, vagy a felületen megoszló terhelés alatt a Prandtl-féle határréteg-elmélettel analóg modellel írja le.

A lemez erős hajlítást és felületi deformációt csak egy szélességi körének kis környezetében szenved. Ez a szélességi kör (»behorpadási kör») két részre osztja a lemezt, melyek közül az egyik az eredeti lemezalakkal, a másik ennek tükröképével közelítőleg egybevágó. Itt — tehát a lemezfelület nagyrészen — a lemez membránszerűen, tehát kis felületi deformációval és alakváltozással veszi át a terhelést.

Az előadó a »hajlítási zónára« alkalmazza a vékony héjak elméletét. Alkalmas hasonlósági transzformációval oly dimenzió nélküli mennyiségeket vezet be, amelyek nagyságrendje könnyen megállapítható az összefüggésekből. (V. ö. előadó »Vékony hengeres héjakról« c. cikkével). A lehetséges elhanyagolások után negyedrendű nemlineáris differenciálegyenletre jut, amelynek határfeltételeit a membránszerű terhelés zónájában érvényes viszonyok adják és amely egy sajátérték-jellegű paramétert tartalmaz.

A differenciálegyenletnek numerikus úton való megoldása még nem történt meg, azonban — feltéve, hogy megoldás létezik — már a transzformációs formulákból érdekes félkvantitatív eredmények olvashatók le a dimenzióanalízis módszereivel. 1. Ha a lemez terhelése koncentrált erő, a »behorpadási kör« 0-tól monoton növekvő erő esetén monoton növekszik, és a belső membránszerű zóna ugrik át másik szélső »tükrözött« helyzetbe. A felületen egyenletesen megoszló terhelés esetén a viszonyok épp fordítottak. Adott egyenletű forgásfelületnél egy konstanstól (a differenciálegyenlet sajátértékétől) eltekintve egyszerűen meghatározható az erő és »behorpadási kör« átmérőjének összefüggése. 2. Megoszló terhelés esetén a lemez másik szélső helyzetét csak végtelen nagy terhelés esetén érné el, ami nyilvánvalóan nem egyezik a szemlélettel. Ezért ez a modell a jelenségnek csak az egyik oldalát mutatja be, szükséges hozzá a lemeznek csak kis deformációit feltételező elméletre támaszkodó kiegészítése.

*Lovass-Nagy Viktor* ezután ismertette ugyanezen tárgyra vonatkozó és a klasszikus rugalmasságtan feltevésein alapuló tanulmányát. (L. 33 old.)



*Egerváry Jenő*: Direkt eljárás mátrixok kanonikus redukcijára. (1952 május.)

Legyen  $A$  karakterisztikus polinomja:  $|\lambda E - A| = \prod_{k=1}^s (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$  és minimálpolinomja:  $\Delta(\lambda) = \prod_{k=1}^s (\lambda - \lambda_k)$ . Ekkor az  $L_k(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{\Delta'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}$  Lagrange-polinomok segítségével  $A$  a következő alakban állítható elő:  $A = \sum_{k=1}^s \lambda_k L_k(A)$ . Itt  $L_k(A)$  rangja egyenlő  $\alpha_k$ -val, tehát  $L_k(A)$  felbontható  $\alpha_k$  számú diád összegére a következő alakban:

$$L_k(A) = u_{k1} v_{k1}^* + \dots + u_{k\alpha_k} v_{k\alpha_k}^*.$$

Előadó kimutatja az  $L_k(A)^2 = L_k(A)$  azonosság felhasználásával, hogy a felbontásban szereplő diádok *automatikusan* biorthogonalizálva vannak, azaz fennállnak az  $u_{k\nu}^* v_{k\mu} = \delta_{\nu\mu}$  relációk.

Ez az eljárás szimultán realizálja a rangszám megállapítást, a sajátvektorokat meghatározó homogén egyenletrendszer megoldását, valamint a sajátvektorok orthogonalizálását és kizárólag másodrendű determinánsok szukcesszív számításából áll.

\*

*Rózsa Pál*: Elasztikusan kapcsolt kórpuszkuláris modellek tárgyalása mátrixkalkulus alkalmazásával. (1952 június.)

Adva van  $f(\lambda)$  analitikus függvény, melynek konvergencia köre tartalmazza annak a mátrixnak karakterisztikus gyökei, melyre  $f(A)$  mátrix függvényt definiálni kívánjuk.  $A$  tetszőleges mátrix egyszeres karakterisztikus gyökökkel, vagy Hermite-féle, tetszőleges multiplicitásúakkal. — Előadó előállította az  $f(A)$  mátrixfüggvény kanonikus-felbontását, melyet állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletrendszerek megoldására alkalmazott. Ily módon vizsgálta az egyenes mentén egyenletesen elosztott, váltakozó tömegű tömegpontokkal bíró kórpuszkuláris húrmodellnek, valamint kör mentén egyenletesen elosztott, súrlódás nélküli hengeren elhelyezett kórpuszkuláris húrmodellnek szabad és gerjesztett lengéseit. Az előbbinek egyszeres, utóbbinak pedig kétszeres karakterisztikus gyökök felelnek meg.

## VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁSI OSZTÁLY





# GÉPIPARI ÜZEMEK ELEKTROMOS ENERGIASZÜKSÉGLETÉNEK ÉS EGYIDEJŰSÉGI, ILLETŐLEG SZÜKSÉGLETI TÉNYEZŐJÉNEK VALÓSZÍNŰESGSZÁMÍTÁSI MEGHATÁROZÁSA

RÉNYI ALFRÉD és SZENTMÁRTONY TIBOR

## ÖSSZEFOGLALÁS

Gépipari üzemek *tényleges* teljesítménye (időegység alatti energiafogyasztása) elméletileg *lehetséges* maximumát, ú. n. *beépített* teljesítményét nagy gépszámnál általában nem éri el, hanem jóval ez alatt ingadozik. A kettő hányadosának gyakorlatilag még számbavehető valószínűségű felső határa az üzem *t* *szükségleti tényezője*. Egyforma teljesítményű gépekből álló üzemnél ez az *egyidejűségi tényezőre* egyszerűsödik. A (2,4) – (2,12) képletek e tényezőkre az eddigi nyers tapasztalati szabályok helyett elméletileg megalapozott, 99% biztonságot nyújtó értékeket szolgáltatnak, mégpedig egymástól függetlenül működő *n* gép esetén, a *k*-ik gép bekapcsolásának

$\lambda_k$  időbeli valószínűségi sűrűsége és  $\frac{1}{\mu_k}$  átlagos működési ideje mellett, ha  $P_k = 1 - Q_k$   

$$= \frac{\lambda_k}{\lambda_k + u_k} + a$$
*k*-ik gép kihasználási fokát,  $f_k$  működése esetén teljesítménye átlagá  
 $s_k$  pedig szórását jelenti. A dolgozat e képletek használhatóságát biztosító legkisebb gépszámra is nyújt becslést és kapcsolatot ad meg egy üzem és műhelyeinek *t*-értékei között.

Egy üzemben, amelyben nagyszámú gépet (pl. szerszámgépet) ugyanaz az áramforrás táplál és az egyes gépek nem állandóan működnek, hanem mindig csak egy bizonyos időre vannak igénybe véve, az egyidejűleg működő gépek száma véletlen ingadozásokat mutat. Ez a szám azonban mindenesetre jóval kisebb, mint az összes gépek száma és ennek megfelelően az *időegység alatti energiafogyasztás, a teljesítmény is kisebb*, mintha a gépek mind egyidejűleg működnének, azaz kisebb, *mint a beépített kapacitás*. Ha azt akarjuk meghatározni, hogy az üzem összes gépei együttvéve hosszabb időtartam alatt mennyi energiát fogyasztanak, úgy az egyidejűleg működő gépek átlagos számát, illetve az időegységre eső energiafogyasztás, teljesítmény várható értékét kell meghatározni. Ezt a beépített kapacitással elosztva kapjuk az üzem **kihasználási tényezőjét**. Ez azonban önmagában még nem ad felvilágosítást arról, hogyan kell az áramforrást méretezni, mert ehhez tudnunk kell az időegységre eső fogyasztás, a teljesítmény gyakorlatilag előforduló legnagyobb értékét is. *A gyakorlatilag még számbaveendő legnagyobb teljesítmény is általában jóval*

kisebb a beépített kapacitásnál\*, tehát az elméletileg elképzelhető maximális teljesítménynél. A kettő hányadosát nevezik az illető üzem **szükségleti tényezőjének**.\*\* Amennyiben a gépek egyformák, vagy legalábbis mind ugyanolyan teljesítményűek, amikor éppen működnek, úgy ez a hányados megegyezik az egyidejűleg működő gépek gyakorlatilag előforduló legnagyobb számának és az összes gépek számának hányadosával. Utóbbi hányadost az illető üzem **egyidejűségi tényezőjének** nevezik. Mivel a legtöbb üzemben általában különböző jellegű és méretű gépek táplálkoznak ugyanabból az áramforrásból, célszerűbb a szükségleti tényezővel számolni, amint ezt a szovjet szakirodalomban is teszik. A szükségleti tényező természetesen attól függ, hogy milyen gyakran és milyen időtartamokra veszik igénybe az egyes gépeket. Kialakult állandó jellegű munkamenetnél azonban az igénybevétel mértéke bizonyos állandó számokkal jellemezhető, amint azt alább meg fogjuk mutatni, és ezen állandók ismeretében az egyidejűségi tényező, illetve a szükségleti tényező is meghatározott értékkel bír. Ennek megállapítása igen nagy gyakorlati jelentőségű, különösen új üzemek létesítésénél, meglévő üzemek bővítésénél stb. az energiaellátás biztosítása és így a tervgazdálkodás szempontjából.

A szóbanforgó problémával a *Kohó- és Gépipari Minisztérium* felkérésére foglalkoztunk és a problémát a valószínűségsszámítás módszereivel oldottuk meg. Ezúton mondunk köszönetet *Knizsek Ferenc* főmérnöknek, a KGM csoportvezetőjének, akitől a probléma gyakorlati vonatkozásait illetőleg számos értékes felvilágosítást kaptunk. A problémára vonatkozó megbeszéléseken a *Gépipari Tervező Intézet* több mérnöke is részt vett, akik közül *Sors László* mérnőktől kaptunk értékes útmutatásokat. Ő hívta fel a figyelmünket arra, hogy hasonló probléma merül fel sűrített levegővel dolgozó gépek esetében a kompresszor és légtartály méretezése tekintetében: ezzel a kérdéssel egy másik közleményben foglalkozunk.

A kérdés igen nagy gyakorlati jelentőségét és elméleti érdekességét tekintve meglepő, hogy a szakirodalomban erre a kérdésre vonatkozólag tapasztalati adatokon és elméletileg nem kellően megalapozott empirikus szabályokon kívül, más nem található. A Szovjetunióban e téren alapos adatgyűjtés történt, mely alapján *D. Sz. Livsic* 1937-ben tapasztalati képletet állított fel [7] és a *Glávelektromontázs* táblázatok is készített. Egyforma gépek esetére az egyidejűleg működő gépek számának valószínűségeloszlására vonatkozólag *Adler és Miller* [1] végeztek vizsgálatokat, amelyek azonban, mint azt *W. Feller* [2] megjegyzi, szabatoságszempontjából nem kielégítőek. Egyforma gépek esetére bizonyos igen speciális és a tényleges üzemi körülményektől távolálló egyszerűsítő feltevések mellett *Feller* kimutatta szabatosan, hogy a működő gépek száma binomiális eloszlást követ, azonban az egyidejűségi tényezővel nem foglalkozott és meg sem kísérelte a problémát a gyakorlati szükségleteinek megfelelő általánosabb feltételek mellett megoldani.

\* Kovács Károly Pál »A villamos energia termelésének és eloszlásának időszerű kérdései hazánkban« c. előadásában (MTA Magyar Tudományos Akadémia VI. o. Közleményei I. kötet 1951. 78—112. o.) a következőket írja: »Hazánkban az utóbi évek átlagában ... erőműveink kihasználása a legnagyobb üzemi teljesítménynek mindössze kerekén 60%-a; a beépített teljesítménynek — a tartalékok miatt — kerekén 48%-a.« Ezek a számok megvilágítják a kérdés nagy népgazdasági jelentőségét. A szóbanforgó előadás foglalkozik a véletlen üzemzavarok valószínűségsszámítási vizsgálatával, a nem állandó igénybevétel kérdéseire azonban a valószínűségsszámítás módszereit nem alkalmazza.

\*\* Beszélhetünk szükségleti tényezőről kisebb egységekről, pl. műhelyek vagy nagyobb egységekről, pl. egész ipartelepek esetében is, továbbá nemcsak elektromos, hanem más energiával hajtott gépek esetében is.

A következőkben a problémát teljes általánosságban tárgyaljuk és a valószínűségszámítás módszereinek alkalmazásával minden önkényes megszorítás elhagyásával oldjuk meg. A dolgozat végén kitérünk az eredmények gyakorlati alkalmazásánál figyelembeveendő szempontokra, továbbá az alapul szolgáló adatok meghatározásának gyakorlati módszereire is. Eredményeinket a jelenleg rendelkezésre álló hazai és szovjet tapasztalati adatokkal összehasonlítottuk és igen jó egyezést találtunk. Az alapos adatgyűjtést hazánkban a KGM most indította meg; az adatok összegyűjtése után mód fog nyílani elméleti úton nyert eredményeinknek a tapasztalatokkal való még szélesebb körű összehasonlítására.

A kérdés valószínűségszámítási tárgyalásánál felhasználjuk *Rényi Alfréd* [3], [5] és *Takács Lajos* [4] bizonyos valószínűségszámítási tételeit. Amellett, hogy a tárgyalás ezen eredményekre támaszkodik, egyben példát is ad érdekes gyakorlati alkalmazásaikra.

Az egész tárgyalásban alapvető az a feltevés, hogy az egyes gépek működése egymástól független. Ez teszi lehetővé, hogy a valószínűségszámítás általános tételeit alkalmazzuk és ezzel tetszőleges számú gép esetét egyes gépek vizsgálatára vezessük vissza. Az 1. § egy gép esetével foglalkozik, a 2. § ennek alapján tetszőleges számú gép esetét tárgyalja, míg a 3. § a tapasztalati adatokkal való összehasonlítást és az eredmények gyakorlati felhasználására vonatkozó megjegyzéseket tartalmazza.

### 1. §. Egy gép esete.

Mindenekelőtt félreértések elkerülése végett hangsúlyozzuk, hogy egy gép esetének vizsgálata csak azt a célt szolgálja, hogy ennek alapján számítsuk ki több gép esetén a szükségleti tényezőt: a szükségleti tényezőnek egy gép esetében nincsen jelentősége, mivel 1-gyel egyenlő.

Egy gép esetében bármely  $t$  időpontban csak két eset lehetséges: a gép ezen időpontban vagy működik vagy nem működik. Annak valószínűségét, hogy a gép  $t$  időpontban működik, jelöljük  $P(t)$ -vel, annak valószínűségét, hogy nem működik,  $Q(t)$ -vel; ily módon tehát  $P(t) + Q(t) = 1$ . Jelentse  $\lambda$  a gép igénybevételének időbeli valószínűség-sűrűségét, vagyis annak valószínűsége, hogy az álló gépet  $t$  és  $t + h$  időpontok között megindítsák, kis  $h$  érték mellett  $h$ -hoz képest elhanyagolható hibával legyen egyenlő  $\lambda h$ -val. Feltesszük, hogy  $\lambda$  nem függ az időtől, azaz, hogy a gép igénybevételének valószínűsége az egész munkaidő alatt állandó. (Amennyiben utóbbi valószínűség bizonyos ingadozásokat mutatna, úgy mindig  $\lambda$  maximális értékével számolunk, vagyis biztonsági okokból a számítást a csúsigénybevételre végezzük el.) A  $\lambda$ -ra vonatkozó feltevésünk úgy is megfogalmazható, hogy a gép két igénybevétele közötti szünet, vagyis a gépállás időtartama olyan a véletlentől függő mennyiség — szakkifejezéssel olyan valószínűségi változó — amely exponenciális eloszlással bír, azaz annak a valószínűsége, hogy a gépállás ideje  $t$ -nél rövidebb,  $1 - e^{-\lambda t}$ -vel egyenlő. Hasonlóképpen a véletlentől függő mennyiségnek, azaz valószínűségi változónak tekintendő egy igénybevétel időtartama is; utóbbi eloszlásfüggvénye a munkafolyamat jellegétől függ, és egyáltalán nem indokolt az a feltevés, hogy ez az időtartam is exponenciális eloszlású, amint azt *Feller* felteszi.

Kétségtelen, ilyen esetek is előfordulnak, azonban a következőkben ezt a megszorítást nem alkalmazzuk és tetszőleges eloszlású igénybevételek esetét



is figyelembe vesszük. Legyen tehát  $F(t)$  egy igénybevétel időtartamának eloszlásfüggvénye, azaz annak a valószínűsége, hogy egy igénybevétel időtartama  $t$ -nél nem hosszabb. Itt megjegyezzük, hogy mind az időegység, mind az energiaegység megválasztása tetszőleges. Jelentse  $\alpha$  az igénybevétel átlagos időtartamát, azaz legyen

$$(1) \quad \alpha = \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt.$$

Vezessük be a  $\mu = \frac{1}{\alpha}$  jelölést. Abban az esetben, amikor az igénybevétel időtartama is exponenciális eloszlású,  $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$  és így  $\mu$  nem más, mint a gépleállás időbeli valószínűsége, azaz annak a valószínűsége, hogy a  $t$  időpontban működő gépet  $t$  és  $t + h$  időpontok között leállítják, kicsiny  $h$  esetében  $h$ -hoz képest kicsiny hibától eltekintve  $\mu h$ -val egyenlő. Feltevéseinkből és Takács Lajos már említett eredményeiből következik, hogy léteznek  $P(t)$  és  $Q(t)$  határértékei, ha  $t \rightarrow \infty$ , mégpedig

$$(1.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = P \quad \text{és} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = Q = 1 - P.$$

Ez azt jelenti, hogy rövid felfutási idő után stacionér állapot áll be, amelyben a gép működésének, illetve állásának valószínűsége az időtől független állandó értékkel bír. Abban a speciális esetben, amikor a gép működési ideje is exponenciális eloszlású, a gép állapotváltozásai úgynevezett *Markov-folyamatot* alkotnak, ennek következtében a  $P(t)$  és  $Q(t)$  függvényekre a következő differenciálegyenletrendszer írható fel:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} P'(t) &= -\mu P(t) + \lambda Q(t) \\ Q'(t) &= -\lambda Q(t) + \mu P(t), \end{aligned}$$

amelyből  $P(t)$  és  $Q(t)$  meghatározható, mégpedig:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} P(t) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) + P(0) e^{-(\lambda + \mu)t} \\ Q(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) + Q(0) e^{-(\lambda + \mu)t}. \end{aligned} \quad \text{és}$$

A (1.4) képletekből is leolvashatók a (1.2) határérték-relációk. Hangsúlyozzuk azonban, hogy Takács vizsgálataiból a (1.2) relációk bármely  $F(t)$  eloszlás esetére következnek.

A  $\lambda$  és  $\mu$  számok gyakorlati meghatározása a következőképpen történhet: a szóbanforgó gépet néhány napon át megfigyeljük és regisztráljuk a be- és kikapcsolások időpontjait. Ezekből a feljegyzésekből kiszámítjuk a működési időket és a gépállási időket: legyenek a működési idők  $m_1, m_2, \dots, m_n$  és a gépállási idők  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , akkor az

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &\approx \bar{l} = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} \\ \text{és} \quad \frac{1}{\mu} &\approx \bar{m} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n} \end{aligned}$$

képletek alapján állapíthatjuk meg  $\lambda$  és  $\mu$  értékeit. A  $\lambda$ , illetve  $\mu$  értékek hibájáról felvilágosítást nyújt az  $m_k$ , illetőleg  $l_k$  számok szórása. Ha

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{\Sigma (l_j - \bar{l})^2}{n}} \text{ és } \sigma_m = \sqrt{\frac{\Sigma (m_j - \bar{m})^2}{n}},$$

úgy  $\lambda$  hibája  $\frac{\sigma_l}{\bar{l}^2 \sqrt{n}}$ , hasonlóképpen  $\mu$  hibája  $\frac{\sigma_m}{\bar{m}^2 \sqrt{n}}$ .

Gyakorlati szempontból nem szükséges a  $\lambda$  és  $\mu$  értékeket külön-külön ismerni; elég, ha a  $P = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$  értéket ismerjük. A  $P$  számot a gép **kihasználási fokának** nevezzük; ennek gyakorlati meghatározása úgy történhet, hogy megfelelő regisztráló órával megállapítjuk, hogy hosszabb  $T$  idő alatt a gép az idő hányadrésében működött. Ha a gép összes működési ideje ezalatt  $T^*$ , úgy  $\frac{T^*}{T}$  adja  $P$  közelítő értékét.

A műszaki gyakorlatban számolnunk kell azzal az esettel is, hogy ugyanaz a gép aszerint, hogy milyen munkafolyamatot végeznek rajta, különböző teljesítményű. Ez fordul elő pl. forgácsológépek esetében. Ez esetben, ha a gép időegység alatti fogyasztásának, teljesítményének lehetséges értékei  $f^{(1)}$ ,  $f^{(2)}$ , ...,  $f^{(r)}$  és feltéve, hogy a gép működik, annak feltételes valószínűsége, hogy éppen  $f^{(j)}$  a teljesítmény:  $w^{(j)}$ -vel egyenlő, úgy bevezetjük a működő gép átlagos teljesítményét, amelyet  $\bar{f}$ -sal jelölünk:

$$\bar{f} = \sum_{j=1}^r w^{(j)} f^{(j)},$$

továbbá a működő gép teljesítményének szórását, melyet  $s$ -sel jelölünk:

$$s = \sqrt{\sum_{j=1}^r w^{(j)} (f^{(j)} - \bar{f})^2}.$$

Jelentse most  $\xi$  a gép teljesítményét egy tetszőleges időpontban. A  $\xi$  mennyiség értéke a véletlentől függ, azaz  $\xi$  valószínűségi változó, amelynek értéke vagy 0 (ha a gép áll) vagy pedig az  $f^{(j)}$  számok valamelyike. Mivel annak valószínűsége, hogy  $\xi = f^{(j)}$  nyilván  $Pw^{(j)}$ , tehát  $\xi$  átlagos (várható)-értéke  $\bar{\xi} = P\bar{f}$  és szórása  $\sigma = \sqrt{Ps^2 + PQ\bar{f}^2}$ . A gyakorlatban az  $f^{(j)}$  és  $w^{(j)}$  számokat és így az  $f$  és  $s$  értékeket a gépekre felbontott tervből meg lehet határozni, hiszen ezen értékek attól függnek, hogy a szobanforgó gépen milyen munkálatok és milyen számban vannak tervbevéve.

## 2. §. Több gép esete.

Tegyük most fel, hogy a vizsgált üzemben (műhelyben, ipartelepen stb.)  $n$  számú gép táplálkozik ugyanabból az áramforrásból: a gépeket számozzuk meg 1-től  $n$ -ig. A  $k$ -ik gép kihasználási foka legyen  $P_k$ , teljesítménye egy tetsző-

leges időpontban legyen  $\xi_k$ , a teljesítmény várható értéke működés esetében legyen  $\bar{f}_k$ , míg szórása  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Jelentse továbbá  $\lambda_k$  a  $k$ -ik gép bekapcsolásainak időbeli valószínűsége sűrűségét és  $\alpha_k$  a  $k$ -ik gép átlagos működési idejét, továbbá legyen  $Q_k = 1 - P_k$ . Akkor tehát az előző § szerint fennállnak a következő képletek:

$$P_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k} \quad \text{és} \quad Q_k = \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}, \quad \text{ahol} \quad \mu_k = \frac{1}{\alpha_k}.$$

Mivel az egyes gépek működései egymástól függetlenek, annak a valószínűsége, hogy az  $i_1, i_2, \dots, i_r$  gépek működjenek és ugyanakkor a többi gép, a  $j_1, j_2, \dots, j_{n-r}$ -ik gépek álljanak:

$$P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_r} Q_{j_1} Q_{j_2} \dots Q_{j_{n-r}}.$$

Speciálisan, ha  $P_k = P$  és így  $Q_k = Q$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), úgy ez a valószínűség nem más, mint  $P^r Q^{n-r}$  és így annak valószínűsége, hogy a működő gépek száma  $r$  legyen:

$$\binom{n}{r} P^r Q^{n-r},$$

vagyis ez esetben a működő gépek száma binomiális eloszlást követ. Ez az eredmény megtalálható már Feller idézett munkájában is. Amennyiben  $P$  értéke kicsiny, viszont  $n$  igen nagy, úgy közismerten ez a binomiális eloszlás egy Poisson-eloszlással közelíthető meg. Mégpedig ez esetben annak a valószínűsége, hogy egyidejűleg  $r$  gép működjek, közelítőleg

$$\frac{\nu^r}{r!} e^{-\nu},$$

ahol  $\nu = nP$ .

Vizsgáljuk most meg, hogy mekkora lesz az egész üzem teljesítményének várható értéke és szórása. Ha az egész üzem teljesítményét  $\eta$ -val jelöljük, úgy nyilván  $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$  és így a valószínűségszámítás jólismert tételei szerint  $\eta$  átlagos (várható) értéke

$$(2.1) \quad M = \bar{\eta} = \sum_{k=1}^n P_k \bar{f}_k$$

és szórása

$$(2.2) \quad \sigma = \sigma(\eta) = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}.$$

Másrészt a valószínűségszámítás centrális határeloszlás-tétele szerint nagyszámú független valószínűségi változó összegének eloszlása jó közelítéssel normális (Gauss—Laplace-féle) eloszlású, hacsak az egyes változókra bizonyos igen kevés megszorítást jelentő feltevések teljesülnek. Ezek a feltevések az általunk vizsgált esetben lényegében azt jelentik, hogy az egyes gépek teljesítményei az egész üzem teljesítményéhez képest egyenként igen kicsinyek. Arra a



tényre, hogy az üzem legnagyobb teljesítményű gépeit külön kell figyelembe venni, *D. Sz. Livsic* is felhívta a figyelmet; az általa adott ún. kéttagú képletben az üzem legnagyobb teljesítményű gépeire külön szükségleti tényezőt állapít meg, amely lényegesen nagyobb, mint a kis fogyasztókra vonatkozó szükségleti tényező és az egész üzem szükségleti tényezőjét úgy állapítja meg, hogy a nagyfogyasztók össz-szükségletét és a kisfogyasztók össz-szükségletét összeadja. Ha a legnagyobb teljesítményűek száma  $x$ , az összes fogyasztók száma  $n$ , továbbá a nagyteljesítményűek szükségleti tényezője  $a$ , a kisebb teljesítményűeké  $b$ , végre a nagyteljesítményűek névleges összteljesítménye (beépített kapacitása)  $N_x$ , a kisebb teljesítményűeké pedig  $N_{n-x}$ , akkor *Livsic* képlete szerint az üzem összes időegység alatti energiaszükséglete, teljesítménye:

$$N_{sz} = aN_x + bN_{n-x}.$$

Így ha  $N_n$  jelenti az egész üzem névleges összteljesítményét (beépített kapacitását), akkor az egész üzem szükségleti tényezőjét  $t$ -vel jelölve

$$t = \frac{N_{sz}}{N_n} = a \frac{N_x}{N_n} + b \frac{N_{n-x}}{N_n}.$$

Figyelembevéve, hogy  $N_x + N_{n-x} = N_n$  és bevezetve a  $c = a - b$  és  $\frac{N_x}{N} = q$  jelöléseket

$$t = b + cq.$$

*Livsic* képlete nyitva hagyja azt a problémát, hogyan lehet az  $a$  és  $b$  szükségleti tényezőket elméletileg meghatározni, ezeket empirikus adatokként kezeli. Kétségtelen, hogy már működő üzemeknél ezek valóban empirikusan meghatározhatók és ennek alapján új üzemekre is esetleg lehet következtetéseket levonni. De nyilvánvalóan nagy gyakorlati jelentősége van annak, hogy ezeket a tényezőket a fogyasztásra vonatkozó adatokból elméleti úton meghatározzuk és éppen ez dolgozatunk célja. Először a kis teljesítményűek esetével foglalkozunk, vagyis feltesszük, hogy  $q = 0$  és így  $t = b$ , ezután fogunk külön kitérni a legnagyobb teljesítményűek esetére. Nemcsak  $b$  elméleti meghatározásának problémáját oldjuk meg, hanem azt is kimutatjuk, hogy a *Livsic* kéttagú képletében szereplő  $a$  tényező is meghatározható elméleti úton.

Ezek előrebocsátása után térjünk vissza a szükségleti tényező elméleti meghatározására. Ha a nagy teljesítményűeket figyelmen kívül hagyjuk, akkor, mint már említettük, az összteljesítmény ingadozásai (közelítőleg) a normális eloszlás törvényét követik és így 99,99% valószínűséggel az összteljesítmény értéke az  $\bar{\eta} - 4\sigma(\eta)$  és  $\bar{\eta} + 4\sigma(\eta)$  határok közé fog esni. Tehát 99,99%-os biztonsággal\* a gyakorlatilag előforduló legnagyobb teljesítmény

$$(2.3) \quad \eta_f + 4\sigma(\eta_f) = \sum_{k=1}^n P_k f_k + 4 \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}.$$

\* Mivel a teljesítmény ingadozásai csak közelítőleg követik a normális eloszlás törvényét: a biztonság valójában valamivel kisebb lehet, de mint később kimutatjuk, 99% alá nem süllyed.

és így a szükségleti tényező

$$(2.4) \quad t = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \bar{f}_k + 4 \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}}{\sum_{k=1}^n \bar{f}_k}$$

lesz. E képletben a nevezőben szereplő  $\sum_{k=1}^n \bar{f}_k$  mennyiség nem más, mint az üzem beépített kapacitása (névleges összteljesítménye).

A (2.4) képlet az általános esetre vonatkozik. Vizsgáljunk most meg néhány speciális esetet.

1. *Az egyes gépek teljesítménye állandó.* Ebben az esetben

$$\bar{f}_k = f_k \quad \text{és} \quad s_k = 0, \quad \text{azaz} \quad \sigma_k = \sqrt{P_k Q_k f_k^2}$$

és így

$$(2.5) \quad t = \frac{\sum_{k=1}^n P_k f_k + 4 \sqrt{\sum_{k=1}^n P_k Q_k f_k^2}}{\sum_{k=1}^n f_k}.$$

2. *Az összes gépek kihasználási fokai egyenlők.* Ebben az esetben  $P_k = P$  és így

$$(2.6) \quad t = P + \frac{4 \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}}{\sum_{k=1}^n \bar{f}_k}.$$

3. *Az összes gépek egyformák, tehát  $\bar{f}_k = \bar{f}$ ,  $s_k = s$ ;* az egyes gépeknek kihasználási fokai különbözők lehetnek. Ebben az esetben, bevezetve a

$$\bar{P} = \frac{P_1 + \dots + P_n}{n}, \quad \text{továbbá} \quad \frac{\sum P_k Q_k}{n} = \bar{R}$$

jelölést, kapjuk, hogy

$$(2.7) \quad t = \bar{P} + 4 \sqrt{\frac{\bar{P} s^2 + \bar{R}}{\bar{f}^2}}.$$

4. Az összes gépek egyformák és kihasználási fokaik is egyenlők. Ebben az esetben (2.7)-ben  $P = \bar{P}$ ,  $R = PQ$ , úgyhogy

$$(2.8) \quad t = P + 4 \sqrt{\frac{PQ + \frac{Ps^2}{\bar{f}^2}}{n}}.$$

5. Az összes gépek egyformák, kihasználási fokaik is egyenlők, továbbá a gépek teljesítményei állandók. Ebben az esetben  $s = 0$  és így (2.8)-ból

$$(2.9) \quad t = P + 4 \sqrt{\frac{PQ}{n}}.$$

Ha  $P$  értéke kicsiny, úgy  $\sqrt{Q}$  közel lesz 1-hez és így (2.9) helyett használhatjuk az egyszerűbb

$$(2.10) \quad t = P + 4 \sqrt{\frac{P}{n}}$$

képletet. Ez 5. esetben kihasználási tényező helyett beszélhetünk egyidejűségi tényezőről is, mivel egyforma és állandó teljesítményű gépek esetében a teljesítmény csak a működő gépek számától függ.

A most tárgyalt speciális esetek egyben fényt vetnek az általános képletre is. A  $t$  szükségleti tényező két tag összegével egyenlő: az első az üzem gépkihhasználási tényezője; ez nem más, mint az egyes gépek kihasználási fokainak súlyozott közepe, ahol súlyokként az egyes gépek átlagos teljesítményei szerepelnek. Ez a tag egyébként nem más, mint az üzem átlagos teljesítményének és a maximális teljesítménynek a hányadosa. Jelöljük az üzem gépkihhasználási tényezőjét az általános esetben  $\bar{P}$ -sal, vagyis legyen

$$(2.11a) \quad \bar{P} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \bar{f}_k}{\sum_{k=1}^n \bar{f}_k},$$

akkor

$$(2.11b) \quad t = \bar{P} + 4 \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}}{\sum_{k=1}^n \bar{f}_k}.$$

A szükségleti tényező másik tagja a teljesítmény ingadozását képviseli. Ennek a tagnak a nagysága attól függ, hogy az egyes gépek teljesítményeinek ingadozásai mennyire egyenlítődnek ki. A (2.7)–(2.10) képletek azt mutatják,



hogy egyforma gépek esetében ez a tag fordítottan arányos a gépek számának négyzetgyökével, tehát a gépek számát növelve a kiegyenlítődés fokozódik és így a szükségleti tényező csökken és egyre inkább megközelíti a kihasználási tényezőt, annál azonban mindig valamivel nagyobb marad.

A szükségleti tényező változását a gépek számának függvényében az 1. ábra mutatja. Erről látható, hogy a gépek számának növelésével a szükségleti tényező aszimptotikusan közeledik a kihasználási tényezőhöz. A  $P$  kihasználási tényező különböző értékeinek más és más görbék felelnek meg. Az 5. esetben, amikor az összes gépek egyformák, a szükségleti tényezőnek a gép-számtól való függését leíró függvény egyetlen paramétertől,  $P$  értékétől függ. Nagyobb  $P$  esetben nemcsak  $t$  határértéke lesz nagyobb, hanem a görbe menete is megváltozik; a különböző  $P$  értékeknek megfelelő görbék egymás felett helyezkednek el és a nagyobb  $P$  értékhez tartozó görbe valamivel lassabban lejt.

Eddigi eredményeink összefoglalása előtt a (2.4)-nek szemléletesebb alakot adhatunk. Vezessük be ebbe ugyanis az

$$n_e = \frac{\left( \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right)^2}{\sum_{k=1}^n \bar{f}_k^2}$$

viszonyt úgy, hogy a (2.4)-beli nevezővel a számláló mindkét tagjában, mégpedig a másodikban a gyök alatt  $(\sum \bar{f}_k)^2$  helyett mindjárt  $n_e \sum \bar{f}_k^2$ -tel osztunk. Akkor (2.4) helyébe

$$(2.12) \quad t = \bar{P} + 4 \sqrt{\frac{\bar{R} + \bar{S}}{n_e}}$$

lép a

$$\bar{P} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \bar{f}_k}{\sum_{k=1}^n \bar{f}_k}, \quad \bar{R} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k Q_k \bar{f}_k^2}{\sum_{k=1}^n \bar{f}_k^2}, \quad \bar{S} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k s_k^2}{\sum_{k=1}^n \bar{f}_k^2}$$

értékekkel.

Ha a gépek *teljesítményre és kihasználásra* nézve megegyeznek, akkor  $\bar{f}_k = f$ ,  $s_k = s$ ,  $P_k = \bar{P} = P$  és  $n_e = n$ , amivel a (2.12) a (2.8)-ra egyszerűsödik. A gépek működési időegységre eső — különböző — átlagos  $\bar{f}_k$  fogyasztásánál azonban *Cauchy* egyenlőtlensége szerint  $n_e < n$ . A *teljesítményre és kihasználásra nézve egyenlő* gépek eme  $n_e$  számát, amely a vizsgált különböző  $n$  géppel azonos szükségleti tényezőre vezet, *effektív gépszámnak* nevezzük. E képzelt  $n_e$  gép mindegyikének kihasználási fokát  $\bar{P}$ -nak, teljesítményének átlagát az  $\bar{f}_k$  számok átlagának választhatjuk. Ezzel e teljesítmény szórása egyértelműen van meghatározva.

Eddigi eredményeinket a következőképpen foglalhatjuk össze: *Ha egy üzemben ugyanaz az áramforrás táplálja a  $G_1, \dots, G_n$  gépeket, a  $G_k$  gép kihasználási foka  $P_k = 1 - Q_k$ , működése alatt az időegységre eső energiafogyasztásának, teljesítménynek átlaga  $\bar{f}_k$ , míg szórása  $s_k$ , úgy bevezetve a következő jelöléseket:*

$$(2.13) \quad \bar{P} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \bar{f}_k}{\sum_{k=1}^n \bar{f}_k},$$

( $P$  a gépek kihasználási fokának középértéke)

$$(2.14) \quad n_e = \frac{\left( \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right)^2}{\sum_{k=1}^n \bar{f}_k^2},$$

( $n_e$  az ú. n. »effektív gépszám«)

$$(2.15) \quad \bar{R} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k Q_k \bar{f}_k^2}{\sum_{k=1}^n \bar{f}_k^2}$$

és

$$(2.16) \quad \bar{S} = \frac{\sum_{k=1}^n s_k^2 P_k}{\sum_{k=1}^n \bar{f}_k^2}$$

jelöléseket, a szükségesleti tényezőre a következő kifejezést nyerjük:

$$(2.17) \quad t = \bar{P} + 4 \sqrt{\frac{\bar{R} + \bar{S}}{n_e}}.$$

*Ha a gépek egyformák, tehát  $\bar{f}_k = f$  és  $s_k = s$ , úgy  $n_e = n$ , továbbá  $P, R$  és  $S$  kifejezései a következőképpen egyszerűsödnek:*

$$P = \frac{\sum_{k=1}^n P_k}{n}, \quad R = \frac{\sum_{k=1}^n P_k Q_k}{n} \quad \text{és} \quad S = \frac{s^2 P}{f^2},$$

tehát

$$(2.18) \quad t = P + 4 \sqrt{\frac{R + s^2 \frac{P}{f^2}}{n}},$$

míg ha nemcsak a gépek egyformák, hanem kihasználási fokaik is egyenlők, vagyis  $P_k = P$ , úgy  $R = PQ$ , tehát

$$(2.19) \quad t = P + 4 \sqrt{\frac{PQ + s^2 \frac{P}{f^2}}{n}}.$$

Ha az egyes gépek teljesítménye állandó, úgy  $\sigma = 0$  és ennek megfelelően  $S = 0$ , tehát

$$(2.20) \quad t = P + 4 \sqrt{\frac{PQ}{n}}.$$

Eddig nem érintettük azt a kérdést, hogy mekkora gépszámtól kezdve alkalmazhatók tételeink. Említettük, hogy  $\eta = \xi_1 + \dots + \xi_n$  eloszlása közelítőleg normálisnak tekinthető; mármint eredményeink alkalmazhatósága azon múlik, mennyire jó ez a közelítés. A közelítés megbecsülésére ismeretesebb bizonyos általános eredmények, ezek azonban csak igen nagy  $n$  esetében adnak jó becslést. Ezzel szemben alkalmazható itt a Csebisev-féle egyenlőtlenségnek egy általánosítása, amely a következőképpen hangzik: Ha  $\eta = \xi_1 + \dots + \xi_n$ , ahol a  $\xi_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) valószínűségi változók függetlenek és korlátosak,  $|\xi_k - M_k| \leq K$ , ahol  $M_k$  jelenti  $\xi_k$  várható értékét, továbbá, ha  $\sigma = \sigma(\eta)$  jelenti  $\eta$  szórását és  $M = \Sigma M_k$  az  $\eta$  várható értékét, úgy annak a valószínűsége, hogy  $|\eta - M| > \mu\sigma$  legyen, kisebb mint  $2 \exp \left[ -\frac{\mu^2}{2} \left( 1 + \frac{\mu K}{2\sigma} \right)^{-2} \right]$ ,

ahol  $\mu$  tetszőleges,  $\frac{\sigma}{K}$ -nál nem nagyobb szám.\*

Esetünkben  $\mu = 4$ ,  $M = \Sigma f_k P_k$ , és  $K = \text{Max } |\xi_k - P_k f_k|$ ,  $\sigma = \sqrt{\Sigma \sigma_k^2}$ . Határozzuk most meg, hogy  $n$  milyen értékeitől kezdve nyújt a képlet 99%-os biztonságot, azaz, mikor lesz annak a valószínűsége, hogy  $|\eta - \Sigma P_k f_k| > 4\sigma$ , kisebb 0,01-nál. Ehhez elégséges az elmondott egyenlőtlenség szerint, hogy

$$2 \exp \left[ -8 \left( 1 + \frac{2K}{\sigma} \right)^{-2} \right] < 0,01 \text{ legyen, ami teljesül, ha } \frac{K}{\sigma} \leq 0,12.$$

Tehát bebizonyítottuk, hogy eredményeink 99%-os biztonsággal alkalmazhatók, ha csak  $\frac{K}{\sigma} \leq 0,12$ . Abban az esetben, ha az összes gépek egyformák és teljesítményük állandó, továbbá  $P_k = P < 0,5$ , úgy  $K = fQ$ ,

\* Lásd [5]. Ezen egyenlőtlenség bizonyításának alapgondolata Sz. N. Bernstein-től [6] származik, de ilyen alakban [5]-ben található először.



$\sigma = f\sqrt{nPQ}$  és így  $\frac{K}{\sigma} = \sqrt{\frac{Q}{Pn}}$ ; vagyis a  $\frac{K}{\sigma} \leq 0,12$  feltétel azt jelenti, hogy  $n \geq \frac{70Q}{P}$ . Ez esetben  $\frac{\sigma}{K} \geq 8$ , tehát a  $\frac{\sigma}{K} \geq \mu$  feltétel is teljesül.

Ha például az összes gépek egyformák, és  $P = 0,38$  (Mukoszejev [7] szerint ez  $P$  értéke egyfázisú, egyenlő teljesítményű ívhegesztők esetében)

úgy az egyidejűségi tényező  $t = P + 4\sqrt{\frac{PQ}{n}}$  képlete alkalmazható, ha  $n \geq 114$ ; ha  $P = 0,5$ , úgy az egyidejűségi tényező képlete alkalmazható, hacsak  $n \geq 70$ .

Kisebbségi értékekre a 4-es tényező helyett 4,5-es tényezővel kell dolgozni. Ebben az esetben az említett egyenlőtlenség alkalmazása arra az eredményre vezet, hogy a

$$(2.21) \quad t = P + 4,5 \sqrt{\frac{R+S}{n_e}}$$

képlet 99%-os biztonságot ad, hacsak teljesül a  $\frac{K}{\sigma} \leq 0,168$  feltétel. Egyforma és állandó teljesítményű gépek mellett ez azt jelenti, hogy az egyidejűségi tényezőre vonatkozó

$$(2.22) \quad t = P + 4,5 \sqrt{\frac{PQ}{n}}$$

képlet alkalmazható, hacsak  $n \geq \frac{35Q}{P}$ , tehát például  $P = 0,5$  esetében, ha  $n \geq 35$  és  $P = 0,38$  esetében, hacsak  $n \geq 56$ .

Megjegyzendő, hogy ha nem törekszünk 99%-os biztonságra, hanem például megelégszünk 95%-os biztonsággal, úgy a 4-es tényező 3-assal pótolható, vagyis a

$$(2.23) \quad t = P + 3 \sqrt{\frac{R+S'}{n_e}}$$

képlet alkalmazható, mégpedig ha  $\frac{K}{\sigma} \leq 0,08$ ; egyforma gépek esetében ez azt jelenti, hogy  $n \geq \frac{156Q}{P}$ . Hasonlóképpen 95%-os biztonságot írva elő, még nagyobb gépszám esetében a 3-as tényező tovább csökkenthető, mégpedig 2,8-ra, vagyis alkalmazható a

$$(2.24) \quad t = P + 2,8 \sqrt{\frac{R+S}{n_e}}$$

képlet, hacsak  $\frac{K}{\sigma} \leq 0,03$ , azaz egyforma gépek esetében, ha  $n \geq \frac{1000Q}{P}$ .

Megjegyzendő, hogy a valóságban a szóbanforgó képletek jóval nagyobb biztonságot nyújtanak, mint ahogy azt megadtuk és így a gyakorlatban általa-

ban a 3-as tényezővel lehet dolgozni már 100-on aluli gépszám és nem túlságosan kicsiny  $P$  esetében is. Ugyanis a felhasznált becslés, bár a rendelkezésre álló becslések közül a legélesebb, még mindig a valóságnál kb. kétszer nagyobb értéket ad a szóbanforgó valószínűségekre.

Az eddig elmondottak nagyszámú kisteljesítményű gép esetére vonatkoztak. Áttérünk most kisszámú nagyteljesítményű gép vizsgálatára. Ha  $x$  számú egyforma fogyasztónk van, úgy annak a valószínűsége, hogy egyidejűleg  $y$  számú működjenek ezen gépek közül, a binomiális eloszlás szerint

$$(2.25) \quad \binom{x}{y} P^y Q^{x-y}.$$

Ennek alapján annak a valószínűsége, hogy egyidejűleg több, mint  $z$  számú gép működjenek az  $x$  gép közül

$$(2.26) \quad V(z) = \sum_{y=z+1}^x \binom{x}{y} P^y Q^{x-y}.$$

Mármost az  $x$  számú gép  $\frac{z}{x}$  egyidejűségi tényezőjét úgy számíthatjuk ki, hogy meghatározzuk, hogy mely  $z$  értékre lesz az ebben a képletben szereplő  $V(z)$  valószínűség 0,01-nél kisebb. Ez kicsiny  $x$  értékek mellett közvetlen számolással történhet és nincs értelme közelítő képlet megadásának. Így például, ha  $x = 5$ , úgy  $z = 4$  esetben teljesül a mondott feltétel, ha  $P^5 < 0,01$ , vagyis ha  $P < 0,4$ ;  $z = 3$  esetben is teljesül, ha  $P^5 + 5P^4Q = 5P^4 - 4P^5 < 0,01$ , vagyis ha  $P < 0,22$ . Hasonlóképpen, ha  $x = 3$ , úgy  $z = 2$ -re teljesül a mondott feltétel, ha  $P^3 < 0,01$ , vagyis ha  $P < 0,21$ . Így tehát  $P < 0,21$  esetében ha 3 nagyteljesítményű gépünk van, 0,66 az egyidejűségi tényező, hasonlóképpen ha 5 nagyteljesítményű gépünk van, úgy 0,8 az egyidejűségi tényező, ha  $0,22 < P < 0,4$  és 0,6 az egyidejűségi tényező, ha  $P < 0,22$ . Ily módon állapítható meg elméleti úton a *Livsic* képletében szereplő  $a$  egyidejűségi tényező a nagyteljesítményű gépekre vonatkozólag.

Befejezésül még egy problémával kívánunk foglalkozni: tegyük fel, hogy egy üzem több műhelyének gépei ugyanabból az áramforrásból táplálkoznak és a műhelyekre külön-külön ismerjük az egyidejűségi, illetve a szükségleti tényezőt. Kérdés: hogyan lehet ennek alapján az egész üzem egyidejűségi tényezőjét meghatározni? A kérdés megoldása az elmondottak alapján igen egyszerűen történhet. Legyenek ugyanis  $\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(m)}$  az egyes műhelyek teljesítményei,  $N^{(1)}, \dots, N^{(m)}$  az egyes műhelyek beépített kapacitásai, továbbá  $N^{(1)}P^{(1)}, \dots, N^{(m)}P^{(m)}$  az egyes műhelyek teljesítményeinek várható értékei és  $S^{(1)}, \dots, S^{(m)}$  a műhelyek szórásai. Akkor az egyes műhelyek szükségleti tényezői az elmondottak szerint a következők lesznek: a  $j$ -ik műhely szükségleti tényezőjét  $t^{(j)}$ -vel jelölve

$$t^{(j)} = P^{(j)} + \frac{4S^{(j)}}{N^{(j)}}.$$

Mivel az egész üzem teljesítménye az egyes műhelyek teljesítményeinek összege, az egész üzem teljesítményét  $\eta$ -val, az egész üzem beépített kapacitását pedig  $N$ -el jelölve kapjuk, hogy

$$\eta = \eta^{(1)} + \dots + \eta^{(m)} \quad \text{és} \quad N = N^{(1)} + \dots + N^{(m)}.$$

Tehát az egész üzem átlagos teljesítménye

$$\bar{\eta} = \frac{1}{N} \sum_j N^{(j)} P^{(j)}$$

továbbá az összteljesítmény szórása

$$\sigma(\eta) = \sqrt{\sum_j (S^{(j)})^2}$$

és így az egész üzem egyidejűségi tényezője

$$T = \sum_j \frac{N^{(j)}}{N} P^{(j)} + \frac{4}{N} \sqrt{\sum_j (S^{(j)})^2}.$$

Megjegyzendő, hogy mivel az egész üzemre nézve a gépek száma általában igen nagy, az egész üzem egyidejűségi tényezőjének számításánál általában a 4-es tényező 3-assal, sőt esetleg 2,8-el pótolható és így az egész üzem egyidejűségi tényezője a

$$T = \sum_j P^{(j)} \frac{N^{(j)}}{N} + 3 \sqrt{\frac{\sum_j (S^{(j)})^2}{N^2}}$$

képlet alapján számítható. Ez viszont azt jelenti, hogy bevezetve a

$$q_j = \frac{N^{(j)}}{N}$$

jelölést, az egész üzem szükségleti tényezője és a műhelyek szükségleti tényezői között a következő összefüggés áll fenn:

$$T = \sum_{j=1}^m q_j t^{(j)} + \left[ \frac{3}{4} \sqrt{\sum_{j=1}^m q_j^2 (t^{(j)} - P)^2} - \sum_{j=1}^m q_j (t^{(j)} - P) \right].$$

Hogy ezt az összefüggést jól megértsük, vizsgáljuk azt a speciális esetet, amikor az összes gépek egyformák, teljesítményük állandó, továbbá minden

műhelyben ugyanannyi ( $n$  számú) gép van; ez esetben, ha  $t = P + \sqrt{\frac{\bar{P}}{n}}$  az

egyes műhelyek szükségleti (egyidejűségi) tényezője, úgy nyilván  $T = P + \sqrt{\frac{P}{nm}}$

a teljes üzem egyidejűségi tényezője. Ez utóbbi tehát lényegesen kisebb, mint az egyes műhelyek egyidejűségi tényezője; mégpedig

$$(2.27) \quad T = \frac{t}{\sqrt{m}} + P \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{m}} \right),$$



vagyis  $\frac{1}{\sqrt{m}}$  ill.  $1 - \frac{1}{\sqrt{m}}$  súlyokkal vett súlyozott középértéke az egyes műhe-

lyek egyidejűségi tényezőjének és gépkihasználati tényezőjének.

Eddig kizárólag az egyidejűségi, illetve szükségleti tényező kiszámításával foglalkoztunk, amihez elegendő volt az üzemi teljesítmény várható értékének és szórásának ismerete. Ami pedig a teljesítmény ingadozásainak eloszlásfüggvényét illeti, elegendő volt annyit tudni, hogy ez közelítőleg megegyezik a normális eloszlásfüggvénnyel. Rá szeretnénk azonban befejezésül mutatni arra, hogy a teljesítmény ingadozásainak további vizsgálatához eloszlásuknál többet kell tudnunk. Erre meg is van a lehetőség. Abban az esetben ugyanis, ha az egyes gépek teljesítményei állandóak és egy egységnyi teljesítmény egészszámú többszörösei (ezt mindig feltehetjük, hiszen ha az egységet elég kicsinyre választjuk és minden gép teljesítményét felfelé kerekítjük, úgy, hogy az egység egészszámú többszöröse legyen, ezzel ezt mindig elérhetjük), abban az esetben a teljes teljesítmény eloszlása ú. n. *összetett Poisson-eloszlás* lesz. Ez eloszlások részletes tárgyalása megtalálható a [8] és [9] dolgozatokban, azért erre itt nem térünk ki részletesen, csak megjegyezzük, hogy a teljesítmény-ingadozások további vizsgálatának is van gyakorlati jelentősége.

### 3. §. Megjegyzések az eredmények gyakorlati felhasználásával és tapasztalati ellenőrzésével kapcsolatban.

Összehasonlítottuk eredményeinket hazai adatokkal és jó megegyezést kaptunk. Érdekes megemlíteni, hogy ez adatok feldolgozásánál azt találtuk, hogy a gépipari üzemekben a gépkihasználati tényező értéke 0,2 körül mozog: a megvizsgált 39 üzem közül a  $P$  gépkihasználati tényező értéke 28 esetben 0,18 és 0,21 között volt, 4 esetben 0,14 és 0,17 között, míg 7 esetben 0,22 és 0,25 között (2. ábra). Ez a tény arra mutat, hogy a gyakorlatban üzemtípusokat lehet megállapítani  $P$  értékének megfelelően és azonos típusba tartozó üzemekben ugyanaz az összefüggés áll fenn a gépszám és az egyidejűségi tényező között. Ami a pontosabb vizsgálatot illeti, a következőképpen járhatunk el (95% biztonsággal dolgozva):

1. *Egyforma gépek esete*: Ha nincs mód a

$$t = P + 3 \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

képletben szereplő  $P$  állandó közvetlen meghatározására, úgy egyetlen  $(n, t)$  értékpárból  $P$  értéke meghatározható a következőképpen:

$$A \quad (9 + n)P^2 - (2tn + 9)P + nt^2 = 0,$$

másodfokú egyenletből  $P$ -re két pozitív értéket kapunk:

$$\frac{2tn + 9 \pm \sqrt{(2tn + 9)^2 - 4nt^2(9 + n)}}{2(9 + n)}$$

Könnyű belátni, hogy a helyes érték mindig a kisebbik, azaz

$$P = \frac{2tn + 9 - \sqrt{36t(1-t)n + 81}}{2(9+n)}.$$

2. *Különböző gépek esete.* Ha nincs mód a  $P_k$ ,  $s_k$  számok közvetlen meghatározására, akkor a

$$t = P + 3 \sqrt{\frac{R+S}{n_e}}$$

összefüggést úgy tekintjük, mint egy  $k = P + \frac{\Pi}{\sqrt{n_e}}$  alakú általános össze-

függést és a  $P$  és  $\Pi$  ismeretlen állandókat két összetartozó adatpárból határozzuk meg. Összetartozó adatpáron egy  $(t, n_e)$  értékpárt értünk; természetesen az  $n_e$  effektív gépszám meghatározásához ismernünk kell az  $f_1, \dots, f_n$  teljesítményeket, ezek azonban általában a gyakorlatban valóban ismeretesek. Ha tehát ugyanarra a típusú üzemre vonatkozólag két ilyen adatpárunk van — mondjuk  $(t^{(1)}, n_e^{(1)})$  és  $(t^{(2)}, n_e^{(2)})$ , úgy megoldva a

$$t^{(1)} = P + \frac{\Pi}{\sqrt{n_e^{(1)}}}$$

$$t^{(2)} = P + \frac{\Pi}{\sqrt{n_e^{(2)}}}$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk, hogy

$$P = \frac{t^{(1)} \sqrt{n_e^{(2)}} - t^{(2)} \sqrt{n_e^{(1)}}}{\sqrt{n_e^{(1)}} - \sqrt{n_e^{(2)}}}$$

és

$$\Pi = \frac{(t^{(1)} - t^{(2)}) \sqrt{n_e^{(1)} n_e^{(2)}}}{\sqrt{n_e^{(2)}} - \sqrt{n_e^{(1)}}}.$$

Célszerű két olyan adatot választani, amelyeknél  $n_e^{(1)}$  és  $n_e^{(2)}$  ninosenek közel egymáshoz; ellenkező esetben ugyanis a hibák nagyon eltorzítják  $P$  és  $\Pi$  értékeit. Amennyiben mód van arra, hogy az üzem teljesítményét hosszabb időn át megfigyeljük, úgy  $P$  tapasztalatiilag meghatározható, mint az üzem kihasználási tényezője. Ez esetben  $\Pi$  meghatározásánál csak egyetlen  $(t, n_e)$  adatpár ismerete szükséges. Ha ugyanis  $t$ ,  $n_e$  és  $P$  ismeretesek, úgy

$$\Pi = \sqrt{n_e}(t - P).$$

Foglaljuk össze e § eredményeit:

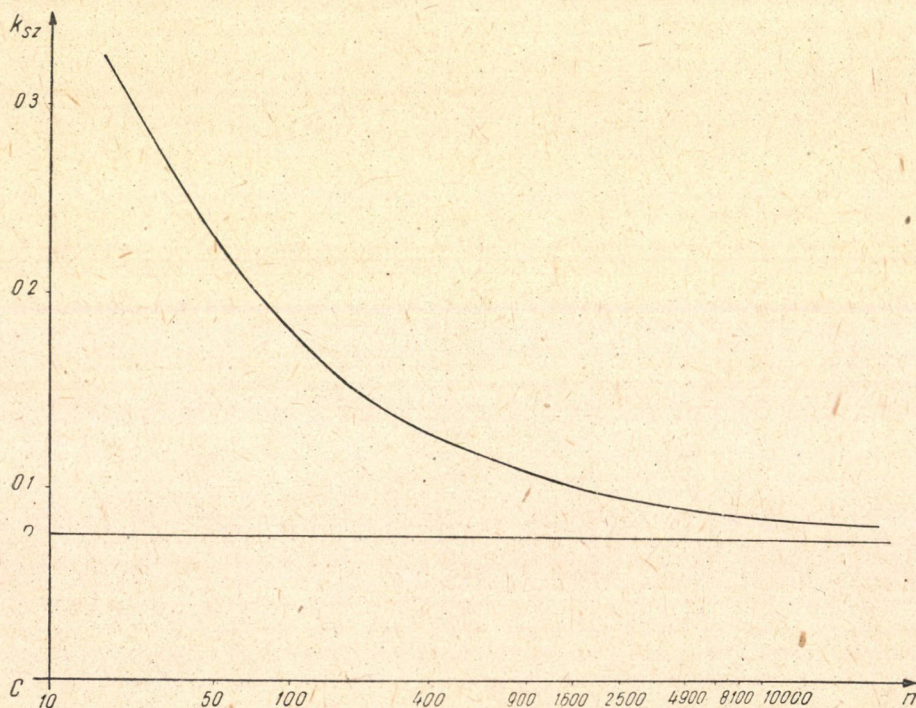
Meghatározott típusú üzem esetében a  $t$  szükségesleti tényező és az  $n_e$  effektív gépszám között a következő összefüggés áll fenn:

$$t = P + \frac{\Pi}{\sqrt{n_e}}.$$

Itt  $P$  jelenti az üzem kihasználási tényezőjét,  $\Pi$  pedig egy, az egyes gépek igénybevételestől, fogyasztásától és fogyasztásának ingadozásától függő állandó, továbbá az  $n_e$  effektív gépszámot az egyes gépek  $f_1, \dots, f_n$  időegység-beli fogyasztásaiból, teljesítményeiből a következőképpen lehet meghatározni:

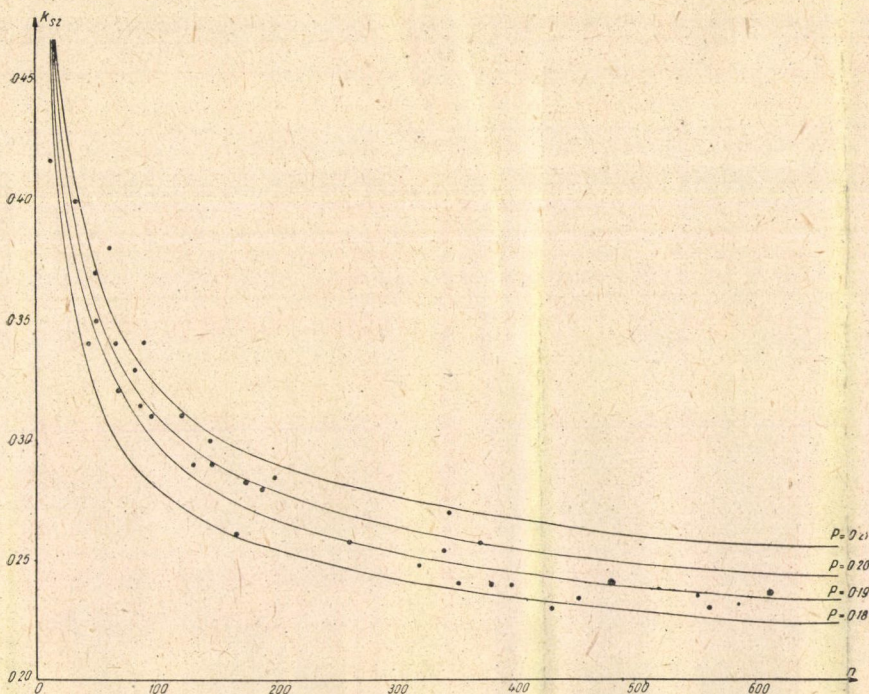
$$n_e = \frac{\left( \sum_{k=1}^n f_k \right)^2}{\sum_{k=1}^n f_k^2}.$$

Az  $n_e$  effektív gépszám mindig kisebb, mint a tényleges gépszám, kivéve, ha az összes gépek teljesítményei egyenlők, amikor is  $n_e = n$ . (Figyeljük meg hogy  $n_e$  dimenziótlan mennyiség!) A  $P$  szám tapasztalatilag megállapítható, ha az üzem teljesítményét hosszabb időn át megfigyeljük, míg  $\Pi$  meghatároz,



1. ábra





2. ábra

ható egyetlen összetartozó  $(t, n_e)$  számpárból, ha már  $P$  ismeretes. Ha  $P$  értéke sem ismeretes, akkor két összetartozó  $(t, n_e)$  számpárból  $P$ -re és  $\Pi$ -re két lineáris egyenletet kapunk, melyből ezek meghatározhatók.

Befejezésül megjegyezzük, hogy eredményeink nemcsak egyes üzemek elektromos energiaszükségletének vizsgálatánál, hanem pl. városok világítási áramszükségletének, gáz- vagy vízfogyasztásának vizsgálatánál is alkalmazhatók, a megfelelő módosításokkal. Ezekre a kérdésekre más alkalommal vissza kívánunk térni.

#### IRODALOM

1. H. A. Adler and K. W. Miller: A new approach to probability problems in electrical engineering. Transact. Amer. Inst. Electr. Engineers. 65 (1946) 630—632. o.
2. W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications I. I. Wiley and Sons. New York. 1950. 384. o.
3. A. Rényi: On some problems concerning Poisson processes. Publicationes Mathematicae. 2 (1951) 66—73. o.
4. Takács L.: Bekövetkezési és koincidenciajelenségek tárgyalása időtartamban tetszőleges eloszlású történések esetén. Magyar Tud. Akadémia III. Oszt. Közleményei. I (1951) 371—386. (Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae II (1951) 275—298. o.)
5. Rényi A.: Valószínűségszámítás (Egyetemi Jegyzet). Tankönyvkiadó, 1951/52. 444. old.
6. С. Н. Бернштейн: О некоторых видоизменениях неравенства Чебышева, доклады Акад. Наук СССР 17 (1937) 275—2780.

7. Ю. Л. Мукосеев; Вопросы электрооборудования промышленных предприятий-Москва. 1951. L. még a következő dolgozatot: С. М. Лившиц, О расчетах и исследовании электрических промышленных нагрузок, Электричество №5. 1952.

8. Jánossy L., Rényi A., Aczél J.: Összetett Poisson eloszlásokról. I. Magyar Tud. Akadémia III. oszt. Közleményei. I (1951) 315—328. o. (On composed Poisson distributions. I. Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. I (1950) 209—224. o.)

9. Rényi A.: Összetett Poisson eloszlásokról II. Magyar Tud. Akadémia III. oszt. Közleményei. I (1951) 329—341. o. (On composed Poisson distributions II. Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. II (1951) 83—98. o.)

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ И ФАКТОРА ОДНОВРЕМЕННОСТИ, Т. Е. ПОТРЕБЛЕНИЯ ЗАВОДОВ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А. РЕНЬИ—Т. СЕНТМАРТОНИ

### Резюме

Эффективная мощность (затрата энергии в единице времени) заводов машиностроительной промышленности не достигает своего теоретически возможного максимума (т. н. встроенной мощности), а колеблется под этим. Верхняя граница частного этих двух величин, вероятность которой еще принимается практически во внимание, называется фактором потребности  $t$  завода. В случае завода состоящего из машин с тождественной мощностей, он упрощается на фактор одновременности. Формулы (2,4) — (2,12) доставляют для этих факторов величины с уровнем вероятности 99,99%, вместо грубых эмпирических правил, бывших до сих пор. А именно: в случае  $n$  машин, действующих независимо друг от друга, при временной плотности вероятности включения  $\lambda_k$  и при среднем времени функционирования  $\frac{1}{\lambda_k}$   $k$ -ой машины, 3) если  $P_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}$  — степень эксплуатации этой машины, и  $f_k$  — ее мощность в случае функционирования.

Работа содержит оценку и для наименьшего  $n$ , обеспечивающего применяемость формул и дает связь между величинами  $t$  некоторого завода и его цехов.

## DÉTERMINATION PROBABILISTIQUE DU BESOIN D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE D'USINES DE CONSTRUCTION MÉCANIQUE AINSI QUE DE LEURS COEFFICIENTS DE SIMULTANÉITÉ ET DE BESOIN D'ÉNERGIE

A. RÉNYI ET T. SZENTMÁRTONY

### Résumé

La quantité d'énergie consommée pour des usines de construction mécanique par unité de temps n'atteint pas la valeur *maximum possible* nommée puissance installée, mais fluctue considérablement au-dessous de ce dernier. La plus grande valeur que le quotient de ces deux quantités peut atteindre avec une probabilité qui n'est pas négligeable s'appelle le *coefficient de besoin d'énergie*  $t$  de l'usine. Dans le cas d'une usine qui consiste d'un nombre de machine dont chacune a le même besoin d'énergie ce coefficient se simplifie au coefficient de simultanéité. Les formules (2.4) — (2.12) déduites pour ces coefficients fournissent, au lieu des règles empiriques employées jusqu'ici, des valeurs dont le niveau de probabilité est 99%; notamment, en cas d'indépendance des  $n$  machines, avec la densité temporelle de probabilité  $\lambda_k$  et le temps moyen de fonctionnement  $\frac{1}{\mu_k}$  de la machine  $k$ -ième, si  $P_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}$  désigne le degré d'exploitation et  $f_k$  la puissance de cette machine pendant son fonctionnement. L'article donne aussi une estimation concernant le nombre  $n$  minimum assurant la possibilité de l'application des formules, et indique la connexion entre les valeurs de  $t$  d'une usine et de ces ateliers.

## KOMPRESSZOROK ÉS LÉGTARTÁLYOK RACIONÁLIS MÉRTEZÉSE ÜZEMEK SŰRÍTETT LEVEGŐVEL VALÓ ELLÁTÁSÁRA

RÉNYI ALFRÉD

### ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozat a következő probléma megoldását tartalmazza: Egy üzemben több, sűrített levegővel működő gép működik, a gépek véletlenszerűen lesznek be-, illetőleg kikapcsolva. A sűrített levegőt egy kompresszor szolgáltatja, amely egy tartályt tölt fel; a fogyasztók a tartályból kapják a sűrített levegőt. Ha a tartályban egy bizonyos  $\nu_1$  határt meghalad a légnyomás, a kompresszor automatikusan kikapcsolódik és csak akkor kapcsolódik be, ha a nyomás egy bizonyos  $\nu_2 < \nu_1$  határ alá süllyed. A feladat abban áll, hogy meghatározzuk, mekkorának kell lennie a kompresszor teljesítőképességének ahhoz, hogy a nyomás a tartályban gyakorlatilag soha ne süllyedjen egy bizonyos  $\nu_0 < \nu_2$  határ alá, amely még elegendő a gépek zavartalan működésének biztosításához. A probléma megoldása valószínűségszámítási módszerekkel, mégpedig a Markov-féle láncok elméletének felhasználásával történik. — Az eredmények grafikus formában vannak ábrázolva, úgy, hogy adott fogyasztás- és tartálméret mellett a grafikonból számítás nélkül leolvasható, hogy a kompresszort hogyan kell méretezni.

Az ebben a dolgozatban tárgyalt problémával a Gépipari Tervező Intézet felkérésére foglalkozott az Intézet. A probléma jelentőségét az adja meg, hogy ha kompresszorok és légtartályok méretezésénél a valószínűségszámítás alkalmazásán alapuló pontos számításokat végzünk, ezáltal új üzemek létesítésénél jelentős megtakarításokat lehet elérni. A probléma elméleti szempontból ahhoz a problémakörhöz tartozik, amellyel az előző dolgozat [1] foglalkozik: itt is véletlen ingadozásokat mutató energiafogyasztásról van szó. A probléma speciális jellegét az adja meg, hogy egyrészt a sűrített levegővel dolgozó fogyasztók (döngölők, prések stb.) nem közvetlenül a kompresszorból kapják a sűrített levegőt, hanem egy légtartály van közbeiktatva, amelynek feladata éppen abban áll, hogy a fogyasztás véletlen ingadozásait kiegyensúlyozza, másrészt pedig, hogy bizonyos részleges automatikus szabályozás is történik,\* amennyiben a kompresszor automatikusan kikapcsolódik, ha a nyomás a légtartályban egy bizonyos felső határt túlhalad és csak akkor kapcsolódik automatikusan újból be, ha a nyomás a légtartályban egy bizonyos alsó határ alá süllyed. Már itt felhívjuk a figyelmet arra, hogy műszakilag lehetségesnek látszik a berendezés teljes automatizálása, aminek kétségkívül nagy előnyei

\* Ennek következtében lépnek fel a probléma tárgyalásánál sajátos matematikai nehézségek, mégpedig, hogy a légtartály állapotváltozásai nem alkotnak egyszerű Markov-láncot, hanem csak  $n$ -másodrendű Markov-láncot.



volnának.\* Ezt a lehetőséget azonban itt csak felvetjük, a matematikai tárgyalásban csak a részleges automatizálás esetével foglalkozunk.

A tulajdonképpeni feladat, amivel a dolgozat foglalkozik, a következő: meghatározandó, hogy adott légtartálméret és adott fogyasztás mellett milyen teljesítőképességű kompresszorral lehet biztosítani, hogy a tartályban a légnyomás gyakorlatilag soha se süllyedjen azon határ alá, mely még elegendő a gépek működtetéséhez. Ezt a problémát bizonyos — gyakorlatilag megengedhető — egyszerűsítő feltevések mellett oldottuk meg.

A probléma műszaki vonatkozásait illetőleg értékes útmutatásokat kaptunk *Sors László* mérnöktől, a GÉTI munkatársától; ugyancsak ő volt az, aki felismerte, hogy a szóbanforgó kérdés pontos megoldásához matematikai módszerek alkalmazására van szükség, mindezért ezúton köszönetet mondunk neki. Köszönet illeti *Takács Lajost*, Intézetünk munkatársát, akivel ezen munka készítése közben a felmerült problémákat megvitattuk és ezek során több olyan megjegyzést tett, melyeket munkámban fel tudtam használni.

Az 1. § tartalmazza a probléma matematikai formába való öntését, és elvi megoldását, a 2. § a részletes számításokat. A számítások eredményét grafikonok formájában ábrázoltuk, úgyhogy az eredmények gyakorlati alkalmazása során a kívánt eredmény minden számítás nélkül a grafikonról leolvasható legyen. Ezeket a grafikonokat a dolgozat végén közöljük.

A 3. § néhány megjegyzést tartalmaz a dolgozatban tárgyalt problémával kapcsolatban.

### 1. §. A probléma matematikai formában való megfogalmazása

Tegyük fel, hogy egy üzemben  $N$  »fogyasztó« (döngölő, prés, stb.) működik sűrített levegővel, amelyek — amennyiben működnek — időegységenként ugyanannyi sűrített levegőt fogyasztanak. A fogyasztókat időnként bekapcsolják, majd kikapcsolják. Jelöljük a  $t$  időpontban működő gépek számát  $\xi_t$ -vel;  $\xi_t$  értékét csak  $t$  olyan értékeire fogjuk vizsgálni, amelyek egy időegység egész-számú többszörösei, vagyis a  $t = 0, 1, 2, \dots$  értékekre. Az időegység megválasztásával, amely itt igen lényeges, később fogunk foglalkozni. Feltesszük, hogy a gépek ki- és bekapcsolódásai csak a  $t = 0, 1, 2, \dots$  időpontokban történhetnek, vagyis a ki- és bekapcsolások időpontjait mindig egészszámmá kerekítjük; ha az időegységet elég kicsinyre választjuk, ez nem jelent lényeges elhanyagolást. Ugyanúgy, mint az előző dolgozatban [1], belátható, hogy az egyidejűleg működő fogyasztók száma binomiális eloszlást követ, mégpedig ha annak valószínűségét, hogy egyidejűleg  $n$  fogyasztó működik,  $P_n$ -nel jelöljük, úgy\*\*

$$(1.1) \quad V(\xi_t = n) = P_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \quad (n = 0, 1, \dots, N).$$

\* Erre a lehetőségre *H. Steinhaus* lengyel matematikus hívta fel figyelmemet amikor 1952 szeptemberében Wrocławban a sztochasztikus folyamatokra vonatkozó konferencián tartott előadásomban többek között jelen dolgozat eredményeit is ismerttettem.

\*\*  $V(A)$ -val az  $A$  esemény valószínűségét jelöljük.

ahol  $p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ ,  $\lambda$  jelenti egy fogyasztó bekapcsolásának időbeli valószínűség-sűrűségét és  $\frac{1}{\mu}$  az átlagos működési időt. Ha feltesszük, hogy a működési idők exponenciális eloszlásúak, úgy a  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_t, \dots$  valószínűségi változók Markov-féle láncot alkotnak, vagyis, ha ismerjük  $\xi_t$  értékét, úgy  $\xi_{t+\tau}$  feltételes valószínűségeloszlása független attól, hogy  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{t-1}$  milyen értéket vettek fel. Ez abból következik, hogy exponenciális eloszlás esetén annak a valószínűsége, hogy egy gép, amely  $t$  időpontban működött,  $t + \tau$  időpont előtt ki legyen kapcsolva, nem függ attól, hogy a  $t$  időpontot megelőzően a gép mennyi ideig működött. Ugyanis ha  $F(t)$  jelenti a működési idő valószínűségeloszlását és a gép a  $t_0 < t$  időpontban kezdett működni, úgy a keresett valószínűség

$$(1.2) \quad \frac{F(t + \tau - t_0) - F(t - t_0)}{1 - F(t - t_0)}$$

és ha  $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$  úgy ez a kifejezés  $1 - e^{-\mu \tau}$ -val egyenlő, vagyis nem függ  $(t - t_0)$ -tól; ezzel szemben minden más esetben ez a kifejezés függeni fog  $(t - t_0)$ -tól, ennél fogva a valószínűségi változók akkor és csak akkor alkotnak Markov-láncot, ha a működési idők exponenciális eloszlásúak.

Tegyük fel, hogy minden fogyasztó, ha működik, ugyanannyit fogyaszt, mégpedig időegységenként  $\alpha$  liter levegőt,\* feltesszük továbbá, hogy a fogyasztás független a tartályban lévő levegő nyomásától. Mivel a gyakorlatilag előforduló nyomásingadozások nem túl nagyok, ez a feltevés nem jelent lényeges elhanyagolást. Feltesszük továbbá, hogy ha a tartályban lévő levegő nyomása egy bizonyos  $\nu_1$  atmoszféra határt túlhalad, a kompresszor automatikusan kikapcsol és csak akkor kapcsol be újra, ha a nyomás bizonyos  $\nu_2 < \nu_1$  határ alá süllyed. A gyakorlatban általában megadják a tartály normál nyomását, amelyet  $\nu$ -vel jelölünk és a szabályozó berendezést úgy építik, hogy  $\nu_1$  kb. 10%-kal vagy még kevesebbel legyen nagyobb,  $\nu_2$  pedig 10%-kal vagy még kevesebbel legyen kisebb, mint  $\nu$ . A  $\nu$  normál nyomásértéke a gyakorlatban 7–8 atmoszféra, mi a  $\nu = 8$  atmoszféra esetre végeztük el a numerikus számításokat. A tartály űrtartalmát köbméterekben jelöljük  $W$ -vel, ez esetben tehát a kompresszor kikapcsol, ha a tartályban lévő levegő mennyisége eléri az  $1100 \nu W$  litert és bekapcsol, ha  $900 \nu W$  literre süllyed. Nevezzünk  $\alpha$  liternyi levegőt 1 *adagnak*, így tehát a kompresszor kikapcsol, ha a tartálybani  $\frac{1100 \nu W}{\alpha} = H_1$ -nél több »adag« levegő van, és bekapcsol, ha a tartályban lévő levegő kevesebb, mint  $H_2 = \frac{900 \nu W}{\alpha}$  adag. Tegyük fel, hogy a kompresszor — ha működik — időegységenként  $k\alpha$  liter levegőt nyom be a tartályba.\*\*

Jelentse  $\eta_t$  a  $t$  időpontban a tartályban lévő levegőadagok számát (tehát a tartályban lévő levegő mennyisége a  $t$  időpontban  $\eta_t \alpha$  liter). Az  $\eta_t$  valószínűségi változók által alkotott (diszkrét) sztochasztikus folyamat nem egyszerű,

\* 1 liter levegőn itt és a következőkben mindig 1 liter 1 atmoszféra nyomású levegőt értünk.

\*\* A következőkben a számítások egyszerűsítése céljából feltesszük, hogy  $k$  egész szám; ez nem jelent lényeges megszorítást.

hanem *másodrendű* Markov-lánc : ez teszi a problémát matematikai szempontból bonyolulttá. A következőkben ugyanúgy, mint  $\xi_t$  esetében, az  $\eta_t$  változót is csak *t nem* negatív egészszámú értékeire vizsgáljuk, vagyis a  $t = 0, 1, 2, \dots$  időpontokban. Mivel az időegységet általában igen rövidre választjuk, (általában néhány másodpercre, de legfeljebb 1 percre) gyakorlatilag ez megengedhető. Ez esetben tehát az  $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots$  valószínűségi változók sorozatával foglalkozunk csak ; feltesszük, hogy  $\eta_0 = H = \frac{1000\nu W}{\alpha}$  egész szám.

Ami az automatikus szabályozást illeti, ezt a matematikai elméletben a következőképpen vesszük figyelembe : Feltesszük, hogy a kompresszor a  $t$  időpontban ( $t = 1, 2, \dots$ ) kikapcsol, ha  $\eta_{t-1} \leq H$ , de  $\eta_t > H$ , továbbá, hogy a kompresszor a  $t$  időpontban bekapcsol, ha  $\eta_{t-1} > H$ , de  $\eta_t \leq H$ . Mivel feltevésünk szerint  $k$  egész szám, tehát  $\eta_t$  egy időegység alatt mindig egész számmal változik meg és  $\eta_0 = H$  is egész, tehát  $\eta_t$  csak egész számú értékeket vehet fel; ilyen módon tehát, ha  $\eta_{t-1} \leq H$  és  $\eta_t > H$ , úgy  $\eta_t$  lehetséges értékei  $H + 1, H + 2, \dots, H + k$ , míg ha  $\eta_{t-1} > H$  és  $\eta_t \leq H$ , úgy  $\eta_t$  lehetséges értékei  $H, H - 1, \dots, H - N + 1$ .\* Az egyidejűleg működő gépek átlagos

száma (1) szerint  $\frac{N\lambda}{\lambda + \mu} = Np$ , így tehát ha  $\eta_{t-1} \geq H$ , úgy  $\eta_t$  várható értéke  $\geq H - Np$ , míg ha  $\eta_{t-1} \leq H$ , úgy  $\eta_t$  várható értéke  $< H + k - Np$ . Nyilvánvaló, hogy a kompresszor csak úgy tudja ellátni a fogyasztást, ha  $k > Np$ ; a probléma éppen abban van, hogy meghatározzuk, hogy  $k$  értékét mennyivel kell nagyobbra választani  $Np$ -nél (azaz mekkora kell, hogy legyen az  $\frac{Np}{k} < 1$  hányados), hogy a légnyomás a tartályban gyakorlatilag sohasem süllyedjen egy olyan  $\nu_0$  érték alá, amely alatt a nyomás már nem elegendő a gépek működtetéséhez.\*\* Az  $1 - \frac{Np}{k} = \varepsilon$  szám a *beépítendő kihasználatlan kapacitás*: ennek meghatározása a dolgozat célja. Mármost tehát az elmondottak értelmében a kikapcsolás időpontjában a tartályban lévő levegőadagok várható száma  $H + k - Np$ -nél nem nagyobb, míg a bekapcsolás időpontjában a tartályban lévő levegőadagok számának várható értéke  $H - Np$ -nél nagyobb. Látni fogjuk, hogy a gyakorlatban előforduló esetekben  $k$  értéket alig kell nagyobbra választani  $Np$ -nél és mindenestre  $k < 2Np$ , tehát a kikapcsolás időpontjában  $< H + Np$ , a bekapcsolásnál  $> H - Np$  adag levegő lesz a tartályban ; ha tehát az időegységet úgy választjuk meg, hogy  $Np \leq \frac{H}{10}$  legyen,

úgy az automatikus szabályozást a választott matematikai modell hűen tükrözi vissza, hiszen a kikapcsolás nagy valószínűséggel  $1,1 H$  adag alatt, a bekapcsolás  $0,9 H$  adag felett fog történni. Így például, ha a tartály úrtartalma  $W = 40 \text{ m}^3$ , a normál nyomás 8 atmoszféra és a fogyasztók száma 200, egy fogyasztó másodpercenként 50 liter levegőt fogyaszt és a gépek általában 50%-nyira vannak kihasználva  $\left(p = \frac{1}{2}\right)$ , úgy  $Np = 100$  és így az  $Np < \frac{H}{10}$  feltétel

\* Feltesszük, hogy  $H > N$  azaz ha a tartályban normál nyomás van, úgy a tartály levegőmennyisége 1 időegységre még akkor is fedezi a fogyasztást, ha az összes fogyasztó működik és a kompresszor áll.

\*\* Ezt a nyomást a következőkben 6.5 atmoszférának vesszük.



azt jelenti, hogy  $H = \frac{320,000}{50\tau} > 1000$ , ha  $\tau$  jelenti sec-okban a választott időegységet; ez esetben tehát kell, hogy  $\tau < 6,4$  sec legyen és így 6 sec-os időegység ez esetben megfelelő (ekkor  $\alpha = 300$  liter). Hasonlóképpen lehet minden esetben a helyes időegységet megválasztani.

Mármost vizsgáljuk meg, milyen összefüggés áll fenn  $\xi_t$  és  $\eta_t$  között. Nyilvánvaló, hogy

$$(1.3) \quad \eta_{t+1} = \begin{cases} \eta_t + k - \xi_t & \text{ha } \eta_t \leq H \\ \eta_t - \xi_t & \text{ha } \eta_t > H. \end{cases}$$

Bevezetve az

$$(1.4) \quad f(x, y) = \begin{cases} y - x + k & \text{ha } y \leq H \\ y - x & \text{ha } y > H \end{cases}$$

kétváltozós függvényt, fennáll tehát a következő összefüggés:

$$(1.5) \quad \eta_{t+1} = f(\xi_t, \eta_t) \quad (t = 0, 1, 2, \dots).$$

Mint már említettük, az  $\eta_t$  változók nem alkotnak egyszerű Markov-láncot, hanem ú. n. másodrendű Markov-láncot, vagyis adott  $\eta_t$  érték mellett  $\eta_{t+1}$  értékére  $\eta_{t-1}$  értéke befolyással bír, de  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{t-2}$  értékei már nem. Ezt a következőképpen láthatjuk be: mivel  $\eta_{t+1} = \eta_t + k - \xi_t$  vagy  $\eta_{t+1} = \eta_t - \xi_t$  aszerint, hogy  $\eta_t \leq H$  vagy  $\eta_t > H$ ; tehát adott  $\eta_t$  mellett  $\eta_{t+1}$  értéke csak  $\xi_t$  értékétől függ. Mivel másrészt  $\eta_t = \eta_{t-1} + k - \xi_{t-1}$ , illetve  $\eta_t = \eta_{t-1} - \xi_{t-1}$  aszerint, hogy  $\eta_{t-1} \leq H$  vagy  $\eta_{t-1} > H$ , tehát ha  $\eta_t$  és  $\eta_{t-1}$  adva vannak, úgy ezáltal  $\xi_{t-1}$  egyértelműen meg van határozva és így nem függ  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{t-2}$  értékeitől. De viszont a  $\xi_t$  változók Markov-láncot alkotnak és így ha  $\xi_{t-1}$  értéke adott, úgy  $\xi_t$  feltételes eloszlása nem függ  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{t-2}$  értékeitől, ennél fogva nem függhet  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{t-2}$  értékeitől sem. Másrészt különböző  $\eta_{t-1}$  értékeknek különböző  $\xi_{t-1}$  értékek felelnek meg, tehát  $\eta_{t+1}$  értékének feltételes eloszlása adott  $\eta_t$  mellett még függ  $\eta_{t-1}$  értékétől.

Figyelembevétel, hogy a  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$  változók Markov-láncot alkotnak, könnyen belátható, hogy a  $\zeta_t = \xi_t + i\eta_t$  komplex értékű változók ( $i = \sqrt{-1}$ ) is Markov-láncot alkotnak.\* Ugyanis, ha  $\zeta_t = \xi_t + i\eta_t$  értékét ismerjük, úgy ismerjük külön-külön  $\xi_t$  és  $\eta_t$  értékét, ezek együtt egyértelműen meghatározzák  $\eta_{t+1}$  értékét, míg  $\xi_{t+1}$  különböző értékeket felvehet, de ezek valószínűségeire kizárólag  $\xi_t$  értéke bír befolyással,  $\xi_j$  ( $j = 0, 1, \dots, t-1$ ) nem és így  $\eta_j$  ( $j = 0, 1, \dots, t-1$ ) sem. [Hasonlóképpen Markov-láncot alkotnak a  $\zeta_t^* = \xi_t + i\eta_{t+1}$  változók is, hiszen ha  $\zeta_t^*$  értékét ismerjük, úgy ismerjük  $\xi_t$  és  $\eta_{t+1}$  értékét és így arra, hogy  $\zeta_{t+1}^* = \xi_{t+1} + i\eta_{t+2}$  különböző lehetséges értékeit milyen valószínűségekkel veszi fel,  $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \dots, \zeta_{t-1}^*$  értékei semmilyen befolyással nem bírnak, mivel  $\xi_{t+1}$  értékére csak  $\xi_t$  értéke bírhat befolyással, míg ha  $\xi_{t+1}$  ismeretes, úgy  $\eta_{t+2} = f(\xi_{t+1}, \eta_{t+1})$  a szintén ismert  $\eta_{t+1}$  érték által egyértelműen meg van határozva.] Mivel  $\eta_t = I(\zeta_t)$  ( $I(z)$ -vel a  $z$  komplex szám imaginárius részét jelöljük) tehát az  $\eta_t$  sztochasztikus folyamatot előállítottuk, mint egy komplex értékű Markov-lánc vetületét

\* A  $\zeta_t = \xi_t + i\eta_t$  változók helyett beszélhetünk a  $(\xi_t, \eta_t)$  koordinátákkal bíró  $(\xi_t, \eta_t)$  síkbeli változó pontról is.

az imaginárius tengelyen. Ez lehetőséget nyújt arra, hogy  $\eta_t$  vizsgálatánál — bár az  $\eta_t$  változók nem egyszerű, hanem másodrendű Markov-láncot alkotnak — az egyszerű Markov-láncok elméletére támaszkodjunk.\*

A  $\zeta_t$  változó lehetséges értékei az  $x + iy$  komplex számok, ahol  $x = 0, 1, 2, \dots, N$  és  $y \leq H + K$  szintén egész szám.  $\zeta_t$  tehát minden esetben a komplex számsík valamely rácspontjának megfelelő komplex számmal egyenlő. A  $\zeta_t = x + iy$ ,  $0 \leq x \leq N$   $y \leq H + K$  értékek a vizsgált rendszer egy-egy állapotát jellemzik.

A tartályban lévő levegőmennyiség nyilvánvalóan nem lehet negatív, ennek megfelelően a valóságban  $\eta_t \geq 0$ . Gyakorlatilag természetesen még az sem engedhető meg, hogy  $\eta_t = 0$  legyen, sőt, azt kell elérni, hogy  $\eta_t \geq H_0$  legyen; ahol  $H_0 = \frac{1000\nu_0 W}{\alpha}$  és  $\nu_0$  jelenti a műszakilag megengedhető legkisebb nyomást, amely még elegendő a gépek működtetéséhez. A  $k$  számnak (azaz a kompresszor kapacitásának) megfelelő megválasztásával éppen azt kell elérnünk, hogy  $\eta_t$  értéke 1-hez igen közeli valószínűséggel ne süllyedhessen  $H_0$  alá. A matematikai modell elvben nem zárja ki, hogy  $\eta_t$   $H_0$ -nál kisebb értékeket (sőt negatív értékeket) is felvehessen, ennek azonban a mondottak értelmében olyan elenyésző kis valószínűsége lesz, hogy az semmilyen jelentőséggel nem bír.

A  $\zeta_t$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ) változókból álló Markov-lánc mint könnyen belátható, a következő tulajdonságokkal bír:

a) bármely állapotból bármely más állapotba megfelelő pozitív valószínűséggel el lehet jutni; ebből következik, hogy a  $\zeta_t$  Markov-lánc *irreducibilis*.

**Bizonyítás:** Tegyük fel, hogy  $\xi_t = x$  és  $\eta_t = y$  és az  $x + iy$  állapotból el akarunk jutni az  $u + iv$  állapotba. Mivel  $\xi_t = x$  feltétel mellett a  $\xi_{t+1} = x'$  eseménynek  $x'$  minden számbajövő értékére pozitív valószínűsége van, ha  $y' = f(x, y)$  úgy négy esetet kell megkülönböztetni:

$$1.) \quad y' \leq H, \quad v \leq y' + k$$

ebben az esetben az átmenet pozitív valószínűséggel két lépésben megtörténhet, ugyanis pozitív valószínűsége van annak, hogy

$$\zeta_{t+1} = (y' + k - v) + iy' \quad \text{és} \quad \zeta_{t+2} = u + if(y' + k - v, y') = u + iv$$

legyen

$$2.) \quad y' > H, \quad v \leq y'$$

ebben az esetben is pozitív valószínűséggel lehetséges az átmenet két lépésben, ugyanis

$$\zeta_{t+1} = (y' - v) + iy' \quad \text{és} \quad \zeta_{t+2} = u + if(y' - v, y') = u + iv$$

pozitív valószínűséggel fordulhat elő.

$$3.) \quad y' > H, \quad v > y'$$

\* Ez a módszer igen sok más esetben is alkalmazható; ha egy nem-Markov-típusú  $\eta_t$  sztochasztikus folyamat előállítható  $\eta_t = F(\zeta_t)$  alakba, ahol  $\zeta_t$  Markov-folyamat és  $F(x)$  egy-egyértelmű transzformáció, ezt az illető folyamat *markovizálásának* nevezzük. Ennek a kérdésnek általános tárgyalásával más helyütt fogok foglalkozni. Magasabbrendű Markov-láncok tárgyalásának egyszerű Markov-láncokra való visszavezetését illetőleg lásd H. Wold munkáját [2].

ebben az esetben három lépésben lehetséges az átmenet, ugyanis két lépéssel átvihető a rendszer a  $v - H - 1 + i(H + 1)$  állapotba, amelyből egy lépéssel elérhető az  $u + iv$  állapot.

$$4.) \quad y' \leq H \quad v > y' + k.$$

Ebben az esetben van olyan  $r$  szám, hogy  $v \leq y' + rk$  és így  $\xi_{t+1} = \xi_{t+2} = \dots = \xi_{t+r} = 0$  esetben  $r$  lépésben a rendszer olyan állapotba kerül, amelyre az 1., 2. és 3. feltevések egyike már teljesül és így legfeljebb  $r + 3$  lépéssel pozitív valószínűséggel elérhető az  $u + iv$  állapot.

b) A rendszernek *nincsen periodikus állapota*, azaz olyan állapota, amelybe való visszatérés  $r$  lépésben csak úgy történhet meg, ha  $r$  osztható egy bizonyos  $D > 1$  egész számmal (az állapot periódusával).

*Bizonyítás:* A  $k + iH$  állapot azzal a tulajdonsággal bír, hogy pozitív valószínűsége van annak, hogy ha  $\zeta_t = k + iH$ , úgy  $\zeta_{t+1} = \zeta_t$  legyen, mivel  $f(k, H) = H$ . Ha most a rendszer az  $x + iy$  állapotból  $r$  lépéssel vihető a  $K + iH$  állapotba és onnan  $s$  lépéssel vissza az  $x + iy$  állapotba, úgy a  $K + iH$  állapotba még egy lépésen át ott tartható és így  $x + iy$  állapotba visszatérhet egyrészt  $r + s$ , másrészt  $r + s + 1$  lépés alatt; de akkor  $D$  osztója mind  $r + s$ -nek, mind  $r + s + 1$ -nek, tehát  $D = 1$ .

c) Ha  $k > Np$ , úgy *minden állapot rekurrens és nem nulla állapot* (azaz a rendszer bármely állapotból előbb-utóbb 1 valószínűséggel visszajut ugyanabba az állapotba és azon lépések számának várható értéke, ami alatt ez megtörténik, véges):

Ugyanis (l. [4]) általános tételekből következik, hogy elég kimutatni, hogy létezik egy rekurrens nem-nulla állapot. Ha ilyen állapot nem léteznék, úgy bevezetve a

$$P_{hjl m}^{(n)} = P(\zeta_n = l + im \mid \zeta_0 = h + ij)$$

e ölést\*  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{hjl m}^{(n)} = 0$  volna,  $h, j, l, m$  minden értékére. Azonban akkor fennállna, hogy

$$(1.6) \quad \varrho_n = \sum_{l=0}^N \sum_{m=H+1}^{H+k} P_{hjl m}^{(n)} \rightarrow 0.$$

Kimutatjuk azonban, hogy ez lehetetlen,  $\varrho_n$  ugyanis annak a valószínűségét jelenti, hogy a kompresszor nem működik a  $t = n$  időpontban, feltéve, hogy a  $t = 0$  időpontban  $\xi_0 = h$  és  $\eta_0 = j$  volt. Fennáll a következő összefüggés:

$$(1.7) \quad M(\eta_{n+1}) = M(\eta_n) + \varrho_n(-Np) + (1 - \varrho_n)(k - Np),$$

ahol  $M(\cdot)$  a zárójelben álló valószínűségi változó *várható értékét* jelöli, és így (1.6)-ból következne, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [M(\eta_{n+1}) - M(\eta_n)] = k - Np > 0$$

\*  $V(A/B)$  az  $A$  esemény feltételes valószínűségét jelenti a  $B$  feltételre vonatkozólag.



azaz, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(\eta_{n+1})}{n+1} = k - Np > 0$$

ehát hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\eta_{n+1}) = +\infty.$$

Ez azonban lehetetlen, hiszen  $\eta_{n+1} \leq k + H$  tehát  $M(\eta_{n+1}) \leq k + H$ . Ily módon az (1.6) feltevés ellentmondásra vezetett; ezzel viszont be van bizonyítva, hogy van rekurrens nem-nulla állapot, amiből — mint már említettük — következik, hogy minden állapot ilyen. Ebből megint csak ismert tételek segítségével (lásd [4]) következik, hogy a  $\zeta_n$  Markov-lánc minden állapota ergodikus, tehát léteznek a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{hjlm}^{(n)}$$

határértékek,  $h, j, l, m$  minden számbajövő értékére és ezek a határértékek nem függenek  $h$  és  $j$  értékétől, azaz írhatjuk, hogy

$$(1.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{hjlm}^{(n)} = \Pi_{lm}.$$

De akkor léteznek a

$$(1.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^N P_{hjlm}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} V(\tau_n = m \mid \zeta_0 = h + ij) = \sum_{l=0}^N \Pi_{lm} = \Pi_m$$

határértékek is, azaz az  $\eta_n$  másodrendű Markov-lánc minden állapota is ergodikus. Éppen ebben áll a nem-egyszerű Markov-lánccok markovizálásának a jelentősége: ezzel a módszerrel ki lehet mutatni az állapotok ergodikus jellegét. Feladatunk mármost a  $\Pi_m$  valószínűségek meghatározása. Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy  $\xi_0 = 0$  és  $\eta_0 = H$ , ez nem jelent lényeges megszorítást, ez a feltevés azt jelenti, hogy a  $t = 0$  időpontban a tartályban a nyomás a normál szinten áll és egy gép sem működik. A következőkben ezt hallgatólagosan feltesszük, anélkül, hogy külön hangsúlyoznánk.

A jelölések egyszerűsítése céljából a következőkben a tartályban lévő nyomást azáltal jellemezzük, hogy megadjuk, hogy hány adaggal van kevesebb levegő a tartályban, mint abban az esetben, ha a nyomás maximális, vagyis bevezetjük az  $\eta_t^* = H + k - \eta_t$  új változókat, és a (stacionér állapotra vonatkozó)

$$(1.10) \quad A_m = \lim_{t \rightarrow \infty} V(\eta_t^* = m) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(\tau_t = k + H - m) = \Pi_{H+k-m}$$

jelölést, (1.3) értelmében az  $\eta_t^*$  változókra a következő összefüggés áll fenn:

$$(1.11) \quad \eta_{t+1}^* = \begin{cases} \eta_t^* - K + \xi_t & \text{ha } \eta_t^* \geq k \\ \eta_t^* + \xi_t & \text{ha } \eta_t^* < k. \end{cases}$$

Ebből következik, hogy fennáll a következő összefüggés :

$$(1.12) \quad V(\eta_{t+1}^* = m) = \sum_{l=0}^{k-1} V(\eta_t^* = l) V(\xi_t = m - l | \eta_t^* = l) + \\ + \sum_{l=k}^{m+k} V(\eta_t^* = l) V(\xi_t = m + k - l | \eta_t^* = l) \\ (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Ezen a ponton a matematikai tárgyalás egyszerűsítése céljából figyelmen kívül hagyjuk a  $\xi_t$  és  $\eta_t^*$  közötti (igen laza) sztochasztikus kapcsolatot. Abban az esetben, ha a  $\xi_t$  változók egymástól függetlenek volnának, úgy  $\xi_t$  és  $\eta_t^*$  is függetlenek volnának, hiszen  $\eta_t^*$  csak  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{t-1}$  értékeitől függ. Amennyiben az időegységet elég nagynak választjuk, úgy a  $\xi_t$  változók valóban majdnem függetlenné válnak, ugyanis mint azt később meg fogjuk mutatni, a  $\xi_t$  és  $\xi_{t+\tau}$  változók korrelációs együtthatója rögzített  $\tau$  és  $t \rightarrow \infty$  mellett konvergál az  $e^{-\mu\tau}$  értékhez, vagyis két időpontban vizsgálva a működő gépek számát az ezek közti korreláció a két időpont távolságának növelésével exponenciálisan csökken. Azonban  $\xi_t$  és  $\eta_t^*$  akkor is csak igen laza sztochasztikus kapcsolatban vannak egymással, ha az időegységet kicsinyre választjuk, és a hiba, amelyet azáltal követünk el, hogy a  $\xi_t$  és  $\eta_t^*$  közötti sztochasztikus kapcsolatot elhanyagoljuk, nem befolyásolja lényegesen eredményeinket. Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy első közelítésként kezdettől fogva feltehetjük volna, hogy a  $\xi_t$  változók függetlenek egymástól: ez esetben az  $\eta_t$  változók egyszerű Markov-láncot alkotnak, és így az (1.9) határértékek létezésének bizonyítása lényegesen egyszerűbb lett volna; ezt azonban azért nem tettük meg, hogy megmutassuk, hogy a rendszer ergodicitása nem függ ettől az egyszerűsítő feltevéstől.

Ezen a ponton azonban már szükségünk van — ha nem is erre a feltevésre, de legalábbis ennek azon következményére, hogy  $\xi_t$  és  $\eta_t^*$  függetlennek tekinthetők. Ezen feltevés mellett a  $V(\xi_t = \eta_t | \eta_t^* = l)$  feltételes valószínűség nem függ  $l$ -től, és nem más, mint az (1.1) alatt szereplő  $P_n = V(\xi_t = n)$  valószínűség. Mivel továbbá (1.10) szerint  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\eta_{t+1}^* = m) = A_m$  és  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\eta_t^* = l) = A_l$ , tehát nyerjük (1.12)-ből a következő összefüggéseket :

$$(1.13) \quad A_m = \sum_{l=0}^{k-1} A_l P_{m-l} + \sum_{l=k}^{m+k} A_l P_{m+k-l} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

(ha  $n < 0$  vagy  $n > N$ , úgy definíciószerűen  $P_n = 0$ ). Ilyen módon az ismeretlen  $A_m$  számokra egy lineáris egyenletrendszert nyertünk, amelynek segítségével ezen ismeretlenek meghatározhatók. Ez legegyszerűbben a generátorfüggvény bevezetésével történhet; legyen

$$(1.14) \quad A(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m \quad \text{és} \quad A_k(z) = \sum_{m=0}^{k-1} A_m z^m;$$

szorozzuk be (1.13) mindkét oldalát  $z^m$ -el és összegezzünk  $m$  minden értékére, úgy nyerjük a következő összefüggést :

$$(1.15) \quad A(z) = P(z)[A_k(z) + z^{-k}(A(z) - A_k(z))],$$

ahol

$$(1.16) \quad P(z) = \sum_{n=0}^N P_n z^n.$$

Mivel (1.1) szerint

$$(1.17) \quad P(z) = (1 + p(z - 1))^N$$

tehát (1.15)-ből következik, hogy

$$(1.18) \quad A(z) = \frac{A_k(z)(1 + p(z - 1))^N(z^k - 1)}{z^k - (1 + p(z - 1))^N}.$$

Az (1.18) összefüggés alapján az  $A_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) számok meghatározhatók. Első pillanatra úgy látszik, mintha ezen számokat az (1.18) összefüggés nem határozná meg egyértelműen, hiszen a jobboldalon szereplő  $A_k(z)$  ( $k - 1$ )-fokú polinom nem más, mint  $A(z)$  első  $k$  tagjának összege és úgy tűnik, mintha ennek együtthatói, vagyis az  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  számok önkényesen volnának megválaszthatók, és ezek megválasztása után ezek megválasztásától függő értékeket kapnánk az  $A_m$  ( $m \geq k$ ) számokra. Ez azonban nincsen így : Az  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  számok is egyértelműen meg vannak határozva az (1.18) összefüggés által, ha figyelembe vesszük, hogy az  $A_m$  számok valószínűségeket jelentenek, tehát nem negatívok és összegük 1-el egyenlő. Utóbbi feltételből ugyanis egyrészt adódik, hogy  $A(1) = 1$ , és így — (1.18) jobboldalára alkalmazva a l'Hospital szabályt — következik, hogy

$$(1.19) \quad 1 = A_k(1) \frac{k}{k - Np}.$$

Ez máris egy összefüggést jelent  $A_k(z)$  együtthatói között, mégpedig azt, hogy

$$(1.20) \quad A_k(1) = \sum_{m=0}^{k-1} A_m = 1 - \frac{Np}{k} = \varepsilon.$$

Az (1.20) baloldalán álló összeg egyébként éppen annak valószínűségét fejezi ki, hogy a kompresszor ne működjék ; ez a valószínűség pozitív, mivel feltettük, hogy  $k > Np$ . Másrészt abból, hogy az  $A_m$  számok nem-negatívok és összegük 1-el egyenlő, következik, hogy az  $A(z)$  hatványsor konvergenciasugara legalább 1, és így az  $A(z)$  függvény a komplex számsík egységkörének belsejében reguláris függvény ; másrészt viszont a *Rouché-tétel*ből következik (lásd részletesebben a 2. §-ban), hogy a  $z^k - (1 + p(z - 1))^N = 0$  egyenletnek az egységkör belsejében pontosan  $k - 1$  gyöke fekszik : legyenek ezek a gyökök  $z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$ . Mivel az  $A(z)$  függvény ezekben a pontokban is reguláris, kell, hogy az (1.18) számlálójában álló polinom is eltűnjék ezekben a pontokban : ez csak úgy lehetséges, ha a  $z_j$  számok ( $j = 1, 2, \dots, (k - 1)$ ) az  $A_k(z) = 0$  egyenlet gyökei. Mivel  $A_k(z)$  pontosan



$k - 1$  fokú, és (1.20) szerint együtthatóinak összege  $1 - \frac{Np}{k}$ , ezáltal  $A_k(z)$  egyértelműen meg van határozva. Tehát a  $k$ ,  $p$  és  $N$  számok megadása egyértelműen meghatározza  $A_k(z)$ -t, és ilyen módon  $A_m$ -et is  $m$  minden értékére.

A feladat ezekután a következőkre redukálódott: megvizsgálandó, hogy adott  $p$  és  $N$  értékek mellett melyik  $k$ -nak az a legkisebb értéke, amelyre az (1.18) összefüggés által meghatározott  $A(z)$  hatványsor  $A_m$  együtthatóira fennáll a

$$(1.21) \quad \sum_{m=M}^{\infty} A_m < \delta$$

egyenlőtlenség, ahol  $M$  értékét úgy kell megválasztani, hogy az éppen a megengedhető legkisebb légnyomásnak feleljen meg a tartályban. Ha a megengedhető legkisebb nyomás  $v_0$ , úgy ez megfelel  $1000 \frac{v_0 W}{\alpha}$  adag levegőnek a tartályban, vagyis az  $\tau_i = \frac{1000 v_0 W}{\alpha}$  és így az  $\eta_i^* = H + k - \frac{1000 v_0 W}{\alpha}$  értéknek: ezek szerint  $H_0 = 1000 \frac{v_0 W}{\alpha}$  jelöléssel — (1.21)-ben  $M = H + k - H_0$  veendő. Ami  $\delta$  megválasztását illeti, ez attól függ, hogy mekkora biztonságot kívánunk elérni: a következőkben  $\delta$  értékét mindig úgy választjuk meg, hogy átlag 3 hetente legfeljebb egyszer forduljon csak elő, hogy a nyomás a megengedhető alsó határ alá süllyedjen. Ez azt jelenti, hogy  $\delta$  megválasztása függ az időegység megválasztásától.

A következő fejezetben foglalkozunk a most megfogalmazott feladat numerikus megoldásával. Előbb azonban még egy módosítást végzünk. A számítások egyszerűsítése végett célszerű az (1.1) binomiális elosztást Poisson-féle eloszlással közelíteni; ez teljes mértékben jogosult, ha — amint ez a gyakorlatban teljesül —  $p$  igen kicsiny és  $N$  viszont nagy szám\*. Bevezetve az  $Np = P$  jelölést, az (1.1) binomiális eloszlást közelítjük a (1.22)

$$(1.22) \quad P'_n = \frac{p^n}{n!} e^{-P}$$

Poisson-féle eloszlással. Ezt a közelítést az egész eddig végzett számításokon végigvívva a különbség csak abban fog állni, hogy az (1.17) alatti  $P(z) = (1 + p(z - 1))^N$  függvény — az (1.1) binomiális eloszlás generátorfüggvénye — helyett az (1.22) Poisson eloszlás generátorfüggvénye, azaz

$$(1.23) \quad P(z) = e^{P(z-1)}$$

helyettesítendő (1.15)-be, és így (1.18) helyett a következő egyenletet kapjuk az  $A(z)$  generátorfüggvényre:

$$(1.24) \quad A(z) = A_k(z) \frac{e^{P(z-1)} (z^k - 1)}{z^k - e^{P(z-1)}}.$$

\* Ez esetben a  $\xi_t$  változók olyan Markov-láncot alkotnak, amelynél a lehetséges »állapotok« száma megszámlálhatóan végtelen. Erre az esetre elsőnek A. N. Kolmogorov szovjet matematikus terjesztette ki a Markov-láncok klasszikus elméletét (lásd [3].)

Az (1.24) egyenletre áll mindaz, amit (1.18)-ról mondtunk, és ugyanolyan megfontolással, mint (1.18) esetében belátható, hogy (1.24) egyértelműen meghatározza az  $A_m$  valószínűségeket. Ezt részletesebben a következő fejezetben mutatjuk meg, amely az (1.21) egyenlőtlenség fennállását biztosító  $k$  érték tényleges meghatározását tartalmazza.

## 2. §. *A számítások numerikus keresztülvitele*

Vizsgáljuk meg mindenekelőtt közelebbről az

$$(2.1) \quad A(z) = \frac{A_k(z)(z^k - 1)e^{P(z-1)}}{z^k - e^{P(z-1)}}$$

összefüggést.  $z = 1$ -et helyettesítve kapjuk, hogy

$$1 = A(1) = A_k(1) \frac{k}{k - P}$$

és így

$$(2.2) \quad A_k(1) = 1 - \frac{P}{k}$$

(2.2)-ből is nyilvánvaló, hogy a probléma megoldhatóságának előfeltétele, hogy  $P < k$  legyen. Ezt szemléletesen is könnyen beláthatjuk, hiszen ha az átlagos fogyasztás meghaladná a kompresszor teljesítőképességét, úgy nem alakulhatna ki stacionér állapot.

(2.1) segítségével az  $A_r$  ( $r = k, k + 1, \dots$ ) számok mind meghatározhatók, feltéve, hogy  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  ismereteseek.

Az  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  számok látszólag önkényesen választhatók meg, valójában ez nem így van, hanem ezek a számok egyértelműen meg vannak határozva. Ugyanis könnyen be lehet látni, hogy az  $A_k, A_{k+1}, \dots$  számokat a (21) reláció szerint meghatározva, ezek a számok az  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  számoknak csak egyetlen lehetséges választása mellett jelenthetnek valószínűségeket. Ugyanis az  $A_n$  számok nem-negatívak kell hogy legyenek, akkor azonban a (2.1) baloldalán álló hatványsor — figyelembevételével, hogy —

$A(1) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m = 1$  reguláris az egységkörben; de akkor (21) jobboldalának

is regulárisnak kell lennie; ez pedig csak úgy lehetséges, ha a nevezőnek az egységkörben fekvő gyökei a számlálónak is gyökei. Mivel — mint ezt ki fogjuk mutatni — a  $z^k - e^{P(z-1)} = 0$  egyenletnek pontosan  $k-1$  gyöke van az egységkör belsejében, tehát ezek a gyökök az  $A_k(z) = 0$  egyenletnek is gyökei; mivel  $A_k(z)$  ( $k-1$ )-fokú polinom, tehát gyökei által egy konstans faktortól eltekintve meg van határozva. Mivel pedig (2.2) fennáll, ez a konstans is egyértelműen meghatározható. Annak bizonyítása, hogy a

$$(2.3) \quad z^k - e^{P(z-1)} = 0$$

egyenletnek pontosan  $k-1$  gyöke van az egységkör belsejében a Rouché-tétel segítségével történhet.

A (2.3) egyenletnek nyilvánvalóan egyszeres gyöke van a  $z = 1$  pontban, ugyanis (2.3) baloldalának deriváltja az  $z = 1$  helyen  $k - P > 0$ . Legyen

most  $f(z) = z^k$ ,  $g(z) = -e^{P(z-1)}$ , úgy ha  $z = re^{i\vartheta}$ , ahol  $r > 1$ , úgy  $|g(z)| = e^{P(r \cos \vartheta - 1)} \leq e^{P(r-1)} \leq r^k$  feltéve, hogy  $P(r-1) < k \log r$ , utóbbi egyenlőtlenség viszont bizonyosan teljesül, ha  $(r-1)$  elég kicsiny; ugyanis ha  $0 < x \leq 1$  úgy  $\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2} = x\left(1 - \frac{x}{2}\right)$  és így  $k \log r > P(r-1)$ ,

$$\text{ha } 1 - \frac{P}{k} > \frac{r-1}{2}, \text{ tehát ha } r-1 < 2\left(1 - \frac{P}{k}\right).$$

A Rouché-tétel szerint tehát a  $|z| = r$  kör belsejében az  $f(z) + g(z) = 0$  egyenletnek ugyanannyi gyöke van, mint az  $f(z) = 0$  egyenletnek, azaz a  $z^k = 0$  egyenletnek, tehát  $k$  gyöke van; mivel  $r$  tetszőlegesen közel választható 1-hez, ebből tehát következik, hogy a zárt egységkörben a (11) egyenletnek pontosan  $k$  gyöke van; az egységkör kerületén azonban a  $z = 1$  ponton kívül más gyök nem fekehet, mivel ha  $z = e^{i\theta}$ , úgy  $|e^{P(z-1)}| < 1 = |z^k|$ , tehát (11)-nek  $k-1$  gyöke van az egységkör belsejében. Ezek a gyökök mind komplexek, ha  $k$  páratlan, míg ha  $k$  páros, egy gyök a negatív valós tengelyen fekszik. Ugyanis ha  $h(z) = z^k e^{P(1-z)}$ , úgy  $h'(z) > 0$ , ha  $0 \leq z \leq 1$  és így mivel  $h(0) = 0$  és  $h(1) = 1$ , tehát ha  $0 < z < 1$ , úgy  $h(z) < 1$ ; ha  $k$  páratlan, úgy  $h'(z) > 0$  a  $(-1, 0)$  intervallumban is, míg ha  $k$  páros, úgy  $h'(z) < 0$ , ha  $-1 < z < 0$  és  $h(-1) = e^{2P} > 1$ , tehát az  $1 - h(z) = 0$  egyenletnek pontosan egy gyöke van a  $(-1, 0)$  intervallumban. Az elmondottakból speciálisan következik, hogy ha  $k = 1$ , úgy a (2.3) egyenletnek nincsen gyöke az egységkör belsejében.

Az elmondottak szerint tehát

$$(2.4) \quad A(z) = \left(1 - \frac{P}{k}\right) \frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{k-1})(z^k-1)e^{P(z-1)}}{(1-z_1)(1-z_2)\dots(1-z_{k-1})(z^k-e^{P(z-1)})},$$

ahol  $z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$  a (2.3) egyenletnek az egységkör belsejében fekvő gyökei. Ebből következik, hogy  $M_t$ -vel jelölve  $\eta_t^*$  várható értékét

$$(2.5) \quad M_t = A'(1) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{1-z_j} + \frac{P-1}{2} + \frac{k}{2(k-P)}.$$

$M_t$  kiszámításához tehát ismerni kellene a (2.3) egyenlet gyökeit. Feladatunk megoldásához azonban nem szükséges  $M_t$  pontos meghatározása. A  $k = 1$  esetben ez igen könnyű, mivel

$$(2.6) \quad M_1 = A'(1) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-P} - (1-P) \right).$$

egyébként azonban meglehetősen fáradságos.

Az  $A(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m$  hatványsor konvergencia-körének sugara az  $A(z)$  függvénynek a  $z = 0$  ponthoz legközelebbi szinguláris pontjának a 0 ponttól való távolsága. Ezt a távolságot nevezzük  $R$ -nek. Könnyen belátható, hogy  $R$  nem más, mint az  $x^k e^{P(1-x)} = 1$  egyenlet egyetlen 1-nél nagyobb pozitív gyöke. Ugyanis az  $f(x) = x^k e^{P(1-x)}$  függvény értéke az  $x = 0$  és  $x = +\infty$  pontokban 0, közben a függvény a maximumát azon pontban veszi fel, melyre



$(kx^{k-1} - Px^k)e^{P(1-x)} = 0$ , azaz a függvény maximumát az  $x = \frac{k}{P} > 1$  helyen veszi fel, a maximum értéke  $\left(\frac{k}{P}\right)^k e^{P-k} = f\left(\frac{k}{P}\right)$  és mivel  $(1-x)e^x \leq 1$

ha  $0 < x < 1$ , tehát  $f\left(\frac{k}{P}\right) = \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{k-P}{k}\right) e^{\frac{k-P}{k}}\right]^k} > 1$ . Mivel továbbá

$f'(x) > 0$ , ha  $x < \frac{k}{P}$  és  $f'(x) < 0$  ha  $x > \frac{k}{P}$ , tehát  $f(x)$  az 1 értéket két helyen veszi fel, az egyik az  $x = 1$  hely, amely  $< \frac{k}{P}$ , a másik hely, amelyet

$R$ -el jelölünk, tehát szükségképpen  $> \frac{k}{P}$ . Ha viszont  $1 < |z| < R$ , akkor  $|f(z)| \cong |z|^k e^{P(1-|z|)} > 1$  tehát az  $f(z) = 1$  egyenletnek az  $1 < |z| < R$  körgyűrűben nem lehet gyöke; ebből és az elmondottakból már következik, hogy az  $A(z)$  függvény reguláris a  $|z| < R$  körben, ahol  $R$  az

$$(2.7) \quad R^k \cdot e^{P(1-R)} = 1$$

egyenlet egyetlen 1-nél nagyobb pozitív gyöke. A (2.7) egyenlet nyilván a következő alakra is hozható:

$$(2.8) \quad \frac{P}{k} R \cdot e^{-\frac{P}{k} R} = \frac{P}{k} e^{-\frac{P}{k}}$$

vagyis  $\varrho = \frac{RP}{k} = \frac{R}{\left(\frac{k}{P}\right)}$  (amelyről szintén tudjuk, hogy 1-nél nagyobb)

gyöke a

$$(2.9) \quad \varrho e^{-\varrho} = \frac{P}{k} e^{-\frac{P}{k}}$$

egyenletnek, még pedig az egyetlen 1-nél nagyobb gyöke ennek az egyenletnek. Az  $y = \varrho e^{-\varrho}$  függvény maximumát a  $\varrho = 1$  helyen veszi fel, a maximum értéke  $1/e$ . Ezen függvény inverz függvénye kétértékű; azt az ágát, amely 1-nél nagyobb értéket vesz fel,  $\sqrt{1-ye}$  szerint haladó sorba fejthetjük:

$$(2.10) \quad \varrho = 1 + c_1 \sqrt{1-ye} + c_2(1-ye) + c_3(1-ye)^{\frac{3}{2}} + c_4(1-ye)^2 + \dots$$

Legyen  $x = \sqrt{1-ye}$ , akkor tehát  $y = \frac{1-x^2}{e} = \varrho e^{-\varrho}$  és ha  $\varrho = 1$ , úgy

$x = 0$ . Legyen továbbá  $u = \varrho - 1$ , akkor  $\frac{1-x^2}{e} = (1+u)e^{-(1+u)}$  és így  $x^2 = 1 - (1+u)e^{-u}$ , azaz

$$(2.11) \quad x = \sqrt{1 - (1+u)e^{-u}}$$

(2.11)-ben a négyzetgyök azon ága veendő, amely pozitív  $u$ -ra pozitív értékeket

vesz fel. A feladat tehát a (2.11) által definiált  $x = x(u)$  függvény  $u = u(x)$  inverz függvényének sorbafejtése  $x$  hatványai szerint, tehát az

$$(2.12) \quad u = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots$$

sorfejtés együtthatóinak meghatározása.

A (2.12) hatványsort (2.11)-be helyettesítve, a határozatlan együtthatók módszerével következik, hogy

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{2} \\ c_2 &= \frac{2}{3} \\ c_3 &= \frac{11\sqrt{2}}{36} \\ c_4 &= \frac{43}{135} \end{aligned}$$

Tehát

$$\rho = 1 + \sqrt{2(1-ye)} + \frac{2}{3}(1-ye) + \frac{11\sqrt{2}}{36}(1-ye)^{\frac{3}{2}} + \frac{43}{135}(1-ye)^2 + \dots$$

és így

$$(2.13) \quad R = \frac{k}{P} \left[ 1 + \sqrt{2 \left( 1 - \frac{P}{k} e^{1 - \frac{P}{k}} \right)} + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{P}{k} e^{1 - \frac{P}{k}} \right) + \dots \right]$$

A sorfejtés akkor konvergál, ha  $\frac{P}{k}$  közel van 1-hez.

Legyen

$$k = \frac{P}{1 - \varepsilon}$$

azaz

$$(2.14) \quad \varepsilon = 1 - \frac{P}{k}$$

akkor  $0 < \varepsilon < 1$ .  $\varepsilon$  tehát a relatív kihasználatlan kapacitást jelenti, vagyis a ki nem használt kapacitás és a teljes kapacitás viszonyát;  $100 \varepsilon$  tehát a kihasználatlan kapacitást százalékban adja meg. A (2.13) sorfejtésből megkaphatjuk  $R$ -nek  $\varepsilon$  hatványai szerinti sorfejtést.

$$(2.15) \quad R = 1 + 2\varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon^2 + \frac{28}{9}\varepsilon^3 + \frac{469}{135}\varepsilon^4 + \dots$$

Első közelítésben tehát

$$(2.16) \quad R \approx 1 + 2\varepsilon = 1 + 2 \left( 1 - \frac{P}{k} \right).$$

Fontos megjegyezni, hogy ez a közelítés alsó becslést ad  $R$ -re, azaz valójában  $R' > 1 + 2\varepsilon$ . Ezt a következőképpen láthatjuk be:

A bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens azzal az állítással, hogy az  $x^k e^{P(1-x)}$  függvény az  $x = 1 + 2\varepsilon$  helyen 1-nél nagyobb értéket vesz fel; ez viszont azt jelenti, hogy

$$(2.17) \quad (1 + 2\varepsilon) e^{-2\varepsilon(1-\varepsilon)} > 1.$$

Utóbbi egyenlőtlenség viszont érvényes  $\varepsilon$  minden számbajövő értékére, azaz ha  $0 < \varepsilon < 1$ , ugyanis ha  $c(\varepsilon) = (1 + 2\varepsilon)e^{-2\varepsilon(1-\varepsilon)}$ , úgy  $c(0) = 1$  és  $c'(\varepsilon) = 8\varepsilon^3 e^{-2\varepsilon(1-\varepsilon)}$ , vagyis  $c(\varepsilon)$  monoton növekvő függvény.

Az elmondottak alapján most már gyorsan eljuthatunk a probléma teljes megoldásához. Feladatunkat megoldottuk, ha éles felső becslést adunk a

$\sum_{n=M}^{\infty} A_n$  kifejezésére. Ebből a célból szükségünk lesz a Cauchy-féle együttható becslésre, amely szerint

$$(2.18) \quad A_m \leq \frac{\max_{|z|=R_1} |A(z)|}{R_1^m} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Ezt az egyenlőtlenséget bármely olyan  $R_1$  értékre alkalmazhatjuk, melyre  $A(z)$  az  $R_1$  sugarú körben reguláris; speciálisan tehát alkalmazhatjuk az  $R_1 = 1 + 2\varepsilon$  értékre. Mivel  $A_k(1) = \varepsilon$ , nyilvánvaló, hogy ha  $|z| = 1 + 2\varepsilon$ , úgy

$$|A(z)| \leq \frac{\varepsilon(1 + 2\varepsilon)^{k-1}(1 + (1 + 2\varepsilon)^k)}{(1 + 2\varepsilon)^k e^{-2P\varepsilon} - 1}.$$

Másrészt azonban, ha  $r > 1$ , úgy  $r^k - 1 \geq k(r - 1)$

és így

$$(1 + 2\varepsilon)^k e^{-2P\varepsilon} - 1 \geq k \left[ (1 + 2\varepsilon) e^{-2\frac{P}{k}\varepsilon} - 1 \right] = \frac{P}{1-\varepsilon} [(1 + 2\varepsilon) e^{-2\varepsilon(1-\varepsilon)} - 1]$$

Mivel

$$(1 + 2\varepsilon) e^{-2\varepsilon(1-\varepsilon)} - 1 = \int_0^\varepsilon 8x^2 e^{-2x(1-x)} dx$$

és ha  $0 < \varepsilon < 1$ , úgy  $e^{-2x(1-x)} \geq e^{-\frac{1}{2}}$ , ha  $0 \leq x \leq \varepsilon$  tehát

$$(1 + 2\varepsilon) e^{-2\varepsilon(1-\varepsilon)} - 1 \geq \frac{8\varepsilon^3}{3\sqrt{e}}$$

és így

$$|A(z)| \leq \frac{3\sqrt{e}}{4\varepsilon^2 P} (1 - \varepsilon) (1 + 2\varepsilon)^{2k-1}.$$



Tehát a Cauchy egyenlőtlenség szerint

$$A_m \leq \frac{3\sqrt[3]{e}(1-\varepsilon)}{4\varepsilon^2 P(1+2\varepsilon)^{m+1-2k}} \quad (m = M, M+1, \dots)$$

és így

$$(2.19) \quad \sum_{m=M}^{\infty} A_m \leq \frac{3\sqrt[3]{e}(1-\varepsilon)}{8\varepsilon^3 P(1+2\varepsilon)^{M-2k}}.$$

A feladat megoldása azt kívánja, hogy igen kicsinnyé tegyük annak a valószínűségét, hogy  $\eta_i < H_0$  legyen; ennek valószínűsége viszont nem más, mint

$$\sum_{m=H+k-H_0}^{\infty} A_m$$

és így (2.19) szerint, azt kell elérni, hogy

$$(2.20) \quad \frac{3\sqrt[3]{e}(1-\varepsilon)}{8\varepsilon^3 P(1+2\varepsilon)^{H-H_0-k}} < \delta$$

legyen, ahol  $\delta$  egy igen kicsiny szám, pl.  $\delta = 0,0001$ . Ha az időegység 1 perc, ez azt jelenti, hogy általában 10 000 percenként, azaz — 8 órás munkanapokat számítva kb. 21 naponként egyszer fordul csak elő, hogy a nyomás a megengedett legkisebb nyomás alá süllyed. Természetesen  $\delta$  értékét még kisebbre választva, a biztonság még növelhető.

Ezt  $k$  megválasztásával kell elérnünk.

Ha például  $\delta = 0,0001$  értéket választjuk, (2.20)-ból  $\varepsilon$ -ra a következő egyenlőtlenséget nyerjük, figyelembe véve, hogy  $k = \frac{P}{1-\varepsilon}$

$$(2.21) \quad \frac{\varepsilon^3(1+2\varepsilon)^{H-H_0-\frac{P}{1-\varepsilon}}}{1-\varepsilon} \geq \frac{3 \cdot 10^4 \cdot \sqrt[3]{e}}{8P}.$$

Ha  $\varepsilon$  értékét (2.21)-nek megfelelően megválasztjuk, úgy a  $k = \frac{P}{1-\varepsilon}$  összefüggésből adódik, hogy a kompresszor teljesítőképességét milyen nagyra kell megválasztanunk, hogy a fogyasztást fedezni tudja.

A numerikus megoldás tekintetében két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha  $H - H_0$  nagy  $P$ -hez képest, úgy (2.21) általában  $\varepsilon$ -nak már kicsiny értékeire teljesül, és így (2.21) nevezőjében az  $1 - \varepsilon$  tényezőt elhagyva és a

$$(2.22) \quad B(\varepsilon) = P\varepsilon^3(1+2\varepsilon)^{H-H_0-\frac{P}{1-\varepsilon}} \geq 6200 = C$$

egyenlőtlenséget vizsgálva, ha (2.22) teljesül, úgy (2.21) is teljesül. A megoldás mármost úgy történhet, hogy keresünk egy felső becslést arra az  $\varepsilon$ -ra, amelyre

(2.22)-ben egyenlőség van, azaz egy  $\varepsilon$ -értéket, melyre már a (2.22) egyenlőtlenség biztosan teljesül; legyen ez  $\varepsilon_1$ ; akkor megoldjuk a

$$(2.23) \quad P\varepsilon_1^3(1+2\varepsilon)^{H-H_0-\frac{P}{1-\varepsilon_1}} = C$$

egyenletet  $\varepsilon$ -ra, vagyis vesszük az

$$(2.24) \quad \varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{C}{P\varepsilon_1^3} \right)^{\frac{1}{H-H_0-\frac{P}{1-\varepsilon_1}}} - 1 \right]$$

közelítő értéket és ezt az eljárást még egyszer vagy még háromszor megismételjük; ugyanis az  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  értékek váltakozva felülről, illetve alulról közelítik a helyes  $\varepsilon$  értéket, azaz ha  $\varepsilon_1 > \varepsilon$ , akkor  $\varepsilon_2 < \varepsilon$ ,  $\varepsilon_3 > \varepsilon$  s. i. t. és úgy ahhoz, hogy felső becslést kapjunk, páratlan indexű közelítő értéknél kell megállanunk.

Mielőtt az eljárás konvergenciáját megvizsgálánk, állapítsuk meg, hogy milyen feltételek mellett elégíthető ki egyáltalán a (2.22) egyenlőtlenség? Ha feltesszük, hogy

$$(2.25) \quad H - H_0 > 2P \left( 1 + \sqrt{\frac{3}{P \log 3}} \right)$$

(ami biztosan teljesül, ha  $H - H_0 > 2,8P$  figyelembe véve, hogy  $P > 17$  amit fel fogunk tenni (lásd (2.26)], úgy a

$$B(\varepsilon) = P\varepsilon^3(1+2\varepsilon)^{H-H_0-\frac{P}{1-\varepsilon}}$$

függvény monoton növekvő a  $\left( 0, \frac{\sqrt{\frac{3}{P \log 3}}}{1 + \sqrt{\frac{3}{P \log 3}}} \right)$  intervallumban és így

felvesz minden értéket 0 és  $C_0 = B \left( \frac{\sqrt{\frac{3}{P \log 3}}}{1 + \sqrt{\frac{3}{P \log 3}}} \right)$  között. Mivel könnyen

belátható, hogy

$$C_0 \geq \frac{1,8e^{2,45\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}$$

tehát a (2.22) egyenlőtlenség bizonyosan kielégíthető, ha  $c_0 > c$ , ami viszont teljesül, ha teljesül az  $1,8e^{2,45\sqrt{P}} > 6200\sqrt{P}$  egyenlőtlenség: utóbbi viszont fennáll, ha

$$(2.26) \quad P > 17.$$

A következőkben feltesszük, hogy úgy (2.25), mint (2.26) teljesülnek.

Rátérünk ezek után a vázolt eljárás konvergenciájának vizsgálatára; az eljárás nem más, mint a közönséges iterációs eljárás, alkalmazva az  $\varepsilon = \varphi(\varepsilon)$  egyenletre, ahol

$$(2.27) \quad \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{C}{P\varepsilon^3} \right)^{\frac{1}{H-H_0-\frac{P}{1-\varepsilon}}} - 1 \right].$$

Tehát a konvergencia biztosításához csak azt kell ellenőrizni, hogy teljesül-e a  $|\varphi'(\varepsilon)| < 1$  feltétel. Könnyen belátható, hogy

$$(2.28) \quad \varphi'(\varepsilon) < 0$$

ha

$$\varepsilon < \frac{\sqrt{\frac{3}{2P}}}{1 - \sqrt{\frac{3}{2P}}}$$

és

$$|\varphi'(\varepsilon)| < \frac{9}{\log \frac{C}{P\varepsilon^3}}$$

tehát

$$(2.29) \quad |\varphi'(\varepsilon)| < 1 \quad \text{ha} \quad \varepsilon < \frac{0,92}{3\sqrt[3]{P}}.$$

Mivel a (2.29) alatti egyenlőtlenség kevesebb megszorítást jelent, mint a (2.28) alatti, ha  $P > 7,5$ , tehát a fortiori, ha  $P > 17$  következik, hogy ha

$$0 < \varepsilon < \frac{\sqrt{\frac{3}{2P}}}{1 + \sqrt{\frac{3}{2P}}} \quad \left( \text{ami teljesül, ha } \varepsilon < \frac{0,95}{\sqrt[3]{P}} \right)$$

úgy

$$-1 < \varphi'(\varepsilon) < 0.$$

és így az iterációs eljárás konvergál.

Mielőtt eredményeinket összefoglalnánk, foglalkozzunk  $H - H_0$  számértékének meghatározásával. Mivel a maximális nyomás, amelyenél a kompresszor kikapcsolódik 8,8 atmoszféra, és a minimális, amelyenél még működnek a gépek 6,5 atmoszféra, ha a tartály űrtartalma  $Wm^3$ , úgy tehát a tartály 8 atmoszféra nyomásnál 8000  $W$  liter levegőt, 6,5 atmoszféra nyomásnál 6500  $W$  liter levegőt tartalmaz, vagyis

$$H = \frac{8000 W}{\alpha} \quad \text{és} \quad H_0 = \frac{6500 W}{\alpha}$$



tehát a minket érdeklő  $H - H_0$  különbség a következőképpen számítható ki :

$$(2.30) \quad H - H_0 = \frac{1500W}{\alpha},$$

ahol tehát  $W$  jelenti a tartály űrtartalmát  $m^3$ -ekben és  $\alpha$  egy fogyasztó időegységenkénti fogyasztását literekben. A (2.30) alatti kifejezés felfelé kerekítendő, hogy egész szám legyen.

A (2.30)-ban szereplő  $\alpha$  számszerű értéke az időegység megválasztásától függ. Mint arra már az I. §-ban rámutattunk, az időegység megválasztását úgy kell végezni, hogy figyelembe vesszük azt, hogy a kikapcsolás a normál nyomást legfeljebb 10%-kal meghaladó nyomásnál, a bekapcsolás a normál nyomásnál legfeljebb 10%-kal kisebb nyomásnál történik. Ezt — mint arra már szintén rámutattunk — azáltal vehetjük figyelembe, hogy az időegységet úgy választjuk, hogy fennálljon az

$$(2.31) \quad Np = P < \frac{H}{10}$$

egyenlőtlenség. Ha  $\alpha_1$  jelenti egy fogyasztó egy perc alatti fogyasztását, és  $\tau$  a választandó időegységet percekben, úgy  $H = \frac{8000W}{\alpha_1\tau}$  és (2.31) szerint fenn kell állni a  $P < \frac{800W}{\alpha_1\tau}$ , vagyis a

$$(2.32) \quad \tau < \frac{800W}{\alpha_1P}$$

egyenlőtlenségnek. Grafikonjainkat a következő időegységekre készítettük el : 1 perc, 30 sec, 12 sec és 6 sec. *Grafikonjaink használatához tehát először ki kell számítani a  $\frac{800W}{\alpha_1P}$  szömot; ha ez 1-nél nagyobb, úgy 1 percet választunk időegységül; ha  $\frac{800W}{\alpha_1P}$  értéke 0,5 és 1 közé esik, úgy az időegységet fél perccnek, ha 0,2 és 0,5 közé esik, úgy 12 másodperccnek, ha viszont 0,1 és 0,2 közé esik, úgy az időegységet 6 másodperccnek választjuk.* Természetesen lehet több különböző időegységnek megfelelően is elkészíteni a grafikont, azonban mivel a gyakorlatban úgys csak bizonyos számú kompresszor-típus áll rendelkezésre, ez nem látszott egyelőre szükségesnek.

Eredményeinket tehát a következőkben foglalhatjuk össze : *Ha a sűrített levegőt  $N$  fogyasztó veszi igénybe, és a fogyasztók általában a munkaidő  $p$ -ed részében működnek, vagyis a sűrített levegővel dolgozó gépek kihasználási tényezője  $p$ -vel egyenlő és  $P = pN$ , továbbá ha a fogyasztók percenként  $\alpha_1$  liter levegőt fogyasztanak és a tartály űrtartalma  $W m^3$ , úgy a kompresszor percenkénti teljesítménye  $\frac{P\tau_1}{1-\varepsilon}$  liternél nagyobb kell, hogy legyen ahhoz, hogy ne süllyedjen a nyomás 6,5 atmoszféra alá; itt  $\varepsilon$  az*

$$(2.33) \quad \varepsilon^3(1 + 2\varepsilon) \frac{1500W}{\alpha} - \frac{P}{1-\varepsilon} = \frac{6200}{P\tau}$$

egyenlet gyöke, ahol  $\alpha = \alpha_1 \tau$  és a  $\tau$  időegység úgy van megválasztva, hogy teljesüljön a (2.32) egyenlőtlenség. Ha a  $P$ ,  $W$  és  $\alpha_1$  adatok adva vannak, akkor tehát úgy járunk el, hogy először (2.32)-ből meghatározzuk a helyes  $\tau$  időegységet, azután  $\alpha = \alpha_1 \tau$  érték mellett megoldjuk  $\varepsilon$ -ra a (2.33) egyenletet, és az így kapott  $\varepsilon$  értékkel kiszámítjuk a  $k = \frac{P\alpha_1}{1-\varepsilon}$  számot ez adja, hogy hány liter percenkénti teljesítményű kompresszorra van szükség.

Lássunk most egy számpéldát: az üzem sűrített levegővel dolgozó gépeinek száma legyen  $N = 100$ , a gépkihasználás legyen  $p = 0,5$ , vagyis 50%-os és így

$$P = Np = 50;$$

tegyük fel, hogy egy fogyasztó percenként 50 litert ( $\alpha_1 = 50$ ) fogyaszt, és a tartály ürtartalma legyen  $10 \text{ m}^3$  ( $W = 10$ ); ez esetben  $\frac{800W}{\alpha_1 P} = 3,2 > 1$ , tehát az időegységet vehetjük egy percnél, vagyis  $\tau = 1$ ,  $\alpha = \alpha_1$ , akkor tehát

$$H - H_0 = \frac{1500W}{\alpha} = 300.$$

Megoldandó tehát az

$$\varepsilon^3(1 + 2\varepsilon)^{300 - \frac{50}{1-\varepsilon}} = 124$$

egyenlet. Első közelítő értéknek válasszuk az  $\varepsilon = 0,05$  értéket.

Mivel

$$1 + 2\varepsilon = 1,1 \quad \text{és} \quad 1,1^8 > 2$$

tehát

$$(1 + 2\varepsilon)^{300 - \frac{50}{1-\varepsilon}} > 2^{30} > 8 \cdot 10^8$$

másrészt  $\frac{124}{\varepsilon^3} < 10^6$ , vagyis valóban  $\varepsilon_1$  valamivel nagyobb a szükségesnél. Számítsuk ki a második közelítést:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{124 \cdot 10^6}{125} \right)^{\frac{1}{247}} - 1 \right] = 0,029.$$

Ez valamivel kevesebb, mint amire szükség van, tekintve, hogy teljesül az

$$\varepsilon_1 < \frac{\sqrt{\frac{3}{2P}}}{1 + \sqrt{\frac{3}{2P}}} = 0,11$$

feltétel. Megjegyzendő, hogy az eljárás konvergál is, mivel teljesül a

$$\frac{9}{\log \frac{6200}{P\varepsilon^3}} < 1$$

feltétel.

Nézzük most a harmadik közelítést :

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{124 \cdot 10^9}{24 \cdot 500} \right)^{\frac{1}{249}} - 1 \right] = 0,032.$$

Ez tehát kielégítő közelítés ; a helyes  $\varepsilon$  érték 0,029 és 0,032 között van, ha a felső értéket fogadjuk el, ez csak növeli a biztonságot. Ez esetben tehát

$k = \frac{P}{1-\varepsilon} = 52$  vagyis a kompresszort úgy kell méretezni, hogy percenként 43,5 liter levegőt adjon.

Abból a célból, hogy ne kelljen a számítást minden egyes esetre elvégezni, a következőképpen járhatunk el :  $\varepsilon$  különböző értékeire pl.

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 0,010, \quad 0,015, \quad 0,020, \quad 0,025, \quad 0,030, \quad 0,035, \quad 0,040, \quad 0,045, \\ & 0,050, \quad 0,060, \quad 0,070, \quad 0,080, \quad 0,090, \quad 0,1, \quad 0,12, \quad 0,14, \\ & 0,16, \quad 0,18, \quad 0,20, \quad 0,25, \quad 0,30, \text{ értékekre} \end{aligned}$$

ábrázoljuk  $\frac{W}{\alpha}$  értéket, mint  $p$  függvényét, azaz ábrázoljuk a

$$(2.35) \quad \frac{W}{\alpha} = \frac{1}{1500} \left[ \frac{P}{1-\varepsilon} + \frac{\log \frac{6200}{\tau \varepsilon^3} - \log P}{\log(1+2\varepsilon)} \right]$$

függvényt, így egy görbe-hálózatot kapunk, amelyet  $\tau = 1$  az 1. ábra szemlélteti. A 2., 3. és 4. ábra a 30, 12, ill. 6 másodpercenyi időegység esetére vonatkozik.

Adott  $P$  és  $\frac{W}{\alpha}$  értékekhez a hozzá tartozó  $\varepsilon$ -értéket úgy határozzuk meg ezen ábrák segítségével, hogy megkeressük az ábrán azt a pontot, amelynek abszcisszája  $P$  és ordinátája  $\frac{W}{\alpha}$ , és megnézzük, hogy mely  $\varepsilon$ -értéknek megfelelő görbe halad közvetlenül ezen pont alatt.\* Így pl. a  $P = 50$ ,  $W = 10$ ,  $\alpha = 50$  esetben az ezen értékeknek megfelelő pont az  $\varepsilon = 0,030$  és  $\varepsilon = 0,035$  értékeknek megfelelő görbék között fekszik (interpolációval nyerjük az  $\varepsilon = 0,032$  értéket, megegyezésben az előbb végzett numerikus közelítő eljárással).

A görbék nagy  $\varepsilon$ -ra kezdettől fogva emelkedők, kisebb  $\varepsilon$  értékekre eleinte enyhén esnek, aztán emelkednek.

Az elmondottak azt jelentik, hogy adott fogyasztás mellett minél nagyobb a légtartályok ürtartalma, annál kisebb teljesítőképességű kompresszor elegendő az üzem ellátásához, míg adott légtartáyméret ( $W$ ) és gépenkénti időegység alatti fogyasztás ( $\alpha$ ) mellett az  $\varepsilon$  szám általában  $p$ -vel együtt növekszik, de nagy  $\frac{W}{\alpha}$  mellett, azaz igen nagy tartáyméret mellett  $P$  növekedésével  $\varepsilon$  eleinte csökken és csak nagy  $P$ -re kezd növekedni. Ez tehát azt jelenti, hogy van egy meghatározott  $P$ -érték, amelynél  $\varepsilon$  minimális, azaz a kapacitás kihasználása optimális.

\* Ha nagyobb pontosságot kívánunk, úgy interpolációt végzünk.



Minél kisebb  $\varepsilon$ , annál jobb a kompresszor kihasználása, annál kevesebb kapacitás van kihasználatlanul, tehát egy új üzem méretezésénél a leghelyesebb úgy eljárni, hogy előre rögzítjük  $\varepsilon$  értékét, (pl.  $\varepsilon = 0,03$ , vagy  $\varepsilon = 0,05$ -ben) és a várható  $P$ -hez megkeressük a hozzátartozó  $\frac{W}{\alpha}$  értéket, és a  $k\alpha = \frac{P\alpha}{1-\varepsilon}$  értéket és ennek megfelelően kell a kompresszort és a légtartályt méretezni. Amennyiben a kettő közül az egyik — pl.  $\frac{W}{\alpha}$  — adott, úgy  $\varepsilon$  értéke már  $P$  által meg van határozva. Ha viszont úgy  $\frac{W}{\alpha}$ , mint  $k\alpha$  adottak, úgy kiszámítható, hogy milyen fogyasztást bír a berendezés ellátni, mégpedig a következőképpen: megoldjuk  $P$ -re a

$$P \left( 1 - \frac{P}{k} \right)^3 \left( 3 - \frac{2P}{k} \right) = \frac{1500W}{\alpha} \cdot k = 6200$$

egyenletet.

Ilyen módon fenti eredmények segítségével bármilyen, a kompresszor és a légtartály méretezésére vonatkozó probléma, szabatosan megoldható. Ez lehetővé teszi a tervezésnél jelentős összegek megtakarítását, feleslegesen nagy beruházások elkerülésével. A szükséges szám adatok a grafikonokról leolvashatók, és így szinte semmi fáradságot nem okoznak, ha egyszer a szükséges grafikonok elkészültek.

### 3. §. Kiegészítő megjegyzések

Ebben a §-ban néhány kiegészítő megjegyzést kívánok tenni az előző §-okban megoldott problémával kapcsolatban, amely megjegyzések a probléma megoldása során folytatott vizsgálatok olyan eredményeire vonatkoznak, amelyek — bár a fent ismertetett megoldás szempontjából nélkülözhetőeknek bizonyultak — további ilyen irányú vizsgálatok esetében szükségesek lehetnek. Itt közlünk továbbá néhány olyan eredményt, amelyeket az előzőekben már felhasználtunk, azonban bizonyítás nélkül.

Ezen megjegyzések egyrésze a fogyasztás ingadozásainak további vizsgálatára, másrészt a légtartály-nyomásának középértékére, továbbá a probléma más lehetséges megoldásmódjára, végül pedig a (2.33) egyenlet gyökeinek meghatározására alkalmazott iterációs módszerre vonatkoznak.

#### A) Megjegyzések a fogyasztás ingadozásaival kapcsolatban

Az egyszerűség kedvéért először arra az esetre szorítkozunk, amikor  $p$  értéke kicsiny és  $N$  értéke nagy és a fogyasztók egyformák, vagyis amikor a időpontban az egyidejűleg működő fogyasztók száma, amelyet az előbbiekben  $\xi$ -vel jelöltünk, a stacionér határesetben Poisson-eloszlásúnak vehető:

$$(3.1) \quad P(\xi_t = n) = \frac{P^n e^{-P}}{n!},$$

ahol  $P = pN$  és  $p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ , továbbá  $\lambda$  jelenti egy gép bekapcsolásának valószínűségeát és  $\frac{1}{\mu}$  az  $1 - e^{-\mu t}$  exponenciális eloszlású működési idő várható értékét. Mivel feltevésünk szerint  $p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$  kicsiny, tehát  $\lambda$  is kicsiny  $\mu$ -hez képest és így  $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$  közelítőleg  $\frac{\lambda}{\mu}$ -vel vehető egyenlőnek; bevezetve a  $\Lambda = N\lambda$  jelölést, azt kapjuk tehát, hogy  $\xi_t$  eloszlása közelítőleg  $\frac{\Lambda}{\mu}$  várható értékű Poisson-eloszlás. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha abból indulunk ki, hogy végtelen sok gép van, és a gépek bekapcsolásai Poisson folyamatot alkotnak  $\Lambda$  valószínűségeát; ebben az esetben — mint azt egy előző dolgozatban [5] kimutattuk, — ha  $t = 0$  időpontban egy gép sem működött, úgy a  $t$  időpontban működő gépek száma — amelyet továbbra is  $\xi_t$ -vel jelölünk — Poisson eloszlású  $\frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$  várható értékkel, azaz

$$(3.2) \quad V(\xi_t = n) = P_n(t) = \frac{\left[ \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \right]^n}{n!} e^{-\frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})}.$$

Ha  $t \rightarrow \infty$ , úgy stacionér határesetként kapjuk a

$$(3.3) \quad P_n = \frac{\left( \frac{\Lambda}{\mu} \right)^n}{n!} e^{-\frac{\Lambda}{\mu}}$$

valószínűségeloszlást.

Az 1. §-ban szó esett arról, hogy a  $\xi_t = n$ ,  $\xi_{t+s} = m$  »átmenetnek«  $m$  és  $n$  minden értékére pozitív valószínűsége van; ezt azonban ott nem bizonyítottuk. Számítsuk ezért most ki mindenekelőtt a

$$(3.4) \quad P_{m|n}(t, s) = V(\xi_{t+s} = m | \xi_t = n)$$

feltételes valószínűségeket, a  $\xi_t$  Markov-lánc átmenet- valószínűségeit. Egyszerű valószínűségszámítási megfontolással adódik (3.2) felhasználásával (feltételezve, hogy a működési idők exponenciális eloszlásúak), hogy

$$(3.5) \quad P_{m|n}(t, s) = \sum_{j=1}^{\min(m, n)} \binom{n}{j} e^{-\mu s j} (1 - e^{-\mu s})^{n-j} \frac{\left[ \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu s}) \right]^{m-j}}{(m-j)!} e^{-\frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu s})}$$

Ennek alapján kiszámíthatjuk  $\xi_t$  és  $\xi_{t+s}$  együttes eloszlásának generátorfüggvényét: legyen  $V(\xi_t = n, \xi_{t+s} = m) = P_{nm}(t, s)$

$$\text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_{nm}(t, s) x^n y^m = G(x, y, t, s), \text{ akkor}$$

mivel  $P_{nm}(t, s) = P_n(t) P_{m|n}(t, s)$ , következik, hogy

$$(3.6) \quad G(x, y, t, s) = \exp \left[ \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu s}) (y - 1) + \right. \\ \left. + \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) (x - 1) + \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) e^{-\mu s} x (y - 1) \right]$$

A  $G(x, y, t, s)$  generátorfüggvény segítségével kiszámíthatjuk  $\xi_t$  és  $\xi_{t+s}$  korrelációs együtthatóját; mivel

$$(3.7) \quad M(\xi_t \xi_{t+s}) = \left( \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \right)_{x=y=1} = \frac{\Lambda}{\mu} e^{-\mu s} (1 - e^{-\mu t}) + \\ + \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 (1 - e^{-\mu t}) (1 - e^{-\mu(t+s)})$$

továbbá

$$(3.8) \quad M(\xi_t) = \sigma^2(\xi_t) = \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$$

tehát

$$(3.9) \quad \rho(\xi_t, \xi_{t+s}) = \frac{M(\xi_t \xi_{t+s}) - M(\xi_t) M(\xi_{t+s})}{\sigma(\xi_t) \sigma(\xi_{t+s})} = e^{-\mu s} \sqrt{\frac{1 - e^{-\mu t}}{1 - e^{-\mu(t+s)}}}$$

és így rögzített  $s$  mellett

$$(3.10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\xi_t, \xi_{t+s}) = e^{-\mu s}.$$

Erre az eredményre is hivatkoztunk az 1. §-ban.

Számítsuk most ki a  $t$  időponttól  $t + s$ -ig terjedő idő alatti összefogyasztás várható értékét és szórását.\*

Ha ezt a fogyasztást  $X_s(t)$ -vel jelöljük, úgy

$$(3.11) \quad X_s(t) = \alpha \int_t^{t+s} \xi_t dt$$

és így

$$(3.12) \quad M(X_s(t)) = \alpha \int_t^{t+s} M(\xi_t) dt = \alpha \frac{\Lambda}{\mu} \left[ s + \frac{e^{-\mu t} (1 - e^{-\mu s})}{\mu} \right]$$

tehát

$$(3.13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} M(X_s(t)) = \frac{\alpha \Lambda s}{\mu},$$

\* Ebben a §-ban a  $t$  változót folytonos változónak tekintjük.



továbbá

$$(3.14) \quad \sigma^2(X_s(t)) = M(X_s^2(t)) - M^2(X_s(t))$$

és mivel

$$(3.15) \quad M(X_s^2(t)) = \alpha^2 \int_t^{t+s} \int_t^{t+s} M(\xi_u \xi_v) du dv,$$

tehát

$$(3.16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} M(X_s^2(t)) = \frac{\alpha^2 \Lambda^2 s^2}{\mu^2} + \frac{2\alpha^2 \Lambda}{\mu^2} \left( s - \frac{(1 - e^{-\mu s})}{\mu} \right)$$

és így

$$(3.17) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma^2(X_s(t)) = \frac{2\alpha^2 \Lambda}{\mu^2} \left[ s - \frac{(1 - e^{-\mu s})}{\mu} \right].$$

Ezen eredmények alapján a Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazásával becslést nyerhetünk annak valószínűségére, hogy az összfogyasztás  $s$  idő alatt meghalad egy bizonyos  $A$  értéket. A Csebisev-egyenlőtlenség szerint ugyanis (3.13)-ból és (3.17)-ből következik, hogy

$$(3.18) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P\left(X_s(t) - \frac{\alpha \Lambda s}{\mu} > c \frac{\alpha \sqrt{2\Lambda}}{\mu}\right) < \frac{1}{c^2}.$$

Ezt az eredményt akkor alkalmazhatjuk, ha igen nagy tartályunk van, és azt kívánjuk tudni, hogy amennyiben a kompresszor nem működik, mi a valószínűsége, hogy a tartályban lévő készlet  $s$  ideig elegendő a fogyasztás fedezésére; amennyiben a tartály befogadóképessége gyakorlatilag korlátlanak vehető, úgy ugyanez az eredmény működő kompresszor esetében is megadja annak valószínűségét, hogy a kompresszor fedezni tudja a fogyasztást:

#### B) Megjegyzések a légtartály nyomásának középértékével kapcsolatban

Amint azt a 2. §-ban megjegyeztük,  $\eta_i^*$  várható értékének kiszámításához ismernünk kellene a

$$(3.19) \quad z^k - e^{P(z-1)} = 0 \quad (0 < P < k, k \text{ egész})$$

egyenletnek az egységkör belsejében fekvő  $z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$  gyökeit. Ezen gyökök segítségével ugyanis  $\eta_i^*$  várható értéke a következőképpen fejezhető ki:

$$(3.20) \quad M(\eta_i^*) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{1-z_j} + \frac{P-1}{2} + \frac{k}{2(k-P)}.$$

Hasonlóképpen a  $z_j$  gyökök ismerete szükséges  $\eta_i^*$  szórásának kiszámításához is.

Meg fogjuk mutatni, hogy a  $z_j$  gyökök explicit alakban kifejezhetők, a  $W = ze^{-z}$  függvény, inverz függvényének sorfejtése segítségével. Könnyen belátható ugyanis, hogy a  $W = ze^{-z}$  függvény  $z = Z(W)$  inverz függvénye a következő sorfejtéssel állítható elő:

$$(3.22) \quad z = Z(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n n^{n-1}}{n!}, \quad \text{amely hatványsor a } |w| \leq \frac{1}{e}$$

közben konvergens.

Mivel  $k$  feltevésünk szerint egész szám, tehát a  $z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$  gyökök — valamilyen sorrendben — a

$$(3.23) \quad z = e^{\frac{2\pi i j}{k}} e^{\frac{P}{k}} (z-1) \quad (j = 1, 2, \dots, k-1)$$

egyenletek gyökei: számozzuk ezen gyököket éppen úgy, hogy  $z_j$  a (3.23) egyenletnek az egységkör belsejében fekvő — a Rouché-tétel értelmében egyetlen — gyöke legyen. Ez esetben tehát alkalmazva a (3.22) sorfejtést a  $\left(\frac{Pz}{k}\right) e^{-\left(\frac{Pz}{k}\right)} = \frac{P}{k} e^{-\frac{P}{k}} \omega^j \left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{k}}\right)$  egyenletnek eleget tevő  $z_j^* = \frac{Pz_j}{k}$  számra, nyerjük, hogy

$$(3.24) \quad z_j = \frac{k}{P} z_j^* = \frac{k}{P} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{P}{k} e^{-\frac{P}{k}} \omega^j\right)^n n^{n-1}}{n!} \quad (j = 1, 2, \dots, k-1)$$

Ilyen módon a  $z_j$  gyököket sorfejtés alakjában kaptuk meg: ezek a sorok konvergálnak, mivel

$$\left| \frac{P}{k} e^{-\frac{P}{k}} \omega^j \right| = \frac{P}{k} e^{-\frac{P}{k}} < \frac{1}{e}$$

tekintve, hogy  $xe^{-x}$  maximumát az  $x = 1$  helyen veszi fel, és ott  $xe^{-x} = e^{-1}$ ; de ezek a sorok csak akkor konvergálnak gyorsan, ha  $\frac{P}{k}$  kicsiny; míg a minket érdeklő esetben  $\frac{P}{k}$  éppen hogy közel van 1-hez. Éppen ezért választottunk az előző §-ban más utat.

### C) Megjegyzések a tárgyalásmód választásával kapcsolatban

Azt a tényt, hogy a kompresszor akkor kapcsol ki, ha a nyomás a légtartályban kb. 10%-kal meghaladja a normál nyomást, és akkor kapcsol be, ha a nyomás kb. 10%-kal a normál nyomás alá süllyed, a probléma matematikai tárgyalásában oly módon vettük figyelembe, hogy bizonyos késleltetést vezettünk be azáltal, hogy a kompresszor be- és kikapcsolásai csak  $t$  egész-

számú értékeinél következhetnek be : vagyis feltettük, hogy a kompresszor  $t$  időpontban kikapcsol, ha a nyomás  $t - 1$  és  $t$  időpontok között túlhaladt a normál nyomáson : ez ugyanis valójában azt jelenti, hogy a kikapcsolódás valamivel a normál nyomás felett (és ennek megfelelően a bekapcsolás valamivel a normál nyomás alatt) következik be. Hogy a 10%-os túlhaladást ne lépjük túl, azt az időegység megfelelő választásával értük el. Ezt a tárgyalásmódot azért választottuk, mert ha a matematikai tárgyalásban közvetlenül vesszük figyelembe, hogy a be- és kikapcsolódás szintjei nem azonosak (és nem közvetve, ahogy tettük), akkor nemcsak hogy a tartály nyomásingadozásai, vagyis az  $\eta_t$  változók, nem alkotnak közönséges Markov-láncot, hanem még a tartály és a fogyasztás együttes állapota, azaz  $(\xi_t, \eta_t)$  sem, ellenben még hozzá kell venni a kompresszor állapotát is, vagyis egy  $\omega_t$  változót, amelynek értéke 1 ha a kompresszor működik, és 0 ha nem. Ugyanis ha  $H_2$  jelöli  $\eta_t$  azon értékét, amelynél a kikapcsolódás és  $H_1$  azt, amelynél a bekapcsolódás történik, úgy ha  $\eta_t$  értéke  $H_1$  és  $H_2$  között van, lehetséges az is, hogy a kompresszor működik és az is, hogy nem működik, viszont ez befolyással bír  $\eta_{t+1}$  értékére. Ebben az esetben is lehetséges a tárgyalás az elmondottakhoz hasonló módon, azonban ezzel itt nem foglalkozunk bővebben, csak megjegyezzük, hogy ilyen felfogásban is megvizsgáltuk a problémát, és azt találtuk, hogy a gyakorlat szempontjából a két tárgyalásmód által kapott  $k$ -értékek között az eltérés nem lényeges.

D) *Megjegyzések a gyökközelítésnél alkalmazott iterációs eljárással kapcsolatban*

Az előzőekben az

$$(3.25) \quad \varepsilon^3(1 + 2\varepsilon)^{H - H_0 - \frac{P}{1 - \varepsilon}} = \frac{C}{P}$$

egyenletet úgy oldottuk megközelítőleg, hogy  $\varepsilon = \varphi(\varepsilon)$  alakra hoztuk, mégpedig a következőképpen :

$$(3.26) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{C}{P\varepsilon^3} \right)^{H - H_0 - \frac{P}{1 - \varepsilon}} - 1 \right]$$

és erre az egyenletre alkalmaztuk az iterációs eljárást. A (3.25) egyenletet azonban többféleképpen lehet  $\varepsilon = \varphi(\varepsilon)$  alakra hozni, például a következőképpen is :

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{C}{P} (1 + 2\varepsilon)^{\frac{P}{1 - \varepsilon} - H + H_0}}$$

Azért választottuk éppen a (3.26) alakot, hogy az iteráció konvergenciája gyors legyen. Ugyanis általában, ha az  $F(x, x, \dots, x) = c$  egyenletet kívánjuk  $x = \varphi(x)$  alakra hozni és iterációval megoldani (vagyis egy olyan egyenletet, amelyben az ismeretlen  $x$  több helyütt ( $k$ -szor) fordul elő), úgy a következőképpen



célszerű eljárni: megvizsgáljuk az  $F(x_1, x_2, \dots, x_k)$  —  $k$ -változós függvény parciális deriváltjait az  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = x$  helyen (illetve mivel az  $x$  értéket nem ismerjük, annak környezetében) és megvizsgáljuk, hogy a  $\frac{\partial F}{\partial x_k}$

deriváltak közül melyik abszolút értékre a legnagyobb, vagyis hogy  $F(x_1, x_2, \dots, x_k^*)$  melyik változójának megváltoztatására a »legérzékenyebb«: tegyük fel, hogy ez a változó éppen  $x_1$ , úgy kifejezzük  $x_1$ -et az  $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = C$  egyenletből a többi változó segítségével  $x_1 = G(x_2, x_3, \dots, x_k^*)$  alakban és vizsgáljuk az  $x = \varphi(x) = G(x, x, \dots, x)$  egyenletet; mivel

$$(3.27) \quad \varphi'(x) = - \left( \frac{\sum_{j=2}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \right)_{x_j=x}$$

tehát ha a (3.27) jobboldalán álló függvény az  $x_1 = x_2 = \dots, x_k = x$  hely környezetében abszolút értékben 1-nél kisebb, úgy az iterációs eljárás konvergálni fog. Persze előfordulhat, hogy a (3.27) jobboldalán álló szám abszolút értéke nagyobb 1-nél. Ebben az esetben és általában bármely egyenlet esetében a következő eljárás vezet célhoz: valamilyen módon  $x = \varphi(x)$  alakra hozzuk az egyenletet, megállapítjuk, hogy  $\varphi(x)$  milyen határok közé esik: tegyük fel például, hogy  $\varphi(x)$   $a$  és  $b$  közé esik, ahol  $1 < a < b$ , mivel az  $x = \varphi(x)$  és  $x = \varphi_\alpha(x) = (1 - \alpha)x + \alpha\varphi(x)$  egyenletek gyökei azonosak, úgy választjuk meg az  $\alpha$  konstáns értékét, hogy  $|\varphi'_\alpha(x)|$  már bizonyosan 1-nél kisebb legyen, ezt elérjük pl.  $\alpha = \frac{1}{b-1}$  választásával, ugyanis akkor

$$0 = 1 + \frac{1}{b-1} - \frac{b}{b-1} < \varphi'_\alpha(x) =$$

$$= 1 - \alpha + \alpha\varphi'(x) < 1 + \frac{1}{b-1} - \frac{a}{b-1} = \frac{b-a}{b-1} < 1$$

ezek után az  $x = \varphi_\alpha(x)$  egyenletre már alkalmazhatjuk az iterációs eljárást.

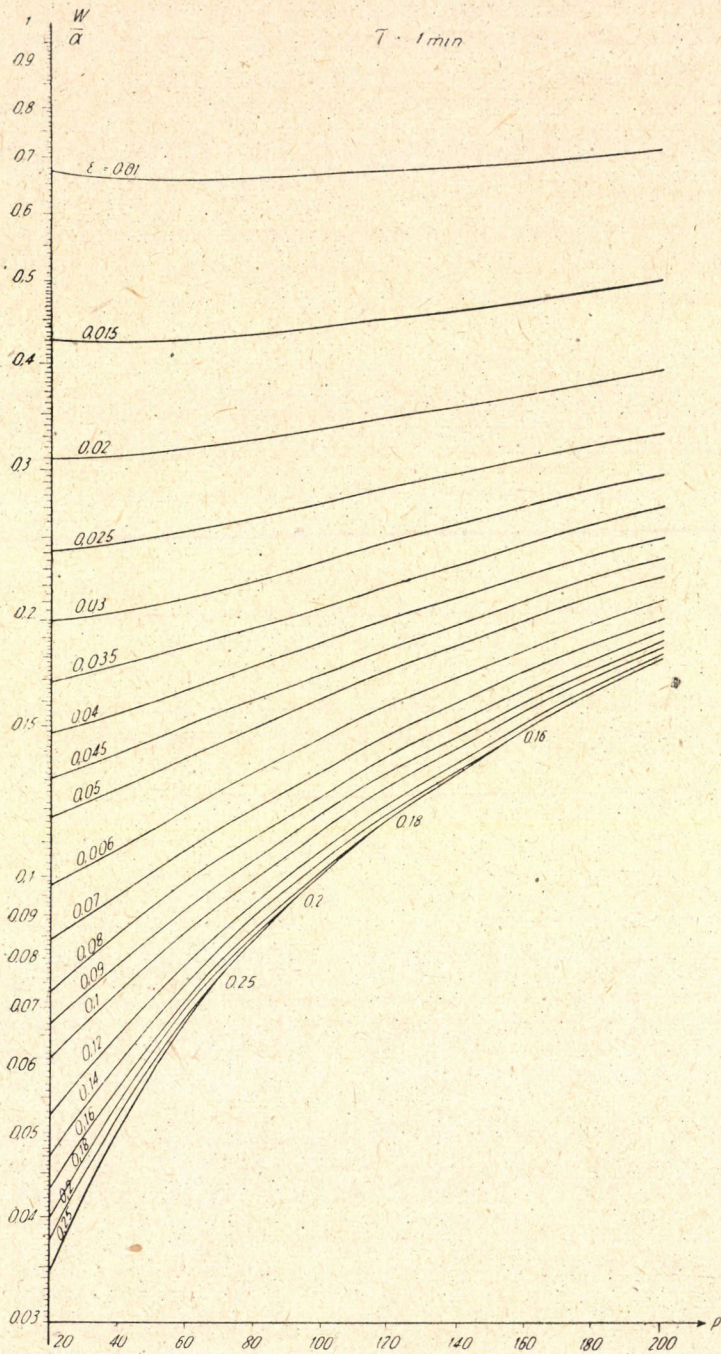
A vizsgált esetben  $F(x_1, x_2, x_3) = x_2^3(1 + 2x_1)^{H-H_0-\frac{P}{1-x_3}}$  és mivel az  $x_1 = x_2 = x_3 = x$  helyen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \left( \frac{H-H_0-\frac{P}{1-x}}{1+2x} \right) C, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{3C}{x} \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = -\frac{P \log(1+2x)C}{(1-x^2)}$$

tehát — figyelembe véve, hogy  $\frac{H-H_0}{P}$  általában igen nagy szám, — tehát

az  $F(x_1, x_2, x_3)$  függvény  $x_1$  változtatására a »legérzékenyebb«, ezért alkalmaztuk az iterációt a (3.26) egyenletre.

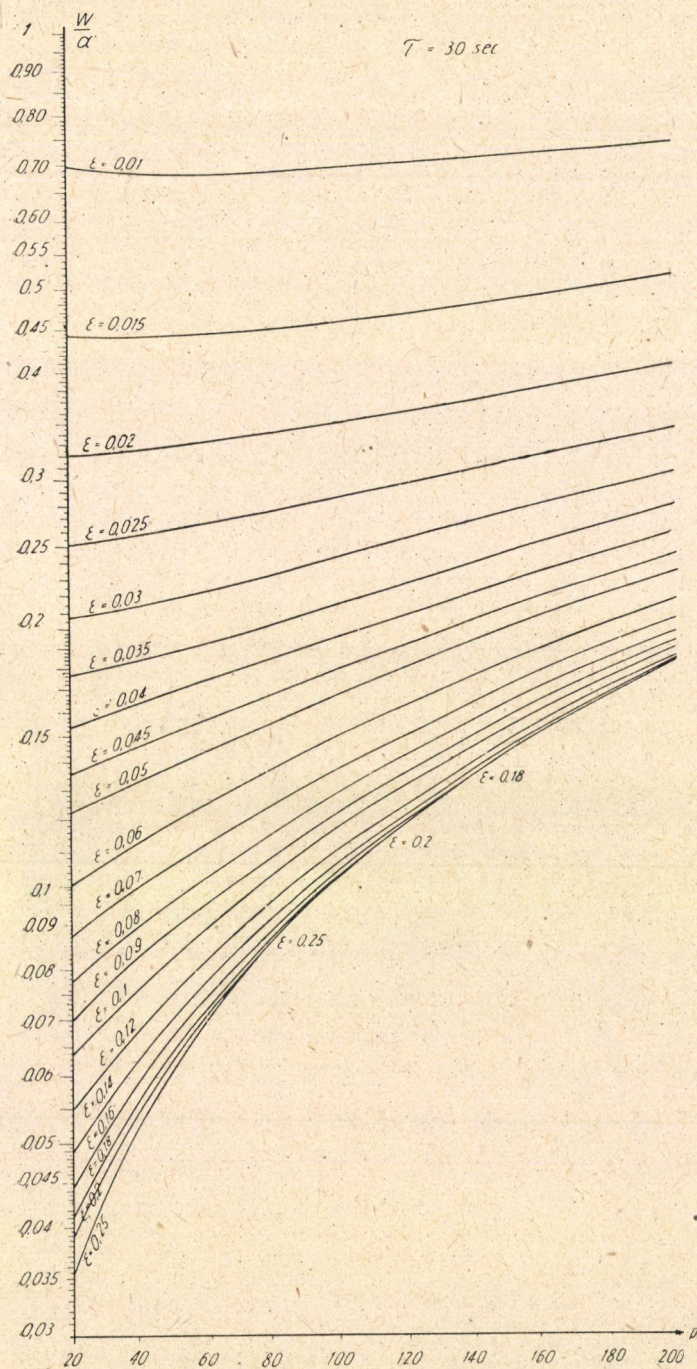
# Diagramm kompresszorok méretezéséhez



1. ábra



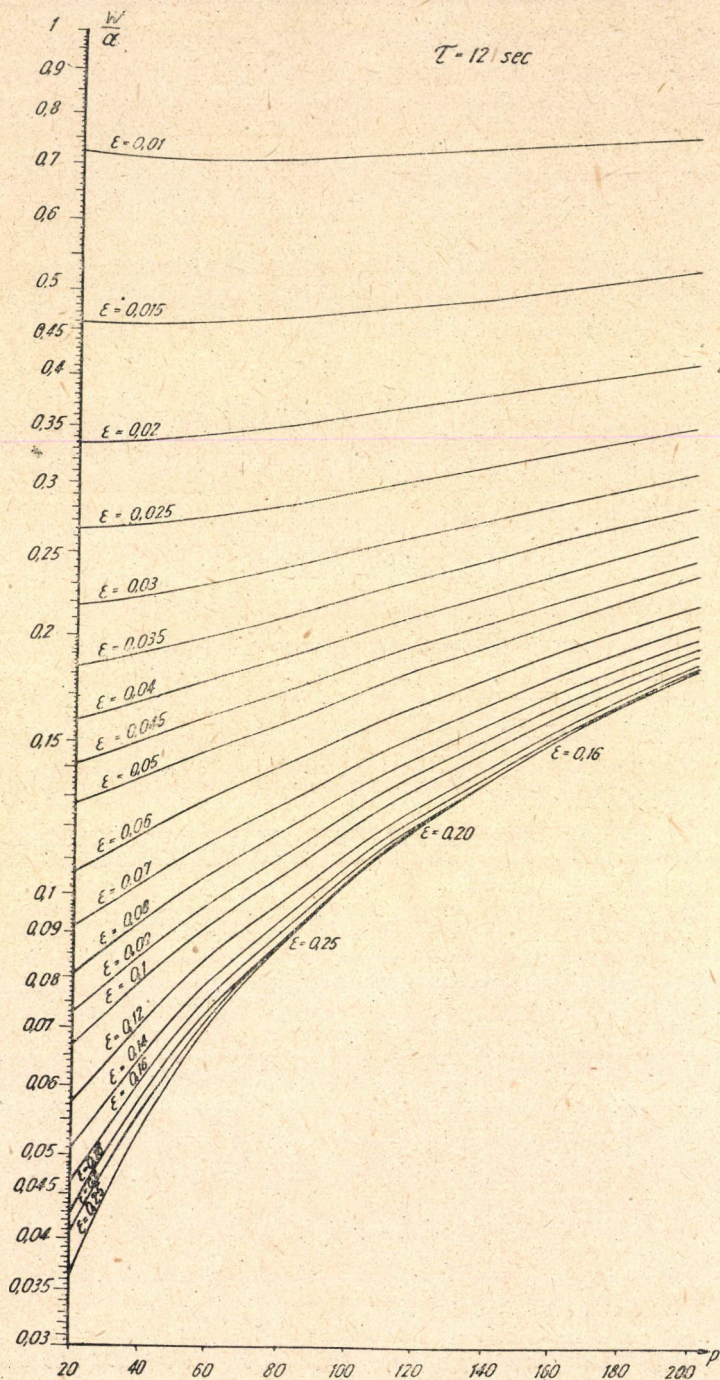
# Diagramm kompresszorok méretezéséhez



2. ábra



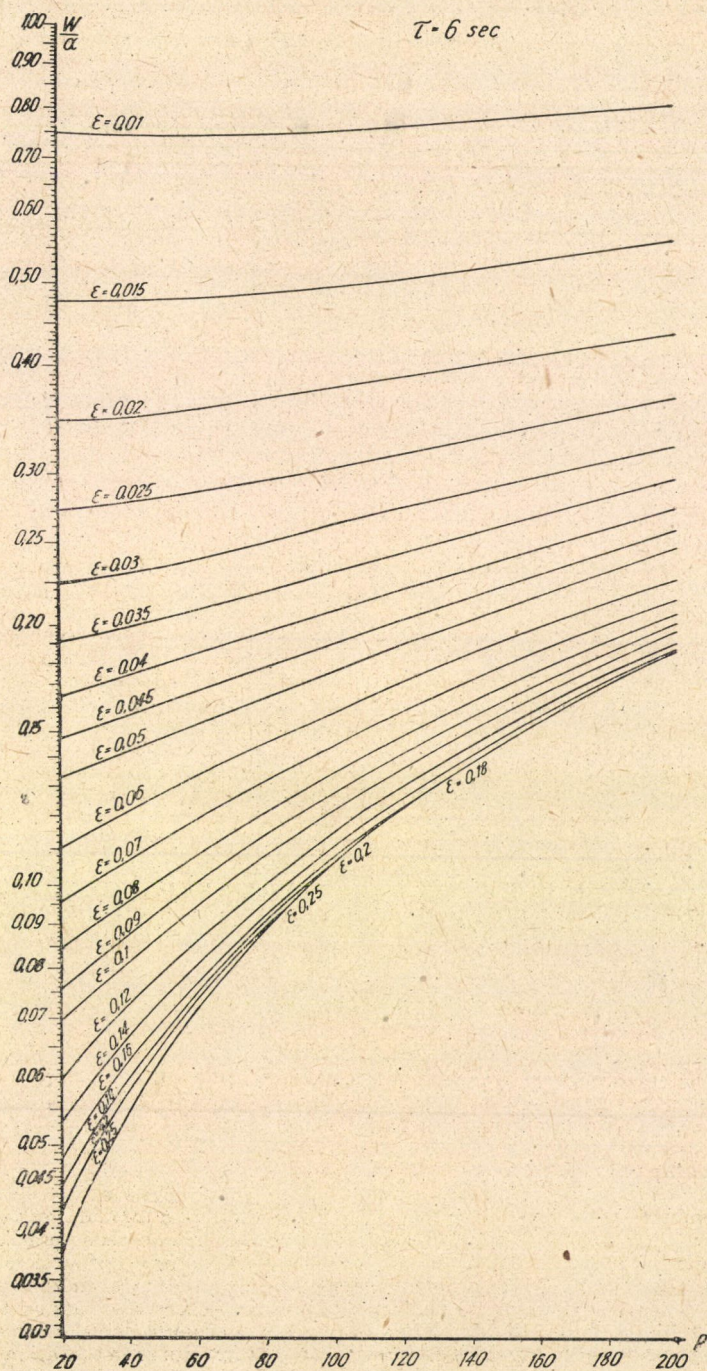
# Diagramm kompresszorok méretezéséhez



3. ábra



# Diagramm kompresszorok méretezéséhez



4. ábra

## IRODALOM

1. *Rényi A. és Szentmártony T.*: Gépipari üzemek elektromos energiaszükségletének és egyidejűsége, illetőleg szükségleti tényezőjének valószínűségszámítási meghatározása. (Jelen kiadvány, 85. o.)
2. *H. Wold*: On stationary point processes and Markov-chains, Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1948. 229—240. o.
3. *A. N. Kolmogoroff*: Anfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen, Математический Сборник 1(43)(1936), 607—610 o. lásd továbbá *A. H. Колмогоров*, Цепи Маркова со счётным числом возможных состояний, Бюлл Московского Университета (А) 1(1937) 1—16 o.
4. *W. Feller*: An introduction to probability theory and its applications, 1950. 15. fejr. 307—344. o. Ebben a munkában megtalálhatók mindazok a Markov-láncokra vonatkozó ismert tételek, amelyeket a dolgozat felhasznál.
5. *A. Rényi*: Some problems concerning Poisson processes, Publicationes Mathematicae 2. (1951.) 66—73. o.

## РАЦИОНАЛЬНЫЙ РАСЧЕТ КОМПРЕССОРОВ И ВОЗДУШНЫХ РЕЗЕРВУАРОВ ДЛЯ СНАБЖЕНИЯ ЗАВОДОВ С ЖАТЫМ ВОЗДУХОМ

А. РЕНЬИ

### Р е з ю м е

Работа содержит решение следующей проблемы: В некотором заводе работают несколько машин, действующих со сжатым воздухом. Машины будут включены и выключены случайно. Сжатый воздух прибавляется компрессором, насыпающим резервуар, потребители получают сжатый воздух из резервуара. Если давление воздуха в резервуаре превысит некоторую границу  $v_2$ , компрессор выключается автоматически и включается только тогда, если давление понижается под некоторую границу  $v_1$ . Наша задача: определить мощность компрессора так, чтобы давление в резервуаре практически никогда не понижалось под некоторую нижнюю границу  $v_0$ , достаточную для обеспечения бесперебойной работы машин. Проблема решается с методами теории цепей Маркова. Результаты изображены графически так, что при данном потреблении и размере резервуара измерение компрессора отсчитывается без исчисления из графика.

## DIMENSIONNEMENT RATIONNEL DES COMPRESSEURS ET DES RESERVOIRS D'AIR POUR FOURNIR AUX USINES L'AIR COMPRIME

A. RÉNYI

### R é s u m é

L'article contient la solution du problème suivant: Dans une usine plusieurs machines actionnées par air comprimé fonctionnent, la mise en service et hors service des diverses machines s'effectuant d'une manière aléatoire. L'air comprimé est fourni par un compresseur, qui remplit un réservoir. Les consommateurs reçoivent l'air comprimé de ce réservoir. Si la pression de l'air dans le réservoir dépasse une certaine borne  $v_2$ , le compresseur est mis hors fonctionnement automatiquement et n'est remis en fonctionnement qu'après que la pression sera tombée au-dessus d'une autre borne  $v_1$ . La tâche à résoudre est de déterminer quelle grandeur la capacité de la production du compresseur doit avoir pour assurer que la pression dans le réservoir ne tombe pratiquement jamais au-dessous d'une certaine borne inférieure  $v_0$  qui suffit encore pour assurer le fonctionnement sans dérangements des machines. Le problème est résolu moyennant des méthodes probabilistiques, notamment moyennant les chaînes de Markov. — Les résultats sont représentés en forme graphique d'une telle manière qu'avec une consommation donnée et une grandeur du réservoir donnée on pourra sans autres calculs lire des représentations graphiques comment le compresseur devra être dimensionné.

# POISSON-FOLYAMATOK ÁLTAL SZÁRMAZTATOTT TÖRTÉNÉS-FOLYAMATOKRÓL ÉS AZOK TECHNIKAI ÉS FIZIKAI ALKALMAZÁSAIRÓL

RÉNYI ALFRÉD és TAKÁCS LAJOS

## ÖSSZEFOGLALÁS

Rényi A. [1] és [2] dolgozataiban bebizonyította, hogy Poisson-folyamat eseményei által elindított történések közül egy adott időpontban folyamatban lévők száma szintén Poisson-eloszlást követ. Ezt a tételt szerzők most egyszerűbben egy Poisson-eloszlásra vonatkozó határeloszlástétel segítségével bizonyítják be. Rényi A. [3] dolgozatában a fenti tételt kiterjesztette összetett Poisson-folyamat által létesített történések folyamatokra; ezt a kérdést — a [3]-ban tárgyalttól eltérő felfogásban — szintén tárgyalja a dolgozat és visszavezeti egyszerű Poisson-folyamatra. A fenti tételek alkalmazásra találnak többek között az elektromos energiafogyasztás ingadozásainak, telefonközpontok terhelésének és elektroncsövek tértöltésének vizsgálatánál.

Rényi A. [1] és [2] dolgozatában bebizonyította a következő

1. tételt. *Tegyük fel, hogy egy Poisson-folyamat eseményeinek mindegyike létrehoz egy történést, melynek időtartama valószínűségi változó. Legyen a Poisson-folyamatban előforduló események időbeli sűrűsége  $\lambda(t)$ , hol  $\lambda(t)$  a  $t$  időparaméter nem-negatív, folytonos függvénye. Legyen  $F(t, \tau)$  annak a valószínűsége, hogy egy  $t$  időpontban kezdődő történet befejeződik  $t + \tau$  időpont előtt, azaz annak a valószínűsége, hogy ezen történet időtartama  $< \tau$ . Tekintsük a  $(0 \leq u \leq t)$  időközben kezdődő történéseket és jelölje az  $\eta_t$  valószínűségi változó a  $t$  időpontban éppen folyó történések számát, akkor az  $\eta_t$  valószínűségi változó  $(0 < t)$  Poisson-eloszlást követ és pedig fennáll a következő egyenlőség:*

$$(1) \quad V(\eta_t = n) = \frac{\left( \int_0^t \varphi(u, t-u) \lambda(u) du \right)^n}{n!} e^{-\int_0^t \varphi(u, t-u) \lambda(u) du}$$

ahol

$$(2) \quad \varphi(u, \tau) = 1 - F(u, \tau)$$

annak a valószínűsége, hogy egy  $u$  időpontban kezdődő történet legalább  $\tau$  időtartamig tart.

[3] dolgozatában Rényi A. kiterjesztette ezt a tételt arra az esetre is, amikor az alapulvett esemény-folyamat nem közönséges Poisson-folyamat, hanem úgynevezett összetett Poisson-folyamat, amelyben tehát pozitív valószínűségről van szó, hogy történetek egyidejű eseménypárok, esemény-hármasok,...



stb. és egy eseménypár, esemény-hármas stb. mindegyik eseménye egy külön történést indít meg, amelyek időtartamai függetlenek egymástól.

A fenti eredménynek számos fontos gyakorlati alkalmazása van. Ezek közül itt csak hármat említünk meg.

1. Vizsgáljuk például egy áramforrás által táplált véletlenszerűen be- és kikapcsolt fogyasztók (pl. izzólámpák) összefogyasztásának ingadozásait. Ha az összes fogyasztók (lámpák) egyformák, tehát bekapcsolt állapotban időegységenként ugyanannyit fogyasztanak és ha a fogyasztók száma igen nagy, úgy első közelítésként feltehetjük, hogy a fogyasztók bekapcsolásai Poisson-folyamatot alkotnak, azonban a valóságnak megfelelően figyelembe vesszük, hogy a folyamat sűrűségfüggvénye  $\lambda(t)$  a  $t$  időponttól függ. Amennyiben a fogyasztók nem egyformák, pl. a fogyasztók között vannak 20, 40, 60, 100, ... stb. wattos lámpák, úgy a bekapcsolódások összetett Poisson-folyamattal írhatók le, amelyben azonban — [3]-tól eltérően — egy  $k$ -szoros esemény nem  $k$  történést, hanem egy  $k$ -szoros történést indít meg, amely amíg tart,  $k$  történéstnek számítandó.  $\eta_t$  a  $t$  időpontban égő lámpák számát jelenti és így egy arányossági tényezőtől eltekintve  $\eta_t$  megadja, hogy mennyi a világítási áramfogyasztás a  $t$  időpontban.

2. Elektroncsövek katódjából kilépő elektronok kilépéseinek időpontjai Poisson-folyamatot alkotnak. Az egyes elektronoknak az elektroncső terében való tartózkodási ideje, azaz azon időtartam, mely alatt az elektronok a katódtól az anódig eljutnak, valószínűségi változó. Ugyanis ez az időtartam függ az elektronoknak a katódból való kilépési sebességétől. A kilépési sebesség pedig a klasszikus statisztika tanítása szerint Maxwell-eloszlású valószínűségi változó. Így az elmondottakból következik, hogy egy adott pillanatban az elektroncső terében tartózkodó elektronok száma Poisson-eloszlást követ.

3. Telefonközpontba érkező hívások száma jó közelítéssel Poisson-folyamatot alkot, ha feltesszük, hogy a központhoz tartozó előfizetők száma elég nagy, és nem vesszük figyelembe, hogy a  $t$  és  $t + \Delta t$  időpontok között történő hívások száma függ attól, hogy  $t$  időpontban hány beszélgetés van folyamatban. Valójában itt fennáll bizonyos függőség (hiszen egy olyan előfizető, aki  $t$  időpontban beszél, csak akkor jelentkezhet mint hívó fél  $t$  és  $t + \Delta t$  között, ha  $t + \Delta t$  előtt befejeződik a beszélgetése) ez a függőség azonban nagyszámú előfizető esetében olyan gyenge, hogy annak figyelmen kívül hagyása nem befolyásolja az eredményt. Ekkor  $\eta_t$  a  $t$  időpontban folyamatban lévő beszélgetések számát jelenti és ez tehát az (1) Poisson-eloszlással bír.

Dolgozatunk célja az (1) azonosságnak a [2]-ben találhatónál egyszerűbb bizonyítását adni. Ez a bizonyítás ugyanabból az alapgondolatból indul ki, mint a [2]-ben közölt bizonyítás; mégpedig abból a kézenfekvő gondolatból, hogy a  $t$  időpontban folyamatban lévő történéseket aszerint csoportosítjuk, hogy a  $(0, t)$  időintervallum mely részintervallumában kezdődtek. Ezt az alapgondolatot Takács L. [4] dolgozatában egy még általánosabb probléma megoldásában alkalmazta és ennek felhasználásával megoldotta azt az általános problémát, amikor egy Poisson-folyamat minden eseménye egy »jelt« indít meg és meghatározandó egy  $t$  időpontban a  $(0, t)$  intervallumban kezdődött jelek összegének eloszlása; ez a probléma többek között fizikai részecskeszámálási problémákkal, pl. az elektronsokszorozóval való számolással kapcsolatosan lép fel. A jelen dolgozatban közölt bizonyításban

a [1], [2], [3] dolgozatokhoz képest új az, hogy felhasználunk egy a Poisson-eloszlásra vonatkozó határértéktételt és az erre való visszavezetés útján érjük el a bizonyítás lényeges egyszerűsítését. Ezen kívül az eredmény egy új valószínűségszámítási interpretációját adjuk meg.

*Bizonyítás:* Osszuk be a  $(0, t)$  időintervallumot  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  osztópontokkal  $n$  számú  $\Delta t = t/n$  nagyságú szakaszra. Legyen a  $k$ -adik szakaszban kezdődő azon történések száma, melyek  $t$  időpontban még folyamatban vannak,  $\xi_{n,k}$ . Ekkor fennáll

$$(3) \quad \eta_t = \xi_{n,1} + \xi_{n,2} + \dots + \xi_{n,n},$$

ahol  $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \dots, \xi_{n,n}$  független valószínűségi változók, melyekre fennáll, hogy\*

$$(4) \quad V(\xi_{n,k} = 0) = (1 - \lambda(t_k) \Delta t) + \lambda(t_k) \Delta t F(t_k, t - t_k) + o(\Delta t) = \\ = 1 - \lambda(t_k) \varphi(t_k, t - t_k) \Delta t + o(\Delta t) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

ugyanis a  $(t_{k-1}, t_k)$  szakaszban kezdődő események akkor nem létesítenek  $t$  időpontban folyó történést, ha vagy nem fordul elő esemény, aminek a valószínűsége:  $1 - \lambda(t_k) \Delta t + o(\Delta t)$ , vagy előfordul egy esemény, aminek a valószínűsége  $\lambda(t_k) \Delta t + o(\Delta t)$  és a létrehozott történést  $t - t_k$ -nál rövidebb időtartamú, aminek a valószínűsége  $F(t, \tau)$  folytonossága miatt  $F(t_k, t - t_k) + o(1)$ ,\*\* vagy egyenél több történést kezdődik  $(t_{k-1}, t_k)$  szakaszban és ezek mindegyike befejeződik  $t$  időpontig, ennek valószínűsége:  $o(\Delta t)$ .

$$(5) \quad V(\xi_{n,k} = 1) = \lambda(t_k) \varphi(t_k, t - t_k) \Delta t + o(\Delta t),$$

ugyanis a  $\xi_{n,k} = 1$  esemény úgy jöhet létre, hogy  $(t_{k-1}, t_k)$  szakaszban kezdődik egy történést, aminek a valószínűsége  $\lambda(t_k) \Delta t + o(\Delta t)$  és ennek időtartama  $t - t_k$ -nál nem kisebb, aminek a valószínűsége:

$$\varphi(t_k, t - t_k) + o(1) = 1 - F(t_k, t - t_k) + o(1),$$

vagy  $(t_{k-1}, t_k)$  szakaszban egyenél több történést kezdődik, melyek közül egy nem fejeződik be  $t$  időpontig, ezen esemény valószínűsége

$$(6) \quad V(\xi_{n,k} > 1) = o(\Delta t),$$

ugyanis annak a valószínűsége, hogy  $(t_{k-1}, t_k)$  közben egyenél több esemény kezdődjék  $o(\Delta t)$  és ez méginkább igaz (6)-ra.

$\eta_t$  eloszlásfüggvényének meghatározására felhasználjuk a következő tételt:

2. Tétel: Legyenek  $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \dots, \xi_{n,n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) független valószínűségi változók, melyek mindegyike csak nemnegatív egész értékeket vesz fel, legyen

$$(7) \quad V(\xi_{n,k} = r) = P_{n,k}(r) \quad (n = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n; r = 0, 1, \dots)$$

\*  $o(\Delta t)$  olyan mennyiséget jelöl, amely  $\Delta t$ -vel osztva 0-hoz tart, ha  $\Delta t \rightarrow 0$ , azaz ha  $n \rightarrow \infty$ .

\*\*  $o(1)$  olyan mennyiséget jelöl, amely 0-hoz tart, ha  $\Delta t \rightarrow 0$ , azaz ha  $n \rightarrow \infty$ .

$$(8) \quad \sum_{r=2}^{\infty} P_{n,k}(r) = R_{n,k}$$

és tegyük fel, hogy teljesülnek a következő feltételek

$$(9) \quad A) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P_{n,k}(1) = c_1$$

$$(10) \quad B) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n} (1 - P_{n,k}(0)) = 0.$$

$$(11) \quad C) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n R_{n,k} = 0$$

és legyen

$$(12) \quad \zeta_n = \xi_{n,1} + \xi_{n,2} + \dots + \xi_{n,n}.$$

Akkor  $\zeta_n$  eloszlása konvergál a  $c_1$  várható értékű Poisson-eloszláshoz.

*Megjegyzés:* Ez a tétel speciális esete a [3] dolgozat (3) tételének, amelyből akkor adódik, ha az ottani jelöléseket használva  $c_s = 0$ , ha  $s > 1$ , az idézett tétel viszont B. V. Gnedenko és A. N. Kolmogorov könyvének [5] egy tétele segítségével bizonyítható be.

*Bizonyítás:* Jelentse  $g_{n,k}(z)$  a  $\xi_{n,k}$  változó generátorfüggvényét, akkor

$$(13) \quad g_{n,k}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} P_{n,k}(r) z^r \quad (|z| \leq 1)$$

és így

$$(14) \quad |g_{n,k}(z) - P_{n,k}(0) - P_{n,k}(1)z| \leq R_{n,k}.$$

Mivel továbbá

$$(15) \quad P_{n,k}(0) - (1 - P_{n,k}(1)) = -R_{n,k},$$

tehát

$$(16) \quad |g_{n,k}(z) - (1 + P_{n,k}(1)(z - 1))| \leq 2R_{n,k}$$

és így mivel  $|\log(1+x) - x| \leq x^2$ , ha  $|x| < 2/3$

$$(17) \quad |\log g_{n,k}(z) - P_{n,k}(1)(z - 1)| \leq 2P_{n,k} + 4(1 - P_{n,k}(0))^2.$$

Mivel  $\zeta_n$  generátorfüggvénye

$$(18) \quad G_n(z) = \prod_{k=1}^n g_{n,k}(z),$$

tehát (17) szerint

$$(19) \quad |\log G_n(z) - \sum_{k=1}^n P_{n,k}(1)(z-1)| \leq 2 \sum_{k=1}^n R_{n,k} + \\ + 4 \max_{1 \leq k \leq n} (1 - P_{n,k}(0)) \sum_{k=1}^n (R_{n,k} + P_{n,k}(1))$$

is így feltevéseink értelmében

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log G_n(z) = c_1(z-1),$$

tehát

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(z) = e^{c_1(z-1)},$$

vagyis  $\zeta_n$  generátorfüggvénye konvergál egy  $c_1$  várható értékű Poisson-eloszlás generátorfüggvényéhez. Tehát a generátorfüggvényekre vonatkozó ismeretes határtétel szerint  $\zeta_n$  eloszlása a  $c_1$  várható értékű Poisson-eloszláshoz konvergál.

A (3)-ban szereplő  $\xi_{n,k}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ) valószínűségi változók (4), (5) és (6) értelmében kielégítik az említett tétel A), B) és C) feltevéseit és  $\eta_t = \zeta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Ezek szerint  $\zeta_n$  eloszlása egy olyan Poisson-eloszláshoz konvergál, melynek várható értéke:

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [\lambda(t_k) \varphi(t_k, t - t_k) \Delta t + o(\Delta t)].$$

Ha létezik

$$(23) \quad c_1 = \int_0^t \lambda(u) \varphi(u, t - u) du$$

integrál, úgy (22) határtérték — a (23) integrál Riemann-féle közelítő összegeinek határértéke — is létezik és megegyezik  $c_1$ -el. Tehát az  $\eta_t$  valószínűségi változó  $c_1$  várható értékű Poisson-eloszlást követ. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Ha  $F(t, \tau)$  nem függ  $t$ -től,  $F(t, \tau) = F(\tau)$ ,  $1 - F(\tau) = \Phi(\tau)$  és  $\lambda(t)$  sem függ  $t$ -től,  $\lambda(t) \equiv \lambda$ , úgy

$$c_1 = \lambda \int_0^t \Phi(t - u) du = \lambda \int_0^t [1 - F(\tau)] d\tau$$



és így ha  $t \rightarrow \infty$   $\eta_t$  eloszlása konvergál a  $\lambda \int_0^\infty [1 - F(\tau)] d\tau = \lambda \int_0^\infty \tau dF(\tau)$

várható értékű Poisson-eloszláshoz, vagyis a  $\lambda\alpha$  várható értékű Poisson-eloszláshoz, ahol  $\lambda$  az eseményssűrűség,  $\alpha$  pedig egy történés várható időtartama.

A kapott eredmény jelentése közvetlen valószínűségi megfontolások segítségével szemléletessé tehető. Annak a valószínűsége, hogy a Poisson-folyamatban  $(0, t)$  időintervallumban pontosan  $k$  esemény forduljon elő, azaz  $k$  történés kezdődjék, mint ismeretes

$$(24) \quad e^{-\Lambda(t)} \frac{[\Lambda(t)]^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

ahol

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$$

a  $(0, t)$  időközben előforduló események várható száma. Annak a valószínűsége, hogy egy ezek közül taláломra kiválasztott esemény által létrehozott történés a  $t$  időpontban folyamatban legyen, Bayes tétele értelmében

$$(25) \quad p_t = \frac{\int_0^t \lambda(u) \varphi(u, t-u) du}{\int_0^t \lambda(u) du} = \frac{1}{\Lambda(t)} \int_0^t \lambda(u) \varphi(u, t-u) du.$$

A  $t$  időpontban folyó történések számát úgy kaphatjuk meg, hogy a Poisson-folyamat  $(0, t)$  időintervallumban bekövetkezett eseményeit »megritkítjuk«, vagyis minden egyes eseményt  $p_t$  valószínűséggel hagyunk meg, ekkor a meghagyott események száma megegyezik a  $t$  időpontban folyó történések számával. Úgy tekinthető tehát a helyzet, mintha a  $(0, t)$  időintervallumban az eredeti Poisson-folyamat eseményssűrűsége  $p_t$ -szeresére csökkent volna. Ekkor ismét Poisson-folyamatot kapunk, melyben a  $(0, t)$  intervallumban előforduló események száma  $p_t \Lambda(t)$  várható értékű Poisson-eloszlást mutat, azaz a  $t$  időpontban folyamatban lévő történések száma  $p_t \Lambda(t)$  várható értékű Poisson-eloszlást követ.

Ha az események folyamata összetett Poisson-folyamat, azaz a  $(0, t)$  intervallumban történő események számát  $\xi_t$ -vel jelölve

$$(26) \quad \xi_t = \xi_t^{(1)} + 2\xi_t^{(2)} + \dots + n\xi_t^{(n)} + \dots$$

ahol a  $\xi_t^{(n)}$  változók egymástól független Poisson-folyamatokban a  $(0, t)$  időtartam alatt történő események számait adják meg, úgy

$$(27) \quad \eta_t = \eta_t^{(1)} + 2\eta_t^{(2)} + \dots + n\eta_t^{(n)} + \dots$$

ahol  $\eta_t^{(n)}$  megadja az  $\{\xi_t^{(n)}\}$  folyamat eseményei által megindított történések

közül azok számát, amelyek a  $t$  időpontban folyamatban vannak : az elmondottak szerint  $\eta_i^{(m)}$  Poisson-eloszlású

$$(28) \quad \int_0^t \lambda_n(u) \varphi_n(u, t-u) du$$

várható értékkel, ahol  $\lambda_n(t)$  a  $\{\xi_t^{(m)}\}$  folyamat sűrűségfüggvénye, és  $\varphi_n(t, \tau) = 1 - F_n(t, \tau)$ , ahol  $F_n(t, \tau)$  a  $\xi_t^{(m)}$  folyamat eseményei által megindított ( $n$ -szeresen számítandó) történések időtartamának eloszlásfüggvénye. Ha tehát speciálisan  $\lambda_n(t) \equiv \lambda_n$  állandó ( $n = 1, 2, \dots$ ) és  $F_n(t, \tau) = F_n(\tau)$  nem függ  $t$ -től és  $\int_0^\infty \tau dF_n(\tau) = \alpha_n$ , úgy  $\eta_i$  eloszlása, ha  $t \rightarrow \infty$  konvergál egy olyan összetett Poisson-eloszláshoz, melynek várható értéke

$$(29) \quad m = \sum_{n=1}^{\infty} n \lambda_n \alpha_n$$

és szórása

$$(30) \quad \sigma = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \lambda_n \alpha_n}$$

Ha  $m$  igen nagy, úgy ez az összetett Poisson-eloszlás jól közelíthető a normális eloszlással, melynek várható értékét és szórását (29), ill. (30) adja meg.

Ami  $\lambda_n$  és  $\alpha_n$  értékeinek meghatározását illeti, ez a következőképpen történhet: ha  $N_n$  olyan fogyasztó van, amelyek mindegyike  $n$  egységet fogyaszt, és azok mindegyike az idő 100  $p_n$  %-ában van bekapcsolva, úgy  $\lambda_n \alpha_n = N_n p_n$ .

A gyakorlatban a fogyasztás átlagos értéke  $m(t)$ , tapasztalatilag egyszerűen megállapítható, míg a  $\lambda(t)$  sűrűségfüggvény, ha  $F(t, \tau) = F(\tau)$  nem függ  $t$ -től és  $\Phi(\tau) = 1 - F(\tau)$ , az

$$m(t) = \int_0^t \lambda(u) \Phi(t-u) du$$

integrálegyenletből  $\Phi(\tau)$  ismeretében (pl. Laplace-transzformációval) könnyen kiszámítható.

## IRODALOM

- [1] Rényi A.: A Poisson-eloszlás problémaköréről. MTA III. o. Közl. I. köt. 1. sz. 202–212.
- [2] A. Rényi: On some problems concerning Poisson processes. (Publicationes Mathematicae, Debrecen, Vol. 2 (1951) pp. 66–73.).
- [3] Rényi A.: Összetett Poisson-eloszlásokról. II. MTA III. o. Közl. 1. köt. 2–4. sz. 329–342. o.
- [4] Takács L.: Poisson folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásáról. (Acta Mathematica. Sajtó alatt.)
- [5] B. V. Gnedenko és A. N. Kolmogorov: Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásáról. Akadémiai Kiadó, 1951.

# О ПРОЦЕССАХ ПРОИСШЕСТВИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ПРОЦЕССАМИ ПУАССОНА, И О НЕКОТОРЫХ ИХ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

А. РЕНЬИ — Л. ТАКАЧ

## Резюме

В своих работах [1] и [2] А. Реньи доказал, что из числа происшествий, порожденных событиями процесса типа Пуассона, текущие в данном моменте, тоже будут подчинены распределению Пуассона. Теперь авторы доказывают эту теорему проще, с помощью предельного закона, относящегося к распределению Пуассона. В своей работе [3] А. Реньи распространял эту теорему на процессы происшествий, порожденных обобщенными процессами Пуассона. Работа занимается и этим вопросом, но в другом понимании, чем в [3], и отводит вопрос к простому процессу Пуассона. Вышеуказанные теоремы находят приложение при исследовании колебаний потребления электрической энергии, нагрузки телефонных станций и пространственного заряда электронных трубок.

# SUR LES PROCESSUS D'ÉVÉNEMENTS DÉRIVÉS PAR UN PROCESSUS DE POISSON ET SUR LEURS APPLICATIONS TECHNIQUES ET PHYSIQUES

A. RÉNYI — L. TAKÁCS

## Résumé

Dans ses articles [1], [2] A. Rényi a prouvé que le nombre des événements encore en cours à un moment donné parmi les événements mis en marche par les événements d'un processus de Poisson, obéit également à la loi de Poisson. Ce théorème est maintenant prouvé par les auteurs plus simplement, à l'aide d'un théorème limite se rapportant à la loi de Poisson. Dans son article [3] A. Rényi a élargi le théorème que nous venons de mentionner sur des processus d'événements produits par un processus de Poisson composé : cette question également est traitée — d'un point de vue différent de celui discuté dans l'article [3] — et est réduite à un processus de Poisson simple. Les théorèmes mentionnés ci-haut trouvent leur application dans les recherches concernant les fluctuations de la consommation d'énergie électrique, les charges des centrales téléphoniques, et les charges d'espace des tubes électroniques.

# SZÖVŐGÉPEK OPTIMÁLIS FORDULATSZÁMÁNAK VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI ALAPON VALÓ MEGHATÁROZÁSA, TÖBBGÉPES RENDSZER ESETÉN

SZÉKELY GÁBOR

## ÖSSZEFOGLALÁS

Textilgépeknél a fordulatszám növelésével a gép működése közben többet termel, de ugyanakkor a fonalszakadás valószínűsége is növekszik, tehát a gépállások ideje is megnő. Az optimális fordulatszámot, tehát azt a fordulatszámot, amely mellett a termelt árumennyiség maximális, valószínűségszámítási módszerekkel lehet meghatározni. A cikk ismerteti azokat az elméleti számításokat és üzemi kísérleteket, amelyeket az Intézet ez irányban végzett.

A Könnyűipari Minisztérium megbízásából foglalkozott Intézetünk az optimális fordulatszám meghatározásával szövőgépeknél. A probléma a következő volt.

Több szövőgépet kezel egy munkás. Ha egy gépen fonalszakadás történik, a gép automatikusan leáll és a munkás hozzákezd a gép megjavításához. Azalatt azonban, míg dolgozik, újabb gépek leállnak és ezek mindaddig állnak, amíg a kezelő hozzá nem fog megjavításukhoz. Tehát nemcsak maga a javítás okoz termelés kiesést, hanem a javítások ideje alatti gépállás is. Feladat volt az egy munkás által kezelt gépek számának különböző értékei mellett meghatározni az optimális fordulatszámot, tehát azt a fordulatszámot, amely mellett az egy gépre eső termelés maximális.

Ilyen jellegű probléma valószínűségszámítási vizsgálatával elsőnek A. J. Hincsin szovjet matematikus foglalkozott [1].

A kérdés irodalmából kiemeljük H. Ashcroft egy újabb dolgozatát [2], továbbá megemlítjük Takács Lajos egy munkáját [3], amely szintén tartalmaz a kérdésre vonatkozó eredményeket. Röviden tárgyalva van a probléma W. Feller könyvében is [4]. Ezen irodalmi forrásokra támaszkodhattunk munkánkban. Ezen munkák azonban nem foglalkoznak a fordulatszám változtatásának kérdésével. A következőkben közöljük a kapott elméleti és kísérleti vizsgálataink eredményeit.

Tekintsünk előbb egy gépet. Legyen a gép működése közben a fonalszakadás valószínűsége állandó, azaz független attól, mióta működik a gép. Ez a feltevés kézenfekvő, mivel a szakadás bekövetkezése csupán a fonal lokális tulajdonságától függ, ezért nem függ attól, mióta működik a gép.

Legyen  $\frac{\lambda t}{\lambda}$  annak a valószínűsége ( $\Delta t$  magasabb hatványait itt és a következőkben is elhanyagoljuk), hogy a fonal egy kis  $\Delta t$  időszakaszban elszakadjon,



így tehát  $\left(1 - \frac{\Delta t}{\lambda}\right)$  jelenti annak a valószínűségét, hogy  $\Delta t$  idő alatt ne történjék fonalszakadás. Jelentse  $f(t)$  annak a valószínűségét, hogy legalább  $t$  ideig,  $f(t + \Delta t)$  pedig azt, hogy legalább  $t + \Delta t$  ideig ne legyen szakadás. Ez utóbbi azonban azt jelenti, hogy  $t$  ideig ne legyen szakadás, aminek a valószínűsége  $f(t)$  és a következő  $\Delta t$  szakaszon se szakadjon el a fonál, aminek a valószínűsége  $\left(1 - \frac{\Delta t}{\lambda}\right)$ . Mivel feltevésünk szerint utóbbi esemény független az előbbtől, következik, hogy

$$f(t + \Delta t) = f(t) \left(1 - \frac{\Delta t}{\lambda}\right).$$

innen

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{\lambda} f(t).$$

Ha  $\Delta t \rightarrow 0$  kapjuk, hogy  $f'(t) = -\frac{1}{\lambda} f(t)$  és így

$$f(t) = c e^{-\frac{t}{\lambda}}.$$

Annak a valószínűsége, hogy  $t$  ideig ne történjék szakadás és a következő  $\Delta t$  szakaszon történjék,  $c e^{-\frac{t}{\lambda}} \frac{\Delta t}{\lambda}$ . Az ismeretlen  $c$  konstans könnyen meghatározható; ugyanis nyilvánvalóan

$$\int_0^{\infty} c e^{-\frac{t}{\lambda}} \frac{dt}{\lambda} = 1$$

kell hogy legyen és innen  $c = 1$ . Tehát a gép működési idejének eloszlása exponenciális típusú, sűrűségfüggvénye  $y = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}}$ . A működési idő átlaga

$$\int_0^{\infty} t e^{-\frac{t}{\lambda}} \frac{dt}{\lambda} = \lambda.$$

Indokoltnak látszott azt feltételezni, hogy a javítási idők is exponenciális eloszlást követnek. Ez többek között azt jelenti, hogy rövid ideig tartó javítások gyakrabban és hosszabb ideig tartók, mind ritkábban fordulnak elő, ami megfelel a tapasztalatoknak. A kérdéses valószínűség-sűrűségfüggvény

$$y = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{t}{\alpha}},$$

ahol  $\alpha$  az átlagos javítási idő. Tehát annak a valószínűsége, hogy egy  $t$  időpillanatban folyó javítás a következő  $\Delta t$  szakaszban befeződjék,  $\frac{\Delta t}{\alpha}$  lesz.

Most vizsgáljuk a gyakorlatban tényleg előforduló esetet, amikor egy munkás több gépet kezel. Jelöljük  $m$ -el a gépek számát.  $A_0$  jelentse a gépparknak azt az állapotát, amikor  $r$  gép áll, tehát  $(m - r)$  működik.  $A_0$  tehát azt az állapotot jelenti, amikor mindegyik gép működik. A géppark az idő folyamán különböző állapotba kerülhet, aszerint, hogy újabb gépek leállnak, vagy javítás után álló gépet elindítanak. Könnyen belátható az, hogy exponenciális eloszlású működési és javítási idők esetén a géprendszer állapotváltozásai Markov-láncot alkotnak, ugyanis a rendszer változása a véletlentől függ és annak valószínűsége (a rövid felfutási idő után beálló stacionér állapotot feltételezve), hogy a rendszer az  $A_r$  állapotba kerüljön, kizárólag attól függ, hogy az előző állapotváltozásnál melyik állapotban volt. Nyilvánvaló az is, hogy a rendszer átlagban ugyanannyiszor jut  $A_r$  állapotból  $A_{r+1}$  állapotba, mint ahányszor  $A_{r+1}$  állapotból  $A_r$  állapotba. Ugyanis az  $A_r$  állapotból  $A_{r+1}$  állapotba újból csak akkor mehet át a rendszer, ha előzőleg az  $A_{r+1}$  állapotból  $A_r$  állapotba került. Feltevéseink értelmében elhanyagolhatóan kicsiny annak a valószínűsége, hogy  $\Delta t$  idő alatt egyszerre két vagy több gépen történjék fonalszakadás. Nézzük először, mi annak a valószínűsége, hogy a rendszer a  $t$  időpontban  $A_r$  állapotban legyen és a  $t$  és  $t + \Delta t$  időközben  $A_{r+1}$  állapotba menjen át.

Jelentse  $g_r$  annak a valószínűségét, hogy egy  $t$  időpillanatban  $r$  gép álljon.  $m - r$  működő gépünk van; annak a valószínűsége, hogy ezek közül egy leálljon

$$\binom{m-r}{1} \frac{\Delta t}{\lambda} \left(1 - \frac{\Delta t}{\lambda}\right)^{m-r-1} \approx (m-r) \frac{\Delta t}{\lambda}.$$

A  $A_r$  állapotból  $A_{r+1}$  állapotba való jutás keresett valószínűsége

$$(1) \quad V_{r,r+1} = g_r (m-r) \frac{\Delta t}{\lambda}.$$

Hasonlóképpen annak a valószínűsége, hogy  $t$  időpontban  $A_{r+1}$  állapotban legyen és  $t$  és  $t + \Delta t$  között  $A_r$  állapotba menjen át, a következő:

$$(2) \quad V_{r+1,r} = g_{r+1} \frac{\Delta t}{\alpha}.$$

Ugyanis ez csak úgy jöhet létre, hogy a  $t$  időpillanatban  $r + 1$  gép áll, aminek a valószínűsége  $g_{r+1}$  és: a következő  $\Delta t$  szakaszon egy gép javítása befejeződik, aminek a valószínűsége  $\frac{\Delta t}{\alpha}$ .

Az (1) és (2) valószínűségek egymással egyenlőek és így  $\Delta t$ -vel osztva — kapjuk

$$(3) \quad g_r (m-r) \frac{1}{\lambda} = g_{r+1} \frac{1}{\alpha} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Ugyanerre az összefüggésre jut Feller is [3] bonyolultabb módon, mivel nem használja fel a (3) egyenlet közvetlen valószínűségszámítási jelentését.

A (3) egyenletrendszer a  $g_r$  ismeretlenre megoldva kapjuk, hogy

$$g_r = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^r \binom{m}{r} r! g_0.$$

Mindkét oldalon összegezve és figyelembevételével, hogy  $\sum_{r=0}^m g_r = 1$  kapjuk, hogy

$$(4) \quad g_0 = \frac{1}{\sum_{r=0}^m \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^r \binom{m}{r} r!}.$$

Az álló gépek átlagos számának meghatározásához a (3) egyenlet mindkét oldalát összegezzük:

$$m \sum_{r=0}^m g_r - \sum_{r=0}^m r g_r = \frac{\lambda}{\alpha} \sum_{r=0}^{m-1} g_{r+1}.$$

$b_m = \sum_{r=0}^m r g_r$  jelenti az álló gépek átlagos számát  $a_m = m - b_m$  pedig

a működő gépek átlagos számát. Mivel  $\sum_{r=0}^{m-1} g(r+1) = 1 - g(0)$ , tehát

$$(5a) \quad a_m = \frac{\lambda}{\alpha} (1 - g_0)$$

és így

$$(5b) \quad b_m = m - \frac{\lambda}{\alpha} (1 - g_0)$$

$g_0$  értékét (4)-ből behelyettesítve, következik

$$(6) \quad a_m = \frac{\lambda}{\alpha} \left[ 1 - \frac{1}{\sum_{r=0}^m \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^r \binom{m}{r} r!} \right]$$

$$b_m = \frac{\lambda}{\alpha} \left[ 1 - \frac{1}{\sum_{r=0}^m \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^r \binom{m}{r} r!} \right].$$

A (3) egyenlet segítségével könnyen meghatározható az álló, illetve működő gépek számának szórásnégyzete is, mely mindkettőre

$$(7) \quad \sigma^2 = \sum_{r=0}^m r^2 g_r - \left( \sum_{r=0}^m r g_r \right)^2 = \left( \frac{\lambda}{\alpha} - a_m \right) (a_m - m) + a_m \approx 0.$$

Az (5a) és (7) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$(8) \quad \frac{a_m}{m - a_m} \geq \frac{\lambda}{\alpha} - a_m > 0.$$

A (8) egyenlőtlenséget átalakítva kapjuk, hogy

$$(9) \quad \frac{\lambda}{\alpha} \geq \left(m - \frac{\lambda}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{\lambda}{\alpha} - a_m\right) + \left(\frac{\lambda}{\alpha} - a_m\right)^2.$$

Mivel  $\lambda$  az átlagos szakadásmentes időt és  $\alpha$  az átlagos javítási időt jelentette, a kettő hányadosa az átlagos szakadásmentes idő alatt elvégezhető javítások száma, ez viszont nem más, mint a működő gépek átlagos száma, feltéve, hogy a munkás megállás nélkül dolgozik, azaz munkaideje teljesen ki van használva.

Ebből már sejthető, hogy általában  $a_m$  igen közel lesz  $\frac{\lambda}{\alpha}$ -hoz, feltéve, hogy a munkás munkaideje jól van kihasználva. A  $\frac{\lambda}{\alpha} - m$  különbségre (9)-ből egy felső becslést nyerünk, a következőképpen: A  $\left(\frac{\lambda}{\alpha} - a_m\right)^2$  nemnegatív tagot elhanyagolva az egyenlőtlenség nyilván érvényes marad és így következik, hogy

$$(9) \quad 0 < \frac{\lambda}{\alpha} - a_m \geq \frac{\frac{\lambda}{\alpha}}{m - \frac{\lambda}{\alpha} + 1}.$$

Ebből következik, hogy a  $\frac{\lambda}{\alpha} - a_m$  különbség rögzített  $\lambda$  és  $\alpha$  mellett a gépek számának  $m$ -nek — növekedtével minden határon túl csökken, vagyis nagy  $m$  esetén  $\frac{\lambda}{\alpha} - a_m$ -nek jó közelítő értékét szolgáltatja. A (9) összefüggés módot ad annak megállapítására is, hogy hány gépet kezelhet egy munkás, ha előírjuk, hogy munkaideje milyen mértékben lehet kihasználva. Ugyanis  $100 \frac{a_m}{\frac{\lambda}{\alpha}}$

adja meg, hogy a munkás munkaideje hány %-ában van kihasználva. Ha pl. előírjuk, hogy ez a szám 90% legyen, úgy ez bizonyosan teljesül,

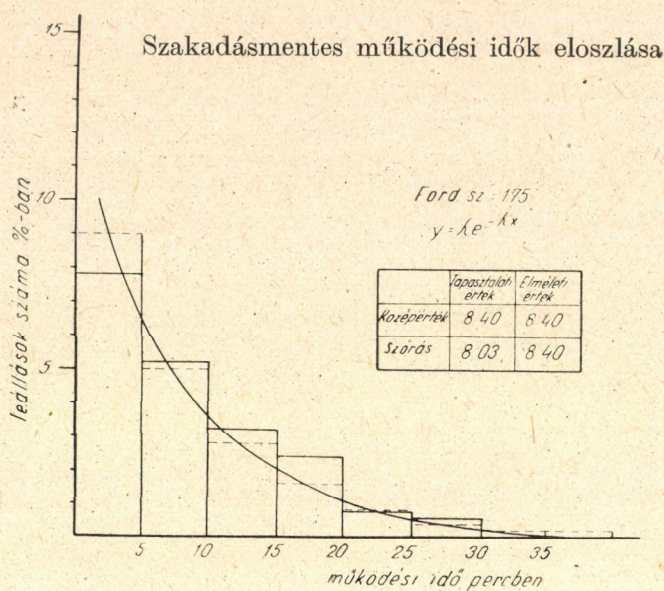
$$\text{ha } \frac{1}{m - \frac{\lambda}{\alpha} + 1} \approx \frac{1}{10}, \text{ vagyis } m - \frac{\lambda}{\alpha} + 1 \approx 10, \text{ tehát mivel } \frac{\lambda}{\alpha} = 7,05, \text{ ha}$$

$m = 16$ . Megfordítva, adott gépszám ( $m$ ),  $\lambda$  és  $\alpha$  mellett kimondhatjuk, hogy a munkás munkaideje milyen %-ban van kihasználva.

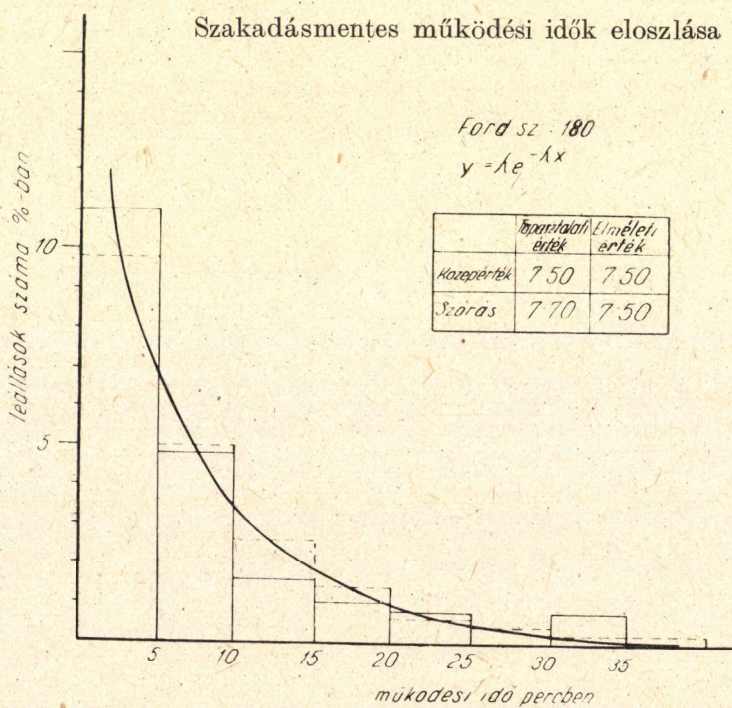
A szakadási valószínűségnek a fordulatszámától való függését kísérleti úton állapítottuk meg. A Kistextnél folytattuk le a kísérleti adatfelvételt, melyet *Kis Ottó* és *Környei Imre* alkalmazott matematikus szakos egyetemi hallgatók, valamint Intézetünk részéről *Bognár László* végeztek.

Kísérleteink során elsősorban vizsgáltuk a szakadásmentes idők eloszlását. Az 1.—4. ábrák mutatják ezt az eloszlást különböző fordulatszám mellett. A hystogrammon a szaggatott vonal jelzi az elméleti értéket, a másik



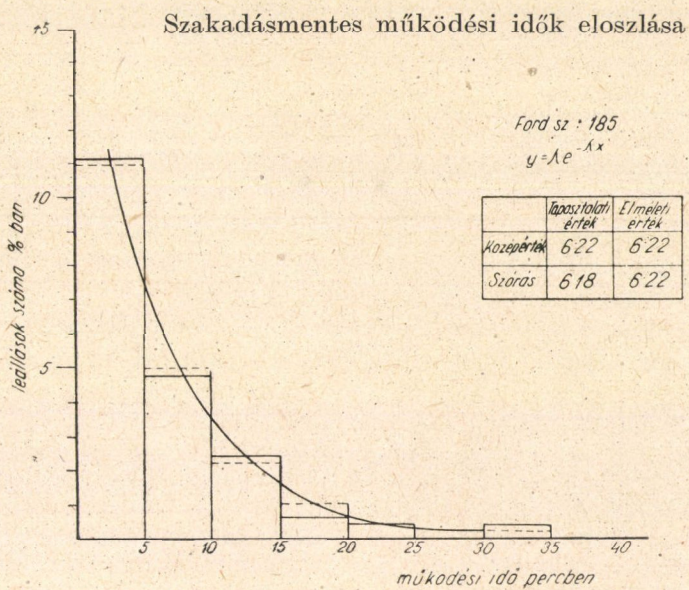


1. ábra

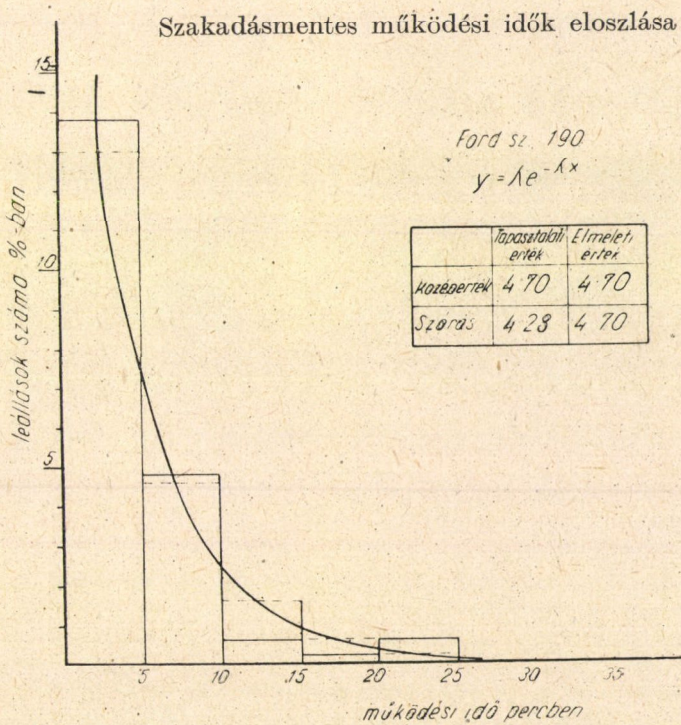


2. ábra





3. ábra



4. ábra

a ténylegesen észleltet. Az ábrákból kitűnik, hogy a kísérleti értékek az elméletiekkel kiválóan egyeznek. Különböző fordulatszámoknál az alábbi átlagos szakadásmentes időket és szakadási valószínűségeket észleltük :

Percenkénti fordulatszám .....	175	180	185	190
Átlagos szakadásmentes idő $\lambda$ percben ...	8,40	7,50	6,22	4,70
Szakadási valószínűség $\frac{1}{\lambda}$ .....	0,119	0,1333	0,1607	0,2128

A szakadási valószínűségeket az átlagos szakadásmentes idők reciprokértékeként számítottuk.

Ezúton mondunk köszönetet *Ajtai Miklós* könnyűipari miniszterhelyettesnek és a Kistext vezetőinek, hogy lehetőséget és segítséget nyújtottak az üzemi adatfelvétel elvégzéséhez.

A kísérlet időtartama alatt igyekeztünk a fordulatszámon kívül az összes többi, fonalszakadást befolyásoló tényező változatlanosságát biztosítani (így pl. a fordulatszám változtatása esetén az ütőkar hosszának megfelelő változtatásával igyekeztünk az ütés erősségét megfelelően szabályozni stb.). Azonban voltak olyan tényezők — mint pl. a levegő relatív nedvességtartalma, hőmérséklet stb. — melyek konstans szinten tartására igyekeztünk, de ez nem sikerülhetett teljesen.

Megvizsgáltuk közelebbről, hogy a szakadási valószínűség hogyan függ a fordulatszámtól, azaz a szakadási valószínűséget a fordulatszámnak,  $n$ -nek valamilyen függvényeként akartuk előállítani.

Az észlelt szakadási valószínűségek másodfokú parabolával jól közelíthetőek voltak

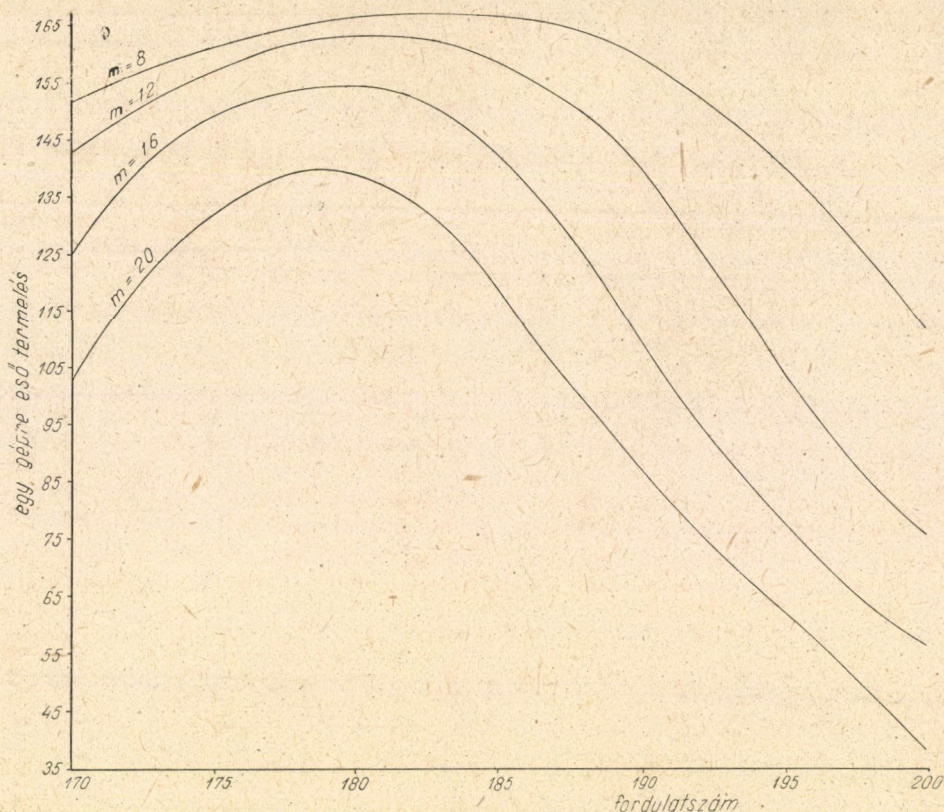
Fordulatszám .....	175	180	185	190
$\lambda$ { észlelt értéke .....	0,1190	0,1333	0,1608	0,2128
közelítő értéke .....	0,1288	0,1253	0,1547	0,2171

Különböző gépszám esetén az optimális fordulatszámot a következőképpen határoztuk meg : A (4) képlettel adott  $a_m$  szolgáltatja az időegység alatt működő gépek átlagos számát (ez a kifejezés annyiban módosul, hogy a benne

szereplő  $p = \frac{1}{\lambda}$  szakadási valószínűség  $n$ -nek, a fordulatszámnak  $p = an^2 + bn + c$  alakban adott függvénye. Ha adott  $n$ -nél  $a_m$  értékét meghatározzuk és az így nyert eredményt osztjuk a gépek számával egy gépre eső termeléssel arányos értéket kapunk, ez azonban könnyen átszámítható vetésszámmra. Az 5. ábra különböző gépszám esetén az egy gépre eső termelés mennyiségét adja a fordulatszám függvényében. Az ábrán látható, hogy az optimális fordulatszám valamennyi gépszám esetében 180 körül mozog, továbbá, hogy nagyobb gépszámok esetén a fordulatszámnak az optimális fordulatszámtól való kis eltérése is már lényeges termelésesökkenést okoz.

A közelítő parabolával nyert szakadási valószínűségek helyett a ténylegesen észlelt szakadási valószínűségekkel is el lehetett volna végezni a számítás, lényeges eltérést ez sem okozott volna. Összehasonlításként  $m = 16$  gép esetére közöljük ezeket az értékeket :





5. ábra

$a_{16}$  értéke:

Fordulatszám	175	180	185	190
a szakadási valószínűség észlelt értéke alapján	152,63	150,36	138,67	111,46
a szakadási valószínűség parabolikus közelítő értéke alapján	148,38	154,21	142,37	108,27

Hangsúlyoznunk kell itt még egyszer azt, hogy kísérleteink félperces átlagos javítási idő mellett adott fonalminőségre, géptípusra és olyan más körülményekre (levegő relatív nedvességtartalma, hőmérséklet stb.) vonatkoznak, melyek a kísérlet folyamán fennforogtak.

Ha ezek közül a tényezők közül bármelyik megváltozik és ennek a változásnak lényeges hatás tulajdonítható, a kísérletet meg kell ismételni és újból meg kell határozni az optimális fordulatszámot.

Vizsgálatunk végső konklúziója az volt, hogy célszerű emelni a fordulatszámot, mivel az üzem 170—175-el dolgozott addig. Bár más körülmények fennforgása esetén más az optimum — így pl. más üzemben 190-ig fel lehet menni a fordulatszámmal — az a tény, hogy a vizsgált esetben fordulatszám emelésének célszerűségét szabatos matematikai módszerekkel kimutattuk,



tipikus. Valóban, azóta a Kistextben és más hazai textilgyáraknál a fordulatszámot lényegesen felemelték, elsősorban a szovjet tapasztalatok és útmutatások alapján, de az Intézet által végzett vizsgálatok, melyeket Rényi Alfréd, az Intézet igazgatója 1952. februárjában mérnöki továbbképző előadás keretében a textilmérnökök előtt részletesen ismertetett, szintén alátámasztották a fordulatszám emelésének célszerű voltát.

#### IRODALOM

1. *A. Ja. Hincsin*: *Matematicseskij Szbornyik* 40 (1933) 119.
2. *Ashcroft, H.*: *Journal Roy. Stat. Soc. Ser. B. Vol. 193* (1950) 145—151.
3. *Takács Lajos*: *Magyar Technika*. 1950. 10. fl—19.
4. *Feller, W.*: *Probability Theory and its Applications*. 1950. 379—381.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ОБОРОТОВ ТКАЦКИХ МАШИН ПРИ ПОМОЩИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Г. СЕКЕЛЬ

#### Резюме

В случае повышения числа оборотов, работающая текстильная машина производит больше, а в то же время повышается и вероятность обрыва нити, следовательно, время простоя машин тоже повышается. Оптимальное число оборотов, т. е. число оборотов, при котором количество произведенных товаров максимально, можно определить методами теории вероятностей. Работа знакомит нас с теоретической работой и опытами на заводах, проведенными Институтом по отношению к этому вопросу.

#### DÉTERMINATION DU NOMBRE DE TOURS LE PLUS EFFICACE DES MÉTIERS À TISSER À L'AIDE DU CALCUL DES PROBABILITÉS

G. SZÉKELY

#### RÉSUMÉ

Dans le cas des machines textiles l'augmentation du nombre de tours par minute fait, que la machine produit une plus grande quantité de marchandise pendant son fonctionnement, mais la probabilité de la cassure du fils, augmente aussi et par ce fait la durée dans laquelle les machines sont mises hors service, augmente. Le nombre de tours le plus efficace, c'est-à-dire le nombre de tours permettant d'obtenir une quantité maximum de marchandises produite, peut être déterminé moyennant des méthodes de la théorie des probabilités. L'article décrit les calculs théoriques et les expériences d'usine effectués dans ce but par l'Institut.

# KÖTÖRÉS ENERGIASZÜKSÉGLETÉNEK MINIMALIZÁLÁSA AZ ELŐ- ÉS UTÁNTÖRŐK LEGCÉLSZERŰBB BEÁLLÍTÁSAVAL

SZÉKELY GÁBOR

## ÖSSZEFOGLALÁS

Ismeretes, *A. N. Kolmogorov* [1] eredményeiből, hogy a zúzott anyag szemcséinek nagyságszerinti eloszlása logaritmikusan normális. Szerző fenti eredményeket felhasználva pofástörőkkel való zúzás kétfázisban való lefolytatásához ad nomogrammot, amelynek segítségével a pofanyílások olymódon állíthatók be, hogy a törők hatásfoka maximális legyen.

*A. N. Kolmogorov* szovjet matematikus 1941-ben megjelent dolgozatában [1] aprítási folyamatoknál keletkező szemcsék szemmagyság szerinti logaritmikus normális eloszlását igazolta. Ugyanezzel a kérdéssel foglalkozott *Rényi Alfréd* is [2] dolgozatában, ahol az említett problémának egy részletesebb tárgyalását adta, különböző feltételek mellett elemi eszközökkel bebizonyította a Kolmogorov-féle logaritmikus normális eloszlástörvény érvényességét és megadta az aprításhoz szükséges energia kifejezését. Röviden összefoglaljuk a cikk eredményeit.

Aprításnál keletkező szemcsék szemmagyság szerinti (szemmagyságon a szemcse átmérőjét értjük; ezt indokolja az, hogy a szemmagyság szerinti megoszlást a gyakorlatban szítálással vizsgálják) eloszlásának sűrűségfüggvénye

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}xb} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x}{b} - \log a\right)^2}$$

A valóságban azonban nem az egyes szemmagyság-kategóriákhoz tartozó szemcsék számát, hanem azok súlyát ismerjük. A súly szerinti eloszlás sűrűségfüggvénye

$$(2) \quad q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}ba^3e^{\frac{9b^2}{2}}} x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x}{b} - \log a\right)^2}$$

A szemcsék súlya és száma között az (1) és (2) sűrűségfüggvényekből származó egyszerű összefüggés áll fenn

$$(3) \quad S = fNa^3e^{\frac{9b^2}{2}}$$

ahol  $S$  a szemcsék súlyát,  $N$  a számát jelenti,  $a$  és  $b$  az eloszlásban szereplő paraméterek,  $f$  pedig a fajsúly.

A (2) sűrűségfüggvény első és második momentumait az

$$(4) \quad \begin{aligned} M_1 &= \int_0^{\infty} xq(x) dx = a e^{\frac{7b^2}{2}} \\ M_2 &= \int_0^{\infty} x^2q(x) dx = a^2 e^{8b^2} \end{aligned}$$

értékek szolgáltatják. Ezek segítségével meghatározhatók az  $a$  és  $b$  paraméterértékek.

Ismeretes, hogy a Rittinger [3] törvény szerint a zúzáshoz szükséges energia arányos a zúzás folyamán keletkezett felülettöbblettel. Az aprítás folyamán keletkezett felület pedig arányos (az arányossági tényező a zúzott anyagtól függ, ugyanis függ a szemcsék alakjától) az (1) sűrűségfüggvény második momentumával. A zúzáshoz szükséges energiára ilymódon,\* felhasználva a (3) összefüggést, adódik, hogy arányos az

$$(5) \quad E = \frac{cS}{a e^{\frac{5b^2}{2}}} = 6kNa^2e^{2b^2}$$

kifejezéssel, ahol  $c$  és  $k$ , a zúzott anyagtól függő állandó  $k$ .

A logaritmikus normális eloszlásnak az alkalmazása az eddig helytelenül használt Rosin—Rammler eloszlás helyett nem jelent számolásbeli nehézséget. A számításhoz szükséges függvényértékek táblázatából könnyen kikereshetők. Indokolt ezt használni egyrészt azért, mert elméletileg megalapozott, másrészt mert alkalmas az energiaszükséglet meghatározására, szemben a Rosin—Rammler eloszlással [5], mely bizonyos esetekben ellentmondásra is vezet. (Bizonyos paraméterértéknél a Rosin—Rammler-eloszlás szerint végtelen energiára van szükség a zúzás lefolytatásához.)

Lázár Jenő [4] foglalkozott pofástörőknél keletkező zuzalék szemeloszlásával; tapasztalati adatokkal igazolta, hogy az logaritmikus normális eloszlást követ, de továbbmenőleg azt a megfigyelést tette, hogy egyrészt a beállított pofanyílás nagysága, másrészt az (1) és (2) sűrűségfüggvényekben szereplő  $a$  és  $b$  paraméterek között függvényszerű kapcsolat áll fenn.

E megfigyelés nyomán Lázár Jenő vetette fel azt a kérdést, hogy ha a zúzást két fázisban folytatjuk le (előtörő, utántörő), milyen pofanyílás beállítás mellett lesz a felhasznált energia minimális, illetve az aprítás hatásfoka maximális.

Az UVATERV-től kísérleti adatokat kaptunk, bizonyos közetfélésegek különböző pofanyílás-beállítás mellett pofatörőkkel végzett zúzására vonatkozólag. A pofanyílást változtatták 10 mm-ként 30—150 mm-ig. Ilymódon a szitamaradék-görbékből 13 db empirikus eloszlásfüggvényt nyertek. Az 1.

\* Az (5) képletben szereplő kifejezés nem dimenzió nélküli. Az energia dimenziója  $\text{cm}^2 \text{ gr sec}^{-2}$ , a nevező (második momentum) dimenziója  $\text{cm}^2$ , tehát a számlálóban szereplő  $c$  konstans, illetve a  $k$  konstans  $\text{gr sec}^{-2}$  dimenzióval értendő.

táblázat adja ezeknek az eloszlásfüggvényeknek az első és második momentumait, melyeket grafikus úton határoztunk meg.

1. táblázat

Pofanyulás	$M_1$	$M_2$
30 .....	15,06	322,67
40 .....	20,90	504,63
50 .....	26,20	696,25
60 .....	31,54	1150,27
70 .....	36,12	1449,36
80 .....	40,34	1857,04
90 .....	45,46	2309,32
100 .....	50,26	3019,56
110 .....	54,98	3672,21
120 .....	59,54	4396,98
130 .....	62,70	4747,35
140 .....	66,68	5276,41
150 .....	70,50	5918,64

A (4) összefüggések segítségével meghatároztuk az  $a$  és  $b$  paramétereket, majd meghatároztuk a  $p$  pofanyulás és az észlelt  $a$  és  $b$  értékek közötti kapcsolatot: Azt kaptuk, hogy  $a$  lineáris függvénye a  $p$  pofanyulásnak,  $b$  pedig közelítőleg konstans

$$a = 0,4908253 p = \lambda p$$

$$b = 0,391$$

Ha az így kapott  $a$  és  $b$  értékeket behelyettesítjük az energiára nyert (5) képletbe, látjuk, hogy a zúzáshoz szükséges energia a pofanyulás függvényében egy hyperbolával ábrázolható, mely egyezik a tapasztalatokkal.

A probléma a következő: valamely közetet akarunk  $p^*$  finomságúra aprítani; itt  $p^*$  finomság alatt azt értjük, hogy a zuzalékban előforduló maximális szemnagyság  $p^*$ , a többi mind ennél kisebb. Két részletben törünk, előbb előtörővel, majd utántörővel. Kérdés, *hogyan kell a törők  $p_1$ , illetve  $p_2$  pofanyulásait megválasztani, olymódon, hogy a zúzáshoz szükséges energiának és a zúzott közet súlyának hányadosa minimális legyen.*\*

Induljunk ki egy  $N$  szemcséből álló közetmennyiségből. Ezt  $p_1$  pofanyulás-beállítás mellett aprítjuk. Az aprításhoz felhasznált energia

$$E_1 = 6N \lambda^2 p_1^2 e^{2b_0}$$

Szitával leválasztjuk a  $p^*$ -nál nagyobb szemcséket. Ezek száma

$$N_1 = N \int_{p^*}^{\infty} f(x, p_1) dx$$

\* Ennek a problémának a megoldása jelentős energiamegtakarítást tesz lehetővé, aminek népgazdasági szempontból igen nagy jelentősége van, mivel az aprítási folyamatok általában rendkívül sok energiát igényelnek.



Másodszor aprítunk  $p_2$  pofanyílás-beállítás mellett. A zúzáshoz felhasznált energia

$$E_2 = 6N \int_{p^*}^{\infty} f(x, p_1) dx \lambda^2 p_2^2 e^{2b^2} - 6N \int_{p^*}^{\infty} x^2 f(x, p_1) dx$$

ahol a jobboldalon álló kifejezés második tagja jelenti az első szítálás-kor leválasztott és továbbtörésre kerülő anyag felületét. Ugyanis *Rittinger* törvénye szerint a zúzáshoz szükséges energia a keletkező felülettöbblettel arányos. Az első zúzásnál, a zúzás előtti kezdeti felületet elhanyagoltuk, ez kicsiny a keletkező felülethez képest. A második zúzás után is szítával leválasztjuk a  $p^*$ -nál nagyobb szemcséjű anyagot.

A két zúzás után súlyban keletkezett

$$S = S_1 + S_2 = fN \int_0^{p^*} x^3 f(x, p_1) dx + fN \int_{p^*}^{\infty} f(x, p_1) dx \int_0^{p^*} x^3 f(x, p_2) dx$$

összsúlyú zúzott anyag, ahol  $f$  az anyag fajsúlyát jelenti.

Energiában felhasználódott

$$E = E_1 + E_2.$$

Meghatározandó az a  $p_1, p_2$  értékpár ( $p_2 \leq p_1$ ), amely mellett az

$$(6) \quad \frac{E}{S} = \frac{6N \left[ 2p_1^2 e^{2b^2} + \int_{p^*}^{\infty} f(x, p_1) dx \lambda^2 p_2^2 e^{2b^2} - \int_{p^*}^{\infty} x^2 f(x, p_1) dx \right]}{fN \left[ \int_0^{p^*} x^3 f(x, p_1) dx + \int_{p^*}^{\infty} f(x, p_1) dx \int_0^{p^*} x^3 f(x, p_2) dx \right]}$$

hányados minimális, ahol

$$f(x, p_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} xb} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\log x - \log \lambda p_1}{b} \right)^2}$$

$$f(x, p_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} xb} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\log x - \log \lambda p_2}{b} \right)^2}$$

Célszerűnek látszott a fenti kétváltozós függvény minimumát nomogramm segítségével meghatározni. Kisebbszámú átalakításokkal a (6) függvény a következő alakra hozható:

$$(7) \quad \frac{E}{S} = \frac{f(p_1) + g(p_1)f(p_2) - h(p_1)}{k(p_1) + g(p_1)k(p_2)} = \frac{\frac{f(p_1) - h(p_1)}{g(p_1)} + f(p_2)}{\frac{k(p_1)}{g(p_1)} + k(p_2)} = \frac{F_1(p_1) - F_2(p_2)}{G_1(p_1) - G_2(p_2)}$$

ahol

$$F_1(p_1) = \frac{f(p_1) - h(p_1)}{g(p_1)}$$

$$F_2(p_2) = f(p_2)$$

$$G_1(p_1) = \frac{k(p_1)}{g(p_1)}$$

$$G_2(p_2) = k(p_2),$$

továbbá a (6) függvényben szereplő integrálok átalakításával

$$g(p_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\ln \frac{p^*}{\lambda p_1}}{\sqrt{2} b}}^{\infty} e^{-t^2} dt \quad h(p_1) = \lambda^2 e^{2b^3} p_1^2 \int_{\frac{\ln \frac{p^*}{\lambda p_1}}{\sqrt{2} b}}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$k(p_1) = \lambda^3 e^{\frac{9b^2}{2}} p_1^3 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\ln \frac{p^*}{\lambda p_1}}{\sqrt{2} b}}^{\infty} e^{-t^2} dt \right]$$

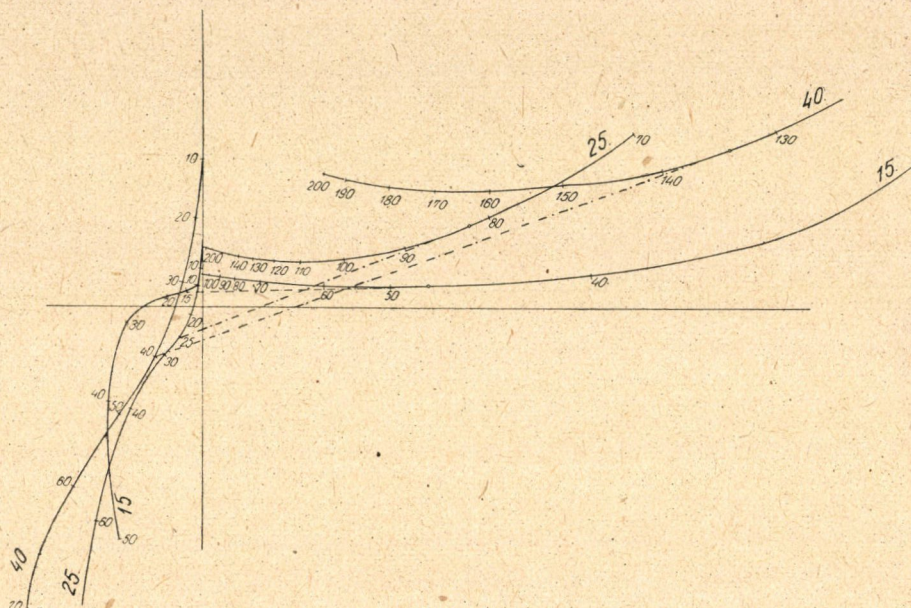
$$k(p_2) = \lambda^3 e^{\frac{9b^2}{2}} p_2^3 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\ln \frac{p^*}{\lambda p_2}}{\sqrt{2} b}}^{\infty} e^{-t^2} dt \right]$$

A (7) kifejezés úgy fogható fel, mint egy iránytangens. Ha tehát az egyik skálán adott  $p^*$  mellett az  $F_1(p_1)$  és  $G_1(p_1)$  értékeknek megfelelő pontokat rakjuk fel, a másikon az  $F_2(p_2)$  és  $G_2(p_2)$  értékeknek megfelelőket, a két görbe egy-egy pontját összekötő egyenesnek az iránytangense éppen az illető  $p_1, p_2$  értékpárnak megfelelő  $\frac{E}{S}$  függvényértéket szolgáltatja. A függvénynek tehát

azon  $p_1, p_2$  értékpárnál van minimuma ( $p_2 \leq p_1$  mellékfeltételt is figyelembe kell venni), amelynél a két görbe megfelelő pontjait összekötő egyenesnek az iránytangense minimális. A szélsőértékfeladat nomografikus úton való megoldásának gondolata Pál Sándortól származik. A nomogrammból (1. ábra) az derült ki, hogy a vizsgált esetben *leggazdaságosabban akkor járunk el, ha a második pofanyílás-beállítás magával  $p^*$ -al egyenlő*. A függvény szélső értékét egyébként a  $p^*$  pontból a másik görbéhez húzott érintő érintési pontjának megfelelő  $p$  pont szolgáltatja. Az így nyert  $p_1, p^*$  értékpár adja a kívánt minimumot.



Itt ki kell még hangsúlyoznunk azt, hogy az itt közölt eredmények csak a kísérletben szereplő kőzetféléseknél a felhasznált zúzógépekkel történt zúzására érvényesek. Más kőzetek és más zúzóberendezés esetén általában más lesz  $\lambda$  és  $b$  értéke.  $\lambda$  és  $b$  értékének meghatározása mindig kísérleti úton történik. A nomogramm változó  $\lambda$  és  $b$  értékre való kiterjesztésének nincs elvi akadálya, csak ismerni kell  $\lambda$  és  $b$  változásának értékhatárait. Ez esetben adott  $p^*$  értékhez nem két görbe, hanem két görbesereg tartozik.



1. ábra

## IRODALOM

1. A. H. Колмогоров: Докладч А. Н. СССР (1941)
2. Rényi A.: Építőanyag, 2. (1950) 177—183.
3. P. R. Rittinger: Aufbereitungskunde (1867) 19.
4. Lázár J.: Építőanyag 2. (1950) 57—71.
5. Beke B.: Aprítás-fajtázás. (Sajtó alatt)

## МИНИМАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ РАЗДРОБЛЕНИЯ КАМНЯ ПУТЕМ НАИБОЛЕЕ ЦЕЛЕСООБРАЗНОЙ УСТАНОВКИ ДРОБИЛОК ПЕРВИЧНОГО И ВТОРИЧНОГО ДРОБЛЕНИЯ

Г. СЕКЕЛЬ

Резюме

Из результатов А. Н. Колмогорова [1] известно, что распределение по величине зерен раздробленного материала логарифмически нормально. Применяя вышеуказанные результаты, автор дает номограмм для произведения двухстадийного измельчения щековыми дробилками, с помощью которого щековые отверстия регулируются так, что эффективность дробилок максимальна.

# MINIMALISATION DU BESOIN D'ENERGIE DU CONCASSAGE PAR L'AJUSTAGE LE PLUS PRATIQUE DES CONCASSEURS PRELIMINAIRES ET DES CONCAS- SEURS POSTÉRIEURS

G. SZÉKELY

## Résumé

Sur la base des résultats obtenus par *A. N. Kolmogorov* [1] on sait que la distribution des grains de la matière concassée selon leur grandeur est logarithmico-normale. Utilisant les résultats mentionnés, l'auteur donne un nomogramme, à l'aide duquel dans le cas de concassage en deux phases les ouvertures des joues peuvent être ajustées d'une telle manière que l'effet utile des concasseurs devienne un maximum.





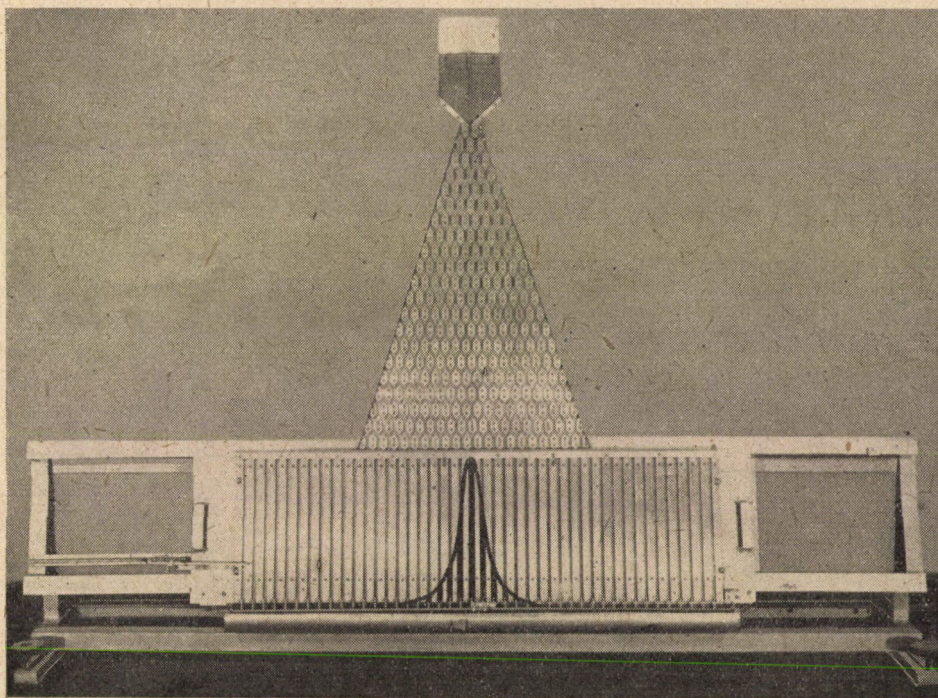
## A GALTON-FÉLE DESZKÁVAL KAPCSOLATOS NÉHÁNY PROBLÉMÁRÓL

MEDGYESSY PÁL

### ÖSSZEFOGLALÁS

Szerző ismerteti a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Galton-deszkáját és annak néhány alkalmazását. Azután leír két kísérletet Galton-deszkával. Az egyikben valamely kiválasztott tartályba jutó golyók számának eloszlását vizsgálja, a másikon két különböző tartályba jutó golyók számának egymástól való függését. Megadja annak feltételeit, hogy az első esetben Poisson-eloszlás keletkezzék. A második esetben pedig teljes függetlenség álljon fenn. Befűzésül a Galton-deszka egy módosítását vázolja.

Az Alkalmazott Matematikai Intézet a közelmúltban elkészíttetett egy 20 soros Galton-deszkát, elsősorban demonstrációs céllal. A készüléket a fény-



kép mutatja : mivel az általános elv ismeretes, csak azt említjük fel, miben tér el az általában használtaktól.

A leguruló golyók vagy sörétek szögek helyett fémékekbe ütköznek és mindegyiken ugyanazzal a valószínűséggel térnek el jobbra, ill. balra. Kis súlyukkal nem rongálják az ék élet és így a balra, ill. jobbra való eltérítés valószínűsége változatlan marad hosszabb használat után is. Fontos újítás az éktávolság egész többszöröseivel eltolható gyűjtőtartálysor. Az egyes tartályokat egyszerre vagy függetlenül lehet nyitni, ez számlálás szempontjából fontos.

Felsorolunk pár alkalmazási lehetőséget.

1. Ismeretes, hogy a golyók a tartályokban binomiális eloszlással és így elég nagyszámú éksor esetében elég nagyszámú golyó lefutása után a normális eloszlás görbáját közelítően helyezkednek el. Ha most a tartálysort eltoljuk és újból lefuttatunk golyókat, az ezek által képviselt normális eloszlás-kép az előbbire szuperponálódik. Így általában szemléltethető normális eloszlások szuperpozíciója. Ezen az alapon szemléltethető pl. a *Rényi Alfréd* által tárgyalt meteorológiai probléma megoldása [1].

2. Ismeretes, hogy a Galton-féle deszkán lejátszódó jelenség azonos egy »bolyongási« problémával : Mozgó pont egyenesen lévő egyenlő távolságú pontok valamelyikében tartózkodhat, pl.  $x$ -ben. Ebből a pontból  $p$  valószínűséggel mehet  $x + 1$ -be,  $q$  valószínűséggel  $x - 1$ -be. Mi annak a  $V(N, K)$  valószínűsége, hogy  $N$  lépés után  $x \pm K$ -ban ( $K = 0, 1, \dots, N$ ) lesz?

Tudjuk, hogy bizonyos határátmeneti feltételeknél  $V(N, K)$  differencia-egyenlete átmegy a diffúzió (egyben a hővezetés) differenciálegyenletébe [2]. A Galton-deszka tartályaiban elhelyezkedő golyók képe tehát a diffúzió differenciálegyenletének egy megoldását mutatja. Olyan ékekkel, amelyekről a golyó csak egy irányban haladhat tovább, vagy egyes ékek helyett »elnyelő« nyílásokat iktatva be, ezzel a visszaverő, ill. elnyelő fal határfeltételét iktathatjuk be és ekkor a golyók mutatta görbe a határfeltételek melletti megoldást mutatja.

3. Mivel elég nagy sor- és ékszámnal valamely szélső tartályba jutás valószínűsége tetszőlegesen kicsivé tehető, bizonyos határok közt tetszőlegesen kis valószínűségű eseményt képvisel a golyónak az említett tartályba jutása. Ezért a szélső tartályokba jutó golyók számának eloszlása már a Poisson-félet közelíti meg.

4. Felhasználható a készülék a »véletlen számok« (random numbers) sorozatának előállítására, 0-tól valamilyen 2-hatványig terjedő számsorra.

Dolgozatunk tulajdonképpen célja a Galton-deszkával kapcsolatos néhány probléma tárgyalása.

## 1. §.

A problémák bizonyos, a Galton-deszkával végezhető kísérletekkel fűgnek össze. Az egyikben a következő elrendezés szerepel : A Galton-deszka utolsó éksorát 0, 1, 2, ...  $N$ -ig számozva képzeljük el, balról jobbra. Kiválasztunk egy tartályt és föléje toljuk a »0« éket. (Ez azonos a tartálynak az ék alá tolásával, viszont ez a felfogás a tárgyalás szempontjából kényelmesebb.) Ezután lebocsátunk  $K_0 \geq 0$  számú golyót. Ebből valamennyi (esetleg 0) a kiválasztott tartályba jut. Most az »1« éket toljuk a tartály fölé és  $K_1 \geq 0$  golyót bocsátunk le, melyekből valamennyi a tartályba jut, és így tovább.

A  $\nu$ -ik éknél  $K_\nu \geq 0$  golyót bocsátunk le ( $\nu = 0, 1, 2, \dots, N$ ). A kísérlet során minden ék elhalad a tartály felett.

Bebizonyítjuk a következőt:

(I.) A fenti kísérletnél a tartályban levő golyók száma  $\lambda$  várható értékű Poisson-eloszlású, ha  $N \rightarrow \infty$ , feltéve, hogy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^N K_\nu \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^N} = \lambda$$

létezik és véges.

*Bizonyítás:* A tartályban lévő golyószám,  $\zeta_N$ , valószínűségi változó. Tekintsük azt a helyzetet, midőn a  $\nu$ -ik ék áll a tartály felett. Az ebben a helyzetben leguruló  $\mu$ -ik golyóhoz rendeljük a következő  $\zeta_{\nu\mu}$  ( $\mu = 1, 2, \dots, K_\nu$ ) valószínűségi változót:

$$\zeta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 & \text{ha a szóbanforgó golyó a kiválasztott tartályba jut,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A Galton-deszka tulajdonságából következik:

$$V(\zeta_{\nu\mu} = 1) = \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^N} = p_\nu$$

$$V(\zeta_{\nu\mu} = 0) = 1 - p_\nu = q_\nu.$$

A  $\nu$ -ik lebocsátásnál a tartályba jutó golyók száma  $\eta_{N\nu} = \sum_{\mu=0}^{K_\nu} \zeta_{\nu\mu}$  és az

egész kísérlet alatt odajutó golyók száma

$$\zeta_N = \sum_{\nu=0}^N \eta_{N\nu} = \sum_{\nu=0}^N \sum_{\mu=0}^{K_\nu} \zeta_{\nu\mu}.$$

A  $\zeta_{\nu\mu}$ -k függetlenek és így alkalmazható egy általános tétel [3], amelyből speciális esetként adódik a következő tétel: Ha az  $\eta_{N1}, \dots, \eta_{NN}$  valószínűségi változók függetlenek és mindegyik binomiális eloszlású, mégpedig

$$V(\eta_{N\nu} = r) = \binom{K_{N\nu}}{r} p_{N\nu}^r (1 - p_{N\nu})^{K_{N\nu}-r}$$

akkor, ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq \nu \leq N} p_{N\nu} = 0$$

és

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^N p_{N\nu} K_{N\nu} = \lambda$$

g  $\zeta_N = \sum_{\nu=1}^N \eta_{N\nu}$  eloszlása konvergál a  $\lambda$  várható értékű Poisson-eloszlás-



hoz, azaz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V(\zeta_N = s) = \frac{\lambda^s}{s!} e^{-\lambda} \quad (s = 0, 1, \dots),$$

amit a problémánkra alkalmazva, kapjuk (I.)-et.

Megjegyezzük, hogy  $K_\nu = \lambda$  ( $\nu = 0, 1, \dots, N$ ) vagy  $\lim K_\nu = \lambda$  esetén a Toeplitz-tétel [4] értelmében a kívánt konvergencia fennáll. Hasonlóképpen fennáll a kívánt konvergencia, ha csak minden  $r$ -ik helyzetben dobunk be  $\lambda$  számú golyót, azaz  $K_\nu = \lambda$ , ha  $\nu = r \cdot m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) és  $K_\nu = 0$  egyébként, továbbá akkor is, ha a  $K_\nu$  számok periodikus sorozatot alkotnak, vagy ha a  $K_\nu$  számok számtani közepének határértéke létezik stb. A  $N \rightarrow \infty$  a gyakorlatban azt jelenti, hogy az éksorok számát egyre növeljük. Elég nagy ékszámnál a határeloszlás már igen jó közelítéssel megvalósul.

Ezután a fenti kísérlet következő módosítását vizsgáljuk :

(II.) Az (I)-nél leírt kísérletben legyen  $K_\nu$  diszkrét valószínűségi változó és legyen  $V(K_\nu = x) = f_\nu(x)$  ( $x = 0, 1, \dots$ ), mely  $f_\nu(x)$  függvény különböző  $\nu$  értékekre különböző lehet. Keressük a tartályban lévő golyószám,  $\zeta_N$  eloszlásfüggvényét.

E célból megállapítjuk a fentebb szerepelt  $\eta_{N\nu}$  karakterisztikus függvényét. Függetlenségük miatt  $\zeta_N$  karakterisztikus függvénye az  $\eta_{N\nu}$ -k karakterisztikus függvényeinek szorzata lesz ; ebből következtetünk az eloszlásra.

$\eta_{N\nu}$  függ a  $K_\nu$  valószínűségi változótól, vagyis az eloszlás kevert. Ekkor [5]  $\eta_{N\nu}$  karakterisztikus függvénye ( $\mathbf{M}$  a várható érték) :

$$\varphi_{\eta_{N\nu}} = \mathbf{M} e^{it\eta_{N\nu}} = \mathbf{M}(\mathbf{M}(e^{it\eta_{N\nu}}/K_\nu)).$$

(A zárójelben : feltételes várható érték.)  $\eta_{N\nu}$  binomiális eloszlású,  $K_\nu = x$  és  $\mu_\nu = \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^N}$  paraméterekkel. Karakterisztikus függvénye [6]

$$\mathbf{M}(e^{it\eta_{N\nu}}/K_\nu) = \left[ 1 + \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^N} (e^{it} - 1) \right]^\nu.$$

Így

$$\varphi_{\eta_{N\nu}} = \mathbf{M} e^{it\eta_{N\nu}} = \sum_{x=0}^{\infty} \left[ 1 + \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^N} (e^{it} - 1) \right]^x \cdot f_\nu(x)$$

és

$$\varphi_{\zeta_N} = \prod_{\nu=0}^N \sum_{x=0}^{\infty} \left[ 1 + \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^N} (e^{it} - 1) \right]^x \cdot f_\nu(x).$$

Specializáljuk most  $f_\nu(x)$ -et.

Legyen először

$$f_\nu(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = L_\nu \text{ (konst.)} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ez nyilván az (I.) alatti eloszlás esete akkor, ha  $N \rightarrow \infty$ -t nem kötjük ki, tehát annak eloszlását a

$$\varphi_{\zeta_N} = \prod_{\nu=0}^N \left[ 1 + \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^N} (e^{it} - 1) \right]^{L_\nu}$$

karakterisztikus függvénye jellemzi.

Legyen most  $f_\nu(x)$  Poisson-eloszlású:

$$f_\nu(x) = e^{-\lambda_\nu} \cdot \frac{\lambda_\nu^x}{x!},$$

akkor

$$\varphi_{\eta_{N\nu}} = \sum_{x=0}^{\infty} \left[ 1 + \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^N} (e^{it} - 1) \right]^x \cdot e^{-\lambda_\nu} \cdot \frac{\lambda_\nu^x}{x!} = e^{\lambda_\nu \left( \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^N} (e^{it} - 1) \right)}$$

vagyis  $\eta_{N\nu}$  Poisson-eloszlású és mert

$$\varphi_{\zeta_N} = \prod_{\nu=0}^N \varphi_{\eta_{N\nu}} = e^{\left[ \sum_{\nu=0}^N \lambda_\nu \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^N} \right] (e^{it} - 1)}$$

$\zeta_N$  szintén Poisson-eloszlású, mégpedig nemcsak határértékben, hanem már véges  $N$  mellett is. (Gyakorlatilag ez úgy valószínűsíthető meg, hogy minden helyzetben találomra markolunk ki egy marék golyót egy dobozból és azokat engedjük lefutni.) Könnyen belátható, hogy csakis ekkor Poisson-eloszlású  $\zeta_N$ .

## 2. §.

Képzeliük el az (I.) alatti kísérlet következő módosítását: Vegyünk két tartályt,  $A$ -t és  $B$ -t; ha a »0« ék  $A$  felett van, legyen a  $B$  felett a  $d$ -ik ék. Toljuk a »0« éket  $B$  fölé és bocsássunk le  $K_0 \geq 0$  golyót. Ebből  $B$ -be jut  $\eta_0$ ,  $A$ -ba nyilván  $\xi_0 = 0$ . Egy ékkel tovább toljuk a deszkát, leengedünk  $K_1$ -et; jusson  $B$ -be  $\eta_1$ ,  $A$ -ba  $\xi_1 = 0$ , é. i. t., addig, míg a »0« ék az  $A$  felett lesz (és a  $d$ -ik  $B$  felett). Az ekkor lebocsátott  $K_d$ -ből  $A$ -ba  $\xi_d$  (általában  $\neq 0$ ) jut,  $B$ -be  $\eta_d$ . Újabb eltolás és  $K_{d+1}$  golyó lebocsátása után  $\xi_{d+1}$  és  $\eta_{d+1}$  s. i. t.; az  $N$ -ik lebocsátásnál  $\xi_N$  és  $\eta_N$ . Az  $N+1$ -iknél  $B$ -be már nem jut,  $\eta_{N+1} = 0$ ;  $A$ -ba  $\xi_{N+1}$  jut. Az  $(N+d)$ -ik, a kísérlet szempontjából utolsó lebocsátásnál  $A$ -ba jut  $\xi_{N+d}$ ,  $B$ -be  $\eta_{N+d}$ .

Legyen a golyók száma  $A$ -ban

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_{N+d} \quad (\xi_0 = \xi_1 = \dots = \xi_{d-1} = 0)$$

$B$ -ben

$$\eta = \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_{N+d} \quad (\eta_{N+1} = \eta_{N+2} = \dots = \eta_{N+d} = 0)$$

$\xi$ ,  $\eta$  független valószínűségi változók összegei, amelyekre nyilván igazak az (I.) alatti probléma megállapításai.

$\xi$  és  $\eta$  azonban általában egymástól *nem függetlenek*, mert  $\xi_s$  függ  $\eta_s$ -től ( $s = d, d + 1, \dots, N$ ).

Bebizonyítjuk a következőt:

(III.)  $\xi_s$  és  $\eta_s$  ( $s = d, d + 1, \dots, N$ ) (vagyis  $\xi$  és  $\eta$ ) *csakis akkor függetlenek, ha  $K_\nu$  Poisson-eloszlású valószínűségi változó* ( $\nu = 0, 1, \dots, N + d$ ) *általában esetről-esetre más  $\lambda_\nu$  paraméterrel.*

*Bizonyítás:* A közös sűrűségfüggvény nyilván a polinomiális eloszlással adható meg:

$$V(\xi_s = \nu, \eta_s = \mu) = \frac{K_s!}{\nu! \mu! (K_s - \nu - \mu)!} p_s^\nu q_s^\mu (1 - p_s - q_s)^{K_s - \nu - \mu}$$

ahol  $p_s$ , ill.  $q_s$  annak a valószínűségei, hogy a  $s$ -edik beállításnál *egyetlen golyó* belefut  $A$ -ba, illetve  $B$ -be; ezek nyilván

$$p_s = \binom{N}{s-d} \frac{1}{2^N}$$

$$q_s = \binom{N}{s} \frac{1}{2^N}.$$

Legyen  $K_s$  valószínűségi változó és sűrűségfüggvénye

$$f_s(x) = V(K_s = x)$$

akkor a teljes valószínűség tétele szerint

$$V(\xi_s = \nu, \eta_s = \mu) = \sum_{x=0}^{\infty} f_s(x) \cdot \frac{x!}{\nu! \mu! (x - \nu - \mu)!} p_s^\nu q_s^\mu (1 - p_s - q_s)^{x - \nu - \mu}$$

Ha most

$$f_s(x) = e^{-\lambda_s} \cdot \frac{\lambda_s^x}{x!}$$

$$\begin{aligned} V(\xi_s = \nu, \eta_s = \mu) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda_s} \cdot \frac{\lambda_s^x}{x!} \cdot \frac{x!}{\nu! \mu! (x - \nu - \mu)!} \cdot p_s^\nu q_s^\mu (1 - p_s - q_s)^{x - \nu - \mu} = \\ &= \frac{e^{-\lambda_s} \cdot p_s^\nu q_s^\mu}{\nu! \mu!} \cdot \lambda_s^{(\nu + \mu)} \sum_{x=\nu + \mu}^{\infty} \frac{\lambda_s^{(x - \nu - \mu)}}{(x - \nu - \mu)!} (1 - p_s - q_s)^{x - \nu - \mu} = \\ &= e^{-\lambda_s} \cdot \frac{p_s^\nu q_s^\mu}{\nu! \mu!} \cdot \lambda_s^{(\nu + \mu)} \cdot e^{-\lambda_s (1 - p_s - q_s)} = \\ &= \frac{e^{-\lambda_s p_s} \cdot (\lambda_s p_s)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{e^{-\lambda_s q_s} \cdot (\lambda_s q_s)^\mu}{\mu!}, \end{aligned}$$

vagyis

$$V(\xi_s = \nu, \eta_s = \mu) = V(\xi_s = \nu) \cdot V(\eta_s = \mu) = P_1 \cdot P_2,$$

ahol  $P_1$ , ill.  $P_2$   $\lambda_s p_s$ , ill.  $\lambda_s q_s$  paraméterű Poisson-sűrűségfüggvények.

Megfordítva : ha a függetlenség fennáll, úgy

$$V(\xi_s = \nu, \eta_s = \mu) = V(\xi_s = \nu) \cdot V(\eta_s = \mu)$$

és így egyszerű számolással adódik, hogy bevezetve a

$$\Phi(z) = \sum_{x=0}^{\infty} f_s(x) \cdot (1+z)^x$$

jelölést

$$\Phi[p_s(u-1) + q_s(v-1)] = \Phi[p_s(u-1)] \cdot \Phi[q_s(v-1)]$$

$u$  és  $v$  minden értékére, tehát

$$\Phi(a+b) = \Phi(a) \cdot \Phi(b)$$

vagyis

$$\Phi(z) = e^{\lambda_s \cdot z}$$

és így

$$f_s(x) = \frac{\lambda_s^x}{x!} e^{-\lambda_s}.$$

Vizsgáljuk most a következőket :

(IV.) *Mi lesz a korrelációs együttható  $\xi$  és  $\eta$  között a második kísérletnél, ha  $K_\nu$  valószínűségi változó,  $f_\nu(x) = V(K_\nu = x)$  sűrűségfüggvénnyel (mely kísérletről-kísérletre változhat)?* A

$$r_{\xi\eta} = \frac{M(\xi\eta) - M(\xi) \cdot M(\eta)}{\sqrt{\sigma^2(\xi) \cdot \sigma^2(\eta)}} = \frac{R}{\sqrt{\sigma^2(\xi) \cdot \sigma^2(\eta)}}$$

( $\sigma^2$  a szórásnégyzet) korrelációs együttható számlálójába  $\xi$  és  $\eta$  kifejezését beírva, beszorozva és a függőséget figyelembe véve, kapjuk

$$R = \sum_{s=d}^N |M(\xi_s \eta_s) - M(\xi_s) \cdot M(\eta_s)|.$$

Mivel azonban a várható értékekben szereplő  $K_s$  is valószínűségi változó

$$R = \sum_{s=d}^N [M\{M(\xi_s \eta_s / K_s = x)\} - M\{M(\xi_s / K_s = x)\} \cdot M\{M(\eta_s / K_s = x)\}]$$

(az első operáció már a  $K_s$  változóra szól).

Láttuk, hogy a  $(\xi_s, \eta_s)$  vektor trinomialis eloszlású; ismeretes, hogy annak várható értéke  $K_s = x$ -nél

$$M(\xi_s \eta_s / K_s = x) = x(x-1) p_s q_s$$



és a binomiális eloszlású  $\xi_s$ , ill.  $\eta_s$ -é

$$\mathbf{M}(\xi_s/K_s = x) = x \cdot p_s \quad \text{ill.} \quad \mathbf{M}(\eta_s/K_s = x) = x \cdot q_s.$$

Ezzel

$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}(\xi_s \eta_s/K_s = x)\} = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) p_s \cdot q_s \cdot f_s(x)$$

$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}(\xi_s/K_s = x)\} = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p_s \cdot f_s(x)$$

$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}(\eta_s/K_s = x)\} = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot q_s \cdot f_s(x),$$

vagyis, a számításokat elvégezve

$$R = \sum_{s=d}^N [\sigma^2(K_s) - \mathbf{M}(K_s)] p_s q_s = \sum_{s=d}^N [\sigma^2(K_s) - \mathbf{M}(K_s)] \binom{N}{s-d} \binom{N}{s} \frac{1}{2^{2N}}$$

ahol  $p_s$ ,  $q_s$ -nek a fentebbi értékeit írtuk be.

Ha  $R = 0$ ,  $r_{\xi\eta}$  is 0. *Látjuk, hogy  $K_\nu$  minden olyan eloszlásánál, amelynek szórásnégyzete és várható értéke azonos,  $r_{\xi\eta} = 0$ .* Ilyen pl. a Poisson-eloszlás; hogy ekkor a korreláció 0, az már a fentebb tárgyalt függetlenségből is következik.

$r_{\xi\eta}$  általános kifejezéséhez kiszámítjuk még a szórásnégyzeteket. Az (I.)-nél levezetettek alapján  $\xi$  karakterisztikus függvénye

$$\varphi_\xi = \prod_{\nu=0}^N \sum_{x=0}^{\infty} \left[ 1 + \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^N} (e^{it} - 1) \right]^x \cdot f_{d+\nu}(x)$$

( $f_{d+\nu}(x)$  szerepel, mert amidőn  $A$  először van a deszka alatt,  $K_d$  golyó fut le),  $\eta$ -é pedig, értelemszerűen

$$\varphi_\eta = \prod_{\nu=0}^N \sum_{x=0}^{\infty} \left[ 1 + \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^N} (e^{it} - 1) \right]^x \cdot f_\nu(x).$$

Felhasználva a karakterisztikus függvény és a szórásnégyzet ismert összefüggését, kapjuk a számítások elvégzése után

$$r_{\xi\eta} = \frac{\sum_{\nu=d}^N [\sigma^2(K_\nu) - \mathbf{M}(K_\nu)] \binom{N}{\nu-d} \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^{2N}}}{\sqrt{\sum_{\nu=0}^N \left[ \mathbf{M}(K_{d+\nu}) \cdot \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^N} + [\sigma^2(K_{d+\nu}) - \mathbf{M}(K_{d+\nu})] \binom{N}{\nu}^2 \frac{1}{2^{2N}} \right]}} \quad \times$$

$$\times \frac{1}{\left| \sum_{\nu=0}^N \left[ M(K_{\nu}) \cdot \binom{N}{\nu} \frac{1}{2^N} + [\sigma^2(K_{\nu}) - M(K_{\nu})] + \binom{N}{\nu}^2 \frac{1}{2^{2N}} \right] \right|}.$$

Vizsgáljuk most speciálisan azt az esetet, amikor minden  $K_{\nu}$  ugyanolyan eloszlású, ekkor

$$\sigma^2(K_{d+\nu}) - M(K_{d+\nu}) = \sigma^2(K_{\nu}) - M(K_{\nu}) = S$$

( $S$  konstans és független  $\nu$ -től);

$$M(K_{d+\nu}) = M(K_{\nu}) = M$$

( $M$  konstans, független  $\nu$ -től) és

$$r_{\xi\eta} = \frac{S \cdot \frac{1}{2^{2N}} \binom{2N}{N-d}}{M + S \cdot \frac{1}{2^{2N}} \binom{2N}{N}}.$$

Ennek aszimptotikus kifejezése

$$r_{\xi\eta} \approx \frac{S}{M} \cdot \frac{e^{-\frac{2d^2}{N}}}{\sqrt{\pi \cdot N}}.$$

Ha  $K_{\nu}$  pl. a  $K =$  konstans értéket 1 valószínűséggel veszi fel.

$$\frac{S}{M} = -1.$$

Ilyen módon például  $N = 20$  mellett  $d = 5$  esetében a korrelációs együttható már  $\frac{1}{100}$ -nál,  $d = 7$  esetében  $\frac{1}{1000}$ -nál kisebb.

Ezzel megadtuk a korrelációs együttható viselkedését.

Befejezésül néhány szót a Galton-deszka módosításáról. Van olyan megoldás, melyben golyók helyett folyadék vagy homok szerepel [7]. Mindezeknek azonban fő hátránya, hogy az utolsó éksorok ékeinek kis elferdülései, kopásai — a balra, ill. jobbra való eltérítés valószínűségének változásai — rendkívül zavarják működésüket. Ezért — főként a diffúzió differenciálegyenletének ilyenfajta »gépi« megoldására és a véletlen számok megállapítására gondolva — kidolgoztuk a Galton-deszka olyan módosítását, amelyik az említett hibáktól eleve mentes és ahol az események függetlensége sem kérdéses. Elve:

A szckásos Galton-deszkán egy golyó  $N$  éksoron fut le és eljut a  $\nu$  ( $0 \leq \nu \leq N$ ) tartályhoz. Ez ekvivalens ezzel: *Egyetlen* éken  $N$  golyó fut le és köztük  $\nu$  tért pl. jobbra. Ha az  $N$  golyó lefutása közben a  $\nu$ -t valahogy gépi úton számoljuk és a végén egy tartálysorszerű regisztráló berendezés  $\nu$ -ik tartályában megjelenik egy golyó, ugyanazt értük el, mint a szokásos Galton-deszkánál. Mivel pedig a golyók mind ugyanazon éken futnak le, a valószínűség *mindig* ugyanaz; a készülék mintegy »reprodukálja« az egyetlen éket.

A regisztrálást úgy terveztük, hogy a lefutó golyó egy  $K_1$  elektromos kontaktust kapcsol, a jobbra futó külön  $K_2$  kontaktust. Amíg  $K_1$   $N$ -szer kapcsol,  $K_2$   $\nu$ -ször. Reléssel, stb. elérhető, hogy  $K_1$   $N$ -ik kapcsolása után a regisztráló tartálysor  $\nu$ -ik tartályában egy golyó megjelenik. Ezután újból kezdődik a játék; a lassúbb folyamatot a pontosság ellensúlyozza. Lehetségesnek látszik emellett teljesen elektronikus megoldás is.

## IRODALOM

1. Rényi Alfréd: Új eredmények a valószínűségszámítás terén. MTA. Mat. és Fiz. Osztályközl. II. 1. 1952. 125. o.
2. L. pl. П. Боев: Теория вероятностей. Москва. 1950. 289. o.
3. L. pl. B. V. Gnëgyenko — A. N. Kolmogorov: Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai. Budapest, 1951. 52. old.
4. L. pl. Szász: A differenciál és integrálszámítás elemei, Budapest, 1951. I. 549. o.
5. L. pl. Feller: Probability theory. New York, 1951. 221. o. és Б. В. Гнеденко: Курс теории вероятностей. Москва. 1950. 189. o.
6. L. pl. a 3. alatti mű 36. old. 5. tétel.
7. L. E. Weber: Grundriss der biologischen Statistik, Jena, 1948. 110. o.

## О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ, СВЯЗАННЫХ С ПРИБОРОМ ГАЛЬТОНА

П. МЕДЬЕШИ

### Резюме

Автор познакомит с прибором Гальтона Института Прикладной Математики и с некоторыми его приложениями. Затем описывает два эксперимента с прибором Гальтона, при которых шары скатываются в разных положениях ряда резервуаров. При одной исследуется распределение числа шаров, впавших в некоторый избранный резервуар, при другой — зависимость чисел шаров, попавших в две разные резервуары. Сдаются условия возникновения распределения Пуассона в первом, и независимости в другом случае. В окончании автор очерчивает модификацию прибора Гальтона.

## SUR QUELQUES PROBLEMES EN RELATION AVEC LA PLANCHE DE GALTON

P. MEDGYESSY

### Résumé

L'auteur décrit la planche de Galton de l'Institut de Mathématique Appliquée et quelques applications de cette planche. Ensuite il décrit deux expériences effectuées avec la planche de Galton. Dans l'une de ces expériences il examine le nombre des boules arrivants dans une cellule donnée, tandis que dans l'autre expérience il examine la dépendance mutuelle des nombres de boules arrivants dans deux cellules différentes. Dans le premier cas il indique les conditions, dans lesquelles résulte une distribution de Poisson, et dans le deuxième cas les conditions d'indépendance. Pour terminer il esquisse une modification de la planche de Galton.

# A MATEMATIKAI STATISZTIKA ORVOSI-BIOLÓGIAI ALKALMAZÁSÁNAK NÉHÁNY PROBLÉMÁJÁRÓL

JUVANCZ IRÉNEUSZ és LIPTÁK TAMÁS

## ÖSSZEFOGLALÁS

A közlemény első része az alkalmazások elvi kérdéseivel foglalkozik. Az orvosi-biológiai kutatás természetéből adódó speciális problémákat két súlyponti kérdés körül csoportosítja. Az egyik problémakör a szignifikancia-vizsgálathoz, mégpedig magának a szignifikanciának helyes értelmezéséhez kapcsolódik, a másik problémakör pedig az orvosi-biológiai kutatásban gyakran szükségszerűen *kiselemszámú* mintavételből ered. Az első kérdéscsoportra vonatkozó vizsgálatok befejezetlensége miatt a cikk csupán a probléma felvetésével és jelentőségével foglalkozik. A másik kérdéscsoportot illetőleg kismintákra is kidolgozott eloszlásmentes statisztikai módszerek bevezetését javasolja, azaz olyan módszerek alkalmazását, melyek a vizsgált statisztikai sokaságra vonatkozó csaknem minden előzetes feltevéstől függetlenek.

A dolgozat második része a fent említett javaslatához kapcsolódva ismerteti a rendstatisztika (más kifejezéssel: variációs sorok elmélete) főbb tételeit s közli a legújabb ezirányú szovjet eredményeket is. Ezek felhasználásával a közlemény harmadik része kismintákra is használható eloszlásmentes módszereket dolgoz ki szignifikancia-vizsgálathoz. Végül ezen új módszerek gyakorlati alkalmazását néhány orvosi vonatkozású példán illusztrálja és megadja a számításokhoz szükséges táblázatokat, melyeket az Alkalmazott Matematikai Intézet Orvosi Matematikai Statisztikai Csoportja dolgozott ki.

A közlemény az orvosi-biológiai alkalmazásokból indul ki, de az itt tárgyalt elvi kérdések közül több általánosabb jellegű, a rendstatisztikán alapuló eloszlásmentes statisztikai eljárások pedig az alkalmazások széles területén érdeklődésre és felhasználásra tarthatnak számot.

### 1.

#### *Elvi kérdések*

Mint az AMI orvos-statisztikai csoportja, egy éve foglalkozunk rendszeresen orvosi és biológiai kísérletek és megfigyelések eredményeinek értékelésével és több esetben már ezek tervezésében is résztvettünk, továbbá orvosi szaklapok matematikai-statisztikai vonatkozású cikkeit lektoráltuk. Munkánk során közeli kapcsolatba kerültünk az orvosi-biológiai kutatásokkal, a hozzánk forduló orvosokkal és kutatókkal történt rendszeres megbeszéléseink alkalmával egyre jobban megismertük a matematikai statisztika alkalmazásának itt felmerülő speciális problémáit és körülményeit. Közleményünk keretében munkánk során leszűrt tapasztalataink közül a legfontosabbakat szeretnénk ismertetni és egyes kérdésekre konkrét megoldást adni. Bár sok kérdésre vonatkozólag csak a megoldás irányát tudjuk vázolni, úgy gondoljuk, már a



problémák felismerése, pontos körvonalazása és ismertetése is fontos lépés azok megoldása felé.

Mindenekelőtt szeretnénk vázolni azt, miért van szükség az orvosi-biológiai kutatás terén *matematikai statisztika alkalmazására*. Ugyanis éppen azok az okok, melyek az alkalmazást szükségessé teszik, más tényezőkkel egybefonódva egyben meg is nehezítik azt.

Matematikai statisztika (és általában valószínűségszámítás) alkalmazására abban az esetben van szükség, ha valamely természeti jelenség törvényeinek, lefolyásának, kimenetelének vizsgálatakor valamilyen okból nem vehetjük számításba a jelenséget egyértelműen meghatározó tényezők teljes összességét. Ez bekövetkezhet ismereteink hiányossága miatt, vagy például azért, mert az összes ható tényezők figyelembevétele túlságosan bonyolulttá, megengedhetetlenül hosszadalmassá tenné a vizsgálatot. Ez utóbbi eset áll elő például akkor, ha játékkockával dobunk: a kocka összes lényeges fizikai adatainak, a feldobás módjának és bizonyára egész sor egyéb tényezőnek ismeretében nyilvánvalóan pontosan előre megmondhatnánk, hogy adott kiinduló helyzetből a kocka melyik lapjára fog esni: de nyilvánvaló, hogy ez gyakorlatilag kivihetetlen. Ha azonban ilyenkor a szóbanforgó jelenség nem egyszeri, individuális előfordulása, hanem azonos körülmények között elvben tetszőlegesen sokszor megismételhető, bizonyos tapasztalati tények és szimmetriák figyelembevételével a szóbanforgó jelenségre vonatkozólag mégis objektív törvényszerűségeket állapíthatunk meg: ezek segítségével újabb és újabb tényezők hatását vehetjük figyelembe. Az ilyen típusú, ú. n. *véletlen tömegjelenségek* vizsgálatával foglalkozik a valószínűségszámítás. Ennek egyik fejezete a matematikai statisztika, amely az általában ismeretlen eloszlású statisztikai sokaságokból vett minták segítségével igyekszik becsléseket, információkat nyerni a statisztikai sokaságról. A matematikai statisztika másik s az orvosi gyakorlatban leginkább előforduló feladata annak megítélése, hogy egy bizonyos tényező hatással van-e a vizsgált jelenségre. Erre szolgál az ú. n. szignifikancia-vizsgálat. A kísérletező azt kérdezi, van-e hatása egy bizonyos tényezőnek a vizsgált jelenségre. Ebből a célból két kísérletet végez. Az első kísérlet során a szóbanforgó tényező hatását a vizsgált jelenségre minél kisebbre igyekszik csökkenteni, a másodikban pedig éppen fordítva, ezt a hatást fokozza. A két kísérlet eredményeként nyert megfigyelések két *mintát* alkotnak (»kontroll« és »kezelt« egyedekből álló minták). A két minta alapján kell ítéletet mondanunk arról, van-e lényeges hatása a szóbanforgó tényezőnek a vizsgált jelenségre? A matematikus a következő gondolatmenet alapján mond ítéletet: »Először felteszem, hogy a beavatkozás hatástalan volt, azaz a kísérletező által adott két minta ugyanabból a statisztikai sokaságból származik (»null-hipotézis«). Alkalmas módon definiálok valamilyen »távolság«-ot két minta között (ilyen például  $\chi^2$ ,  $t$  stb.). Meghatározom e »távolság« valószínűség-eloszlását arra az esetre, ha két minta egymástól függetlenül ugyanabból a statisztikai sokaságból származik. Ennek birtokában kiszámítom annak valószínűségét, hogy egyazon sokaságból egymástól függetlenül kivett két minta így definiált »távolság«-a nagyobb vagy egyenlő legyen a két megadott mintán ténylegesen észlelt »távolság«-nál. Ha ez a valószínűség a probléma természetétől függő *szintnél* kisebb, úgy a két minta által reprezentált sokaságok közti eltérést *szignifikánsnak* ítélem.

A kísérletező azonban gyakran félreérti a »szignifikáns eltérés«-t kimondó véleményyt. A »szignifikáns eltérés« ítéletéből, azaz a null-hipotézis elvetéséből

azt a következtetést vonja le, hogy a két sokaság jelentősen eltér egymástól, azaz »távolság«-uk meghaladja a gyakorlati vagy elméleti szempontból már lényegesnek tekinthető minimális fokot. Azonban a matematikai szignifikancia — azaz a null-hipotézis elvetése — csak azt jelenti, hogy az adott szigorúsági szint mellett, adott határozottsággal állíthatjuk, hogy a két sokaság nem azonos.

Feladatunk tehát null-hipotézis helyett olyan statisztikai hipotézis alkalmazása, mely jobban illeszkedik a gyakorlat által felvetett kérdésekhez, melynek segítségével meg tudjuk ítélni, hogy az észlelt eltérés *szignifikánsan* meghaladja-e azt a legkisebb eltérést, melyet már szakmailag — esetünkben tehát orvosi-biológiai szempontból is — *jelentősnek* tekintünk. Ezen a téren végzett vizsgálatainkat még nem fejeztük be, de járható utat találtunk a probléma megoldására.

A statisztikai ítélet fenti általános logikai problémája mellett foglalkoznunk kell a matematikai statisztika orvosi-biológiai alkalmazhatóságának, illetve helyes alkalmazásának speciális kérdéseivel is.

A matematikai statisztika alkalmazását orvosi-biológiai kutatásokra megnehezíti elsősorban az, hogy ezen a területen a megfigyelések és kísérletek tervezésében és berendezésében a »*ceteris paribus*« elvét általában nem könnyű, néha szinte lehetetlen megvalósítani. Az élő szervezet működésének bonyolultsága miatt ugyanis a vizsgálni kívánt jelenséget gyakran nem sikerül eléggé kiemelni a többi közül és így szándékunk ellenére, néha egyenesen tudtunk nélkül olyan tényezők befolyása is érvényesülhet, melyeknek azonos vagy ellentétes irányú hatása megzavarja: meghamisítja vagy elfedi a kísérlet, megfigyelés eredményeit. Tüdőgyulladás lefolyását például nem csak a vizsgált gyógyszer hatásossága határozza meg, hanem a betegség előrehaladott volta, a beteg általános állapota, kora stb. Ez a körülmény növeli a vizsgált anyag diszperzióját, megnehezíti, határozatlanabbá teszi a statisztikai értékelést.

További nehézséget jelent az a tény, hogy az orvosi-biológiai mérések igen pontatlanok: 10% mérési hiba nem számít szokatlanul nagyinak és kivételesen jónak kell elfogadnunk az 1—2%-os hibával dolgozó mérési eljárásokat.

Az említett nehézségeket a kísérletek és megfigyelések helyes tervezése mellett bizonyos mértékben azzal is ellensúlyozhatnánk, hogy a megfigyelések számát növelnénk, nagy-elemszámú mintákkal dolgoznánk. Ez igen előnyös lenne egyéb szempontból is: a klasszikus matematikai statisztikának ugyanis csaknem minden módszere nagy-elemszámú mintavételre van kidolgozva, hiszen a felhasznált tételek rendszerint határeloszlásokra vonatkoznak (például:  $\chi^2$ ). A nyugati irodalomban és tudományos gyakorlatban divatos és kis-elemszámú mintákkal is dolgozó eljárások mind ú. n. *paraméteres módszerek*. Paraméteresnek nevezünk egy statisztikai eljárást akkor, ha az a vizsgált statisztikai sokaság eloszlástípusának előzetes ismeretét feltételezi s csupán az ismeretlen paraméterek becslésével vagy más hasonló, az eloszlástípus segítségével jól megközelíthető kérdéssel foglalkozik. Például a szignifikancia-vizsgálatnál gyakran alkalmazott Student-féle *t*-eljárás (»szignifikáns differenciák«) és a biológiai gyakorlatban különösen sűrűn alkalmazott varianciaanalízis (»szórás-elemzés«, »Fisher-féle *z*-próba«) arra az előzetes feltevésre épülnek, hogy a vizsgált sokaságok normális (Gauss-féle) eloszlásúak. Fenti módszerek alkalmazása előtt tehát kellő lelkiismeretességgel meg kell győződ-nünk arról, hogy indokolt-e ez a feltevés, megnyugtató módon alátámasztják-e

elméleti meggondolások és tapasztalatok. Ennek a feltétlenül szükséges ellenőrzésnek elmulasztása az elmélet és gyakorlat elszakadására, formalizmusra, helytelen következtetésekre vezethet. Éppen ebből a szempontból tartjuk jellemzőnek azt a tényt, hogy a nyugati statisztikai iskola kutatói elhanyagolják az a priori feltevések ellenőrzésének kérdését, a tudományos gyakorlatban pedig a fentemlített paraméteres módszereket az alapfeltevés ellenőrzése nélkül jóformán bármilyen statisztikai sokaság vizsgálatára alkalmazzák. A normális eloszlásra kidolgozott paraméteres módszereket kritikátlanul alkalmazó kutatók legfeljebb arra hivatkoznak, hogy »a centrális határeloszlástétel következményeként a valóságban előforduló folytonos eloszlások majdnem mind normális eloszlások«. Az idézett centrális határeloszlás-tétel azonban — szemléletesen kifejezve — csak azt mondja ki, hogy ha valamely mennyiség értékét igen nagyszámú véletlentől függő tényező határozza meg, melyek egymástól függetlenek és egymagában mindegyikük hatása igen kicsiny, hatásaik pedig összeadódnak, úgy e véletlentől függő mennyiség közelítőleg normális eloszlású. De a természetben előforduló esetekben ezek a hatások nem szükségképpen additív természetűek, hiszen például gyógyszerek hatásmechanizmusával kapcsolatban is beszélünk »hatványozódó« hatásokról. Így nem is csodálkozhatunk azon, hogy a biológiai és orvosi kutatás terén sűrűn fordulnak elő nem-normális eloszlású folytonos statisztikai sokaságok. Orvosi-biológiai alkalmazások területén tehát különösen el kell ítélnünk a paraméteres módszerek kritikátlan, formalista használatát. Meg kell jegyeznünk, hogy ezek használata még abban az esetben is nehézségekbe ütközhet, ha ismerjük a vizsgált sokaság eloszlástípusát, de ez nem egyezik a megfelelő paraméteres módszer alkalmazásához szükséges eloszlástípussal. Elég nagy-elemszámú minta esetén természetesen kellő biztonsággal megbecsülhetjük azon konstans paramétereket, melyek segítségével a sokaságot a megfelelő típusba transzformálhatjuk s ezekre az átszámított adatokra már alkalmazhatjuk a paraméteres eljárást; kis-minták esetén azonban erre nincs lehetőség.

Fejtegetéseinkből tehát az következik, hogy az orvosi-biológiai kutatás vonalán fokozott jelentősége van a nagy-elemszámú mintavételnek. Csökkenteni a diszperziót, kiegyensúlyozza a mérési hibákat, lehetővé teszi a határeloszlástételek és (esetleges transzformációk végrehajtása után) a különben igen értékes paraméteres módszerek alkalmazását. Ugyanakkor, mikor hangsúlyozzuk a nagy-elemszámú mintavétel előnyeit, a kísérletezőnek is igazat kell adnunk abban, hogy az orvosi-biológiai kutatások terén a nagy-elemszámú mintavételnek, azaz nagyszámú megfigyelés végrehajtásának gyakorlati, olykor elvi akadályai lehetnek. Így egyes kísérleteket technikai okokból nem lehet megismételni, ritka betegség megfigyelésekor pedig néha kénytelenek vagyunk 5—6 esetre szorítkozni. Ha a megfigyelés »tárgya« az ember, nem is szabad »kísérleteznünk«; a behatás módját és a kontrollok kiválasztását úgy kell elvégeznünk, hogy mindkét csoportba jutó embereknek a lehető legtöbbet használjunk.

Egyik fő problémánk tehát az, hogy a nagy-elemszámú mintavétel minden előnye ellenére általában mégis kis-elemszámú mintákkal vagyunk kénytelenek dolgozni. Ezen a téren két utat látunk a megoldásra. Az első lehetőség annak vizsgálata, hogy a standard klasszikus eloszlásokra (főleg a normális eloszlásra) kidolgozott paraméteres eljárások milyen *enyhébb feltételek* mellett és milyen *közelítéssel* alkalmazhatók ezeket többé-kevésbé jól megközelítő eloszlású sokaságok vizsgálatára. Megjegyezzük, hogy ezen a téren már történtek kez-

deményező lépések a nyugati irodalomban is; de gyakorlatilag hatás nélkül. A másik út olyan módszerek kidolgozása és alkalmazása, melyek *függetlenek a vizsgált sokaság eloszlástípusától*, legfeljebb egészen enyhe feltételek teljesülését, például folytonos eloszlást követelnek meg a sokaságtól. Az ú. n. rendstatisztika (variációs sorok elmélete) kifejlesztésével ezen a téren főleg a szovjet valószínűségszámítási és matematikai-statisztikai iskolának vannak komoly eredményei. Közleményünk most következő második részében összefoglaljuk a rendstatisztikának az alkalmazások szempontjából legfontosabb tételeit, a harmadik részben pedig kis-elemszámú mintavétellel dolgozó szignifikancia-vizsgálatra használható eloszlásmentes módszereket közlünk, melyek a rendstatisztika legújabb szovjet eredményein alapulnak.

## 2.

### *A rendstatisztika néhány alapvető tétele*

Adott  $n$  számú  $x_1, x_2, \dots, x_n$  valós számok közül a legkisebbet jelölje  $R_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  [ $= \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ], a nagyság szerint másodikat  $R_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ..., végül pedig a legnagyobbikat  $R_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  [ $= \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ]. Ekkor tetszőleges  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  valószínűségi változókhoz hozzárendelhetjük ezek »rendezett sorozatát« a következő relációkkal:

$$\begin{aligned} \xi_1^* &= R_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ \xi_2^* &= R_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_n^* &= R_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n). \end{aligned} \quad (1)$$

A  $\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*$  valószínűségi változók ú. n. »variációs sor«-t alkotnak. A rendstatisztika ezen variációs sorokkal foglalkozik.

Szorítkozzunk most arra az esetre, mikor a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  valószínűségi változók egyazon folytonos  $F(x)$  eloszlásfüggvénnyel rendelkeznek. Minthogy folytonos eloszlású statisztikai sokaságból vett minta egyes elemei éppen ilyen valószínűségi változók, ezért a továbbiakban a megfelelő matematikai-statisztikai terminológiát használjuk.

A rendstatisztika alábbi tételei két csoportba oszthatók. Az első típusú, ú. n. »egy-mintás« tételekben egy folytonos eloszlású statisztikai sokaságból vett mintának és a sokaság elméleti eloszlásfüggvényének bizonyos »távolság«-ait értelmezzük a minta empirikus eloszlásfüggvényének segítségével és meghatározzuk a nyert valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit, illetve ezek határértékét arra az esetre, amikor a minta elemszáma minden határon túl nő. A második-típusú, ú. n. »két-mintás« tételek két minta empirikus eloszlásfüggvényeinek hasonlóan definiált távolságaira vonatkozó eloszlásokat és határeloszlásokat adják meg.

Először is definiáljuk az *empirikus eloszlásfüggvény* fogalmát. Egy  $n$ -elemű minta empirikus eloszlásfüggvénye:

$$S_n(x) = \frac{k_n(x)}{n}, \quad (2)$$



ahol  $k_n(x)$  a minta azon elemeinek számát jelenti, melyek kisebbek, mint  $x$ . Másszóval, ha a mintavételi változók variációs sora :

$$(3) \quad \xi_1^* \equiv \xi_2^* \equiv \dots \equiv \xi_n^*,$$

akkor

$$(4) \quad S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq \xi_1^* \\ \frac{1}{n}, & \text{ha } \xi_1^* < x \leq \xi_2^* \\ \frac{2}{n}, & \text{ha } \xi_2^* < x \leq \xi_3^* \\ \dots & \dots \\ \frac{\nu}{n}, & \text{ha } \xi_\nu^* < x \leq \xi_{\nu+1}^* \\ \dots & \dots \\ \frac{n-1}{n}, & \text{ha } \xi_{n-1}^* < x \leq \xi_n^* \\ 1, & \text{ha } \xi_n^* < x. \end{cases}$$

A minta empirikus eloszlásfüggvénye tehát a minta  $x$ -nél kisebb elemeinek viszonylagos gyakori ága, mint  $x$  függvénye. Grafikonja egy lépcső-vonal, mely a minta két szomszédos eleme között az  $x$ -tengellyel párhuzamos egyenes szakasz, a minta egyes elemeinek megfelelő helyen pedig szakadáspontja van,

ahol a görbe » $\frac{1}{n}$ -nel feljebb folytatódik«. Az ugráspontokban az alsó egyenes szakasz jobb végpontja a görbepont. A mintavétel során természetesen a minta elemei valószínűségi változók, a minta empirikus eloszlásfüggvényének értéke tehát minden rögzített  $x$  helyen valószínűségi változó.

Rátérünk a tételek ismertetésére.

### Egymintás tételek

Egy folytonos  $F(x)$  eloszlásfüggvényű statisztikai sokaságból  $n$ -elemű mintát veszünk, ennek empirikus eloszlásfüggvényét  $S_n(x)$ -szel jelöljük. Defináljuk a  $D_n^+$ ,  $D_n^-$ ,  $D_n$ ,  $Q'_n(a)$ , és  $Q''_n(a,b)$  valószínűségi változókat a következőképpen :

$$(5) \quad D_n^+ = \sup_{-\infty < x < +\infty} (S_n(x) - F(x))$$

$$(6) \quad D_n^- = \sup_{-\infty < x < +\infty} (F(x) - S_n(x))$$

$$(7) \quad D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |S_n(x) - F(x)| = \max(D_n^+, D_n^-)$$

$$(8) \quad Q'_n(a) = \sup_{a \leq F(x)} \left( \frac{S_n(x)}{F(x)} - 1 \right)$$

$$(9) \quad Q''_n(a,b) = \sup_{a \leq F(x) \leq b} \left( \frac{S_n(x)}{F(x)} - 1 \right),$$

ahol  $0 < a < b < 1$  tetszőleges rögzített értékek. [A (8) és (9) definíciókkal

kapcsolatban megjegyezzük, hogy a  $\sup_{-\infty < x < +\infty} \left( \frac{S_n(x)}{P(x)} - 1 \right)$  változó pozitív valószínűséggel felvehet egy tetszőleges nagy fix értéknél nagyobb értékeket.]

A) *GLIVENKO tétele (a statisztika alaptétele)* [8]

$$(10) \quad \mathbf{V} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0 \right\} = 1.$$

Ez a tétel tehát azt mondja ki, hogy a minta empirikus eloszlásfüggvénye 1 valószínűséggel egyenletesen konvergál az elméleti eloszlásfüggvényhez. Mintavétel útján tehát kimerítő képet szerezhethünk a vizsgált statisztikai sokaságról: ebben az értelemben valóban a statisztika alaptételének nevezhetjük.

B) *KOLMOGOROV tételei* [16]: tetszőleges valós  $z$ -re:

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V} \{ \sqrt{n} D_n^+ < z \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V} \{ \sqrt{n} D_n^- < z \} = \\ = K^*(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z \leq 0 \\ 1 - e^{-2z^2}, & \text{ha } z > 0. \end{cases}$$

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V} \{ \sqrt{n} D_n < z \} = K(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z \leq 0 \\ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu e^{-2\nu^2 z^2}, & \text{ha } z > 0. \end{cases}$$

C) *SZMIRNOV tétele* [29]: tetszőleges valós  $x, y$  esetén:

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V} \{ \sqrt{n} D_n^- < x; \sqrt{n} D_n^+ < y \} = S(x, y),$$

ahol  $S(x, y)$  az alábbi függvény:

$$(14) \quad S(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \min(x, y) \leq 0 \\ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-2\nu^2(x+y)^2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} (e^{-2(\nu x + \nu-1)y^2} + e^{-2(\nu-1)x + \nu y^2}), & \text{ha } \min(x, y) > 0 \end{cases}$$

D) *RÉNYI tételei\**:

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V} \{ \sqrt{n} Q'_n(a) < z \} = H_1(z; a) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z \leq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z \sqrt{\frac{a}{1-a}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, & \text{ha } z > 0 \end{cases}$$

\* A szerző ezirányú dolgozatai sajtó alatt vannak.

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V} \left\{ \sqrt{n} Q_n''(a, b) < z \right\} = H_2(z; a, b) = \\ = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{b}{1-b}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{b}{1-b} \cdot \frac{x^2}{2}} \left( \int_0^{\frac{(z-x)\sqrt{\frac{ab}{b-a}}}{\sqrt{\frac{b}{1-b}}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) dx; \quad (-\infty < z < +\infty).$$

### Kétmintás tételek

Egy folytonos eloszlásfüggvényű statisztikai sokaságból egymástól függetlenül két mintát veszünk, az egyik  $m$ -elemű, a másik  $n$ -elemű minta. Empirikus eloszlásfüggvényeiket rendre  $S_m(x)$ -szel ill.  $T_n(x)$ -szel jelöljük. Az (5), (6) és (7) egyenletek analógiájára definiáljuk a  $D_{m,n}$ ,  $D_{m,n}^-$  és  $D_{m,n}^+$  valószínűségi változókat:

$$(17) \quad D_{m,n}^+ = \sup_{-\infty < x < +\infty} (S_m(x) - T_n(x))$$

$$(18) \quad D_{m,n}^- = \sup_{-\infty < x < +\infty} (T_n(x) - S_m(x))$$

$$(19) \quad D_{m,n} = \sup_{-\infty < x < +\infty} |S_m(x) - T_n(x)| = \max(D_{m,n}^+, D_{m,n}^-).$$

Definiáljuk továbbá a  $C_{m,n}$  valószínűségi változót a következőképpen: jelentse a  $C_{m,n}$  az első,  $S_m(x)$  empirikus eloszlásfüggvényű minta elemei közül azon  $\xi_k^*$  elemek számát, melyekre fennáll:

$$(20) \quad S_m(\xi_k^*) \geq T_n(\xi_k^*).$$

E) SZMIRNOV tételei [29]: tetszőleges valós  $x, y$  és  $z$  számok esetén  $m$  és  $n$  tartsanak a végtelenhez úgy, hogy közben  $\frac{m}{n} = \text{konstans}$  legyen; ekkor

$$(21) \quad \lim \mathbf{V} \left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n}^+ < z \right\} = \lim \mathbf{V} \left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n}^- < z \right\} = K^*(z)$$

$$(22) \quad \lim \mathbf{V} \left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} < z \right\} = K(z)$$

$$(23) \quad \lim \mathbf{V} \left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n}^- < x; \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n}^+ < y \right\} = S(x, y),$$

ahol  $K^*(z)$ ,  $K(z)$  és  $S(x, y)$  a (11), (12) és (13) relációkban szereplő függvények.

A következő tételek ugyanezen valószínűségi változók határeloszlása helyett azok pontos eloszlását adják meg az  $m = n$  esetben.

F) GNYEGYENKO és KOROLJUK tételei [10]: tetszőleges valós  $z$  esetén  
a  $\gamma = [nz]$  jelöléssel

$$(24) \quad V\{D_{n,n}^+ < z\} = V\{D_{n,n}^- < z\} = \begin{cases} 0, & \text{ha } z \leq 0 \\ 1 - \frac{\binom{2n}{n-\gamma}}{\binom{2n}{n}}, & \text{ha } z > 0. \end{cases}$$

$$(25) \quad V\{D_{n,n} < z\} = \begin{cases} 0, & \text{ha } z \leq 0 \\ \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{\nu=-[n/\gamma]}^{[n/\gamma]} (-1)^\nu \binom{2n}{n-\nu\gamma}, & \text{ha } z > 0. \end{cases}$$

Itt és a továbbiak során is a következő jelöléseket használjuk:

1. tetszőleges valós  $t$  szám esetén  $[t]$  jelentse  $t$  »egész részét«, azaz azon legnagyobb egész számot, mely  $t$ -nél még nem nagyobb;

2. tetszőleges valós  $t$  és tetszőleges egész  $k$  esetén  $\binom{t}{k}$  (másik szokásos jelölése:  $C_n^k$ ) jelentse a következőt:

$$(26) \quad \binom{t}{k} = \begin{cases} 0, & \text{ha } k < 0 \\ 1, & \text{ha } k = 0 \\ \frac{t(t-1)\dots(t-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}, & \text{ha } 0 < k \leq t. \\ 0, & \text{ha } k > t \end{cases}$$

G) GNYEGYENKO és RVACSEVA tételei [11]: tetszőleges valós  $x$  és  $y$  esetén

$$(27) \quad V\{D_{n,n}^- < x; D_{n,n}^+ < y\} = \Psi_n(x, y),$$

ahol  $\alpha = [nx]$ ,  $\beta = [ny]$  és

$$(28) \quad \Psi_n(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \max(x, y) \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \text{ha } \min(x, y) > 1 - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\binom{2n}{n}} \left| \sum_{\nu=-[\frac{n}{\alpha+\beta}]}^{[\frac{n}{\alpha+\beta}]} \binom{2n}{n-\nu(\alpha+\beta)} - \sum_{\nu=1}^{[\frac{n+\alpha}{\alpha+\beta}]} \binom{2n}{n+\alpha-\nu(\alpha+\beta)} - \sum_{\nu=1}^{[\frac{n+\beta}{\alpha+\beta}]} \binom{2n}{n+\beta-\nu(\alpha+\beta)} \right| \end{cases}$$

egyébként.



H) GNYEGYENKO és MIHALEVICS tétele [13], [14]:

$$(29) \quad V\{C_{n,n} = k\} = \frac{1}{n+1}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n:$$

tehát  $C_{n,n}$  összes lehetséges értékei egyenlő valószínűségűek. Mihalovics később [23] cikkében bebizonyítja ugyanezt az összefüggést  $C_{n,n}$  helyett általában a  $C_{n,np}$  változóra is, ahol  $p$  egész szám.

A bizonyításokkal itt nem foglalkozhatunk. Természetesen nem célunk ennek a közleménynek kereteiben a rendstatisztika összes tételeit ismertetni még felsorolás formájában sem. Megemlítjük, hogy a variációs sorok elméletének kialakítását *V. I. Glivenko* [8], *A. N. Kolmogorov* [16], *N. V. Szmirnov* [27], [28], [29], [30], *H. Cramér* [3] és *R. Mises* [24] alapvető munkáitól számíthatjuk. Azóta ezen a téren a szovjet kutatók közül *G. M. Manyia* [18], *I. D. Kvit* [17], *M. U. Pajvin* [25], *B. V. Gnyegyenko* [9], [10], [11], [12], [13], [14], *V. Sz. Koroljuk* [10], *E. L. Rv cseva* [11] és *V. Sz. Mihalevics* [13], [14], [23] érték el lényeges eredményeket. Hazánkban *Rényi Alfréd* járult hozzá a variációs sorok modern elméletének kiépítéséhez\*, amennyiben azt bizonyos mértékben a független valószínűségi változók összegeire vonatkozó elméletre vezette vissza, továbbá meghatározta a (8) és (9) változók és még más hasonló változók határeloszlásait. *H. Cramér* és *R. Mises* idézett munkái után a nyugati statisztikai irodalomban hosszú ideig csak *A. Wald* és *J. Wolfowitz* bonyolult formalizmussal dolgozó cikke képviselte az idevágó irodalmat. *W. Feller* 1948-ban megjelent és *Kolmogorov* tételeinek bizonyítását egyszerűsítő munkája után *J. L. Doob* [6] ezen tételekre vonatkozó heurisztikus bizonyítási eljárása, melyet *M. D. Donsker* [5] tett szabattossá, jelentettek lényegesen újat, majd *K. L. Chung* [2], *M. Kac* [15], *Anderson* és *Darling* [1] munkái fejlesztették tovább a variációs sorok elméletét. *F. J. Massey* [19], [20], [21], [22] négy cikkben foglalkozik *Kolmogorov* és *Szmirnov* említett tételeivel és azok alkalmazásához szükséges egyes numerikus táblázatok kidolgozásával járul hozzá az elméleti eredményekhez.

A mi szempontunkból lényeges, hogy *Gnyegyenko*, *Koroljuk*, *Rvacseva* és *Mihalevics* (24)–(29) alatt ismertetett tételei lehetővé teszik, hogy a variációs sorok elméletének alkalmazását kis-mintákkal dolgozó szignifikancia-vizsgálatra is kiterjesszük. Ezzel foglalkozunk közleményünk 3. részében.

3.

*Eloszlásmentes módszerek alkalmazása szignifikancia-vizsgálatra kis-elemszámú mintavételnél*

A rendstatisztiká előbb ismertetett tételei közül (10)–(23) határeloszlástételeket nagy-elemszámú mintavétel esetén alkalmazhatjuk. Erre vonatkozólag utalunk *Gnyegyenko* [9] könyvére, továbbá *Szentmártony Tibor* [26] munkájára, melyek foglalkoznak e tételek statisztikai alkalmazásával és *Szmirnov*nak az »Annals of Mathematical Statistics« c. folyóiratban is megjelent [30] közleménye nyomán megadják a  $K(z)$  függvény táblázatát is.

\* Ezirányú dolgozatai sajtó alatt vannak.

Mi csak az orvosi-biológiai alkalmazásokban leggyakrabban előforduló kis-elemszámú mintavétellel dolgozó szignifikancia-vizsgálatokra használjuk fel a rendstatisztika egyes tételeit, mégpedig a (25), (27) és (29) alatt szereplőket.

Mint már említettük, két-mintás szignifikancia-vizsgálatra szolgáló eljárást úgy nyerhetünk, hogy meghatározzuk egy olyan változó valószínűségi eloszlását, mely alkalmas módon jellemzi két, egyazon sokaságból vett, minta »egymástól való eltérését«, »távolságát«. Nyilvánvaló, hogy ilyen »távolságot« sokféleképpen értelmezhetünk, s ezek eloszlása általában függhet a szóbanforgó statisztikai sokaság eloszlástípusától, sőt a típuson belül a sokaság eloszlásfüggvényében szereplő paraméterek értékétől is. Észszerű tehát ezt a »távolságot« úgy definiálni, hogy annak eloszlása, de legalábbis határeloszlása minél kevésbé függjön a sokaság eloszlástípusától és jellemzőitől. Így a Pearson-féle  $\chi^2$ -változót ilyen »távolság«-ként használva, az eloszlás véges esetben polinomiális eloszlás, melynek paraméterei a sokaság eloszlásától, sőt az adatok csoportosításától is függnének, határértékben azonban ez a függés eltűnik. Minthogy a nagy-elemszámú mintákra gyakorlatilag elegendő közelítéssel a határeloszlást alkalmazhatjuk, ilyen esetekben a szóbanforgó »távolság« alkalmazásával nagy-elemszámú mintavételre eloszlásmentes módszert nyerünk. A már szóvátett okoknál fogva azonban a mi alkalmazási területünkön gyakran kis-elemszámú mintavételre vagyunk kénytelenek szorítkozni s így nem elégedhetünk meg a határértékekre szóló függetlenséggel. Közleményünk első részében kifejtett okok mind amellettszólnak, hogy igen előnyös lenne olyan »távolság«-definíciók megalkotása, melyek véges esetben sem függnének a sokaság eloszlásától.

Könnyű belátni, hogy abban az esetben, ha a sokaság eloszlásfüggvénye folytonos, a (17) — (18) — (19) egyenletekkel definiált valószínűségi változók mind rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal. Ezen változók mindegyikének értéke adott minták esetén csak attól függ, hogy a két minta elemeinek egyesítésével nyert és nagyság szerint rendezett sorozat tagjai milyen sorrend szerint tartoznak az egyik, illetve másik mintához. De nyilvánvaló, hogy azonos — és folytonos — eloszlású változók esetén minden ilyen sorrend egyenlő valószínűségű s így e definíciónak megfelelő »távolságok« eloszlása nem függ  $F(x)$ -től. Meg kell jegyeznünk, hogy éppen ez az észrevétel könnyíti meg a (10) — (29) tételek bizonyítását.

A »távolság« definíciója során két esetet kell megkülönböztetnünk. Az egyik esetben a kísérlet végrehajtása előtt a priori feltevésünk van arra vonatkozólag, hogy a behatás milyen irányban fogja befolyásolni a vizsgált jelenséget, tehát *azt kérdezzük, hogy a behatás szignifikánsan befolyásolta-e az adott irányban a vizsgált egyedeket*. Ilyen hipotézisnek megfelelő »távolság«-definíció tehát egyirányú, nem-szimmetrikus a két mintára vonatkozólag. A másik esetben ilyen előzetes feltevésünk nincs, s így csupán *azt vizsgáljuk, okozott-e valamilyen irányú szignifikáns eltérést a behatás*. Ilyenkor a »távolság«-nak szimmetrikusnak kell lennie. Nyilvánvaló, hogy ha az első esetben a kísérleti eredmények valóban igazolják a hatás irányára vonatkozó előzetes feltevésünket, egyirányú módszer használatával sokkal határozottabb statisztikai ítéletet mondhatunk, mint szimmetrikus módszer segítségével. Természetesen hangsúlyoznunk kell, hogy egyirányú módszerek használata csak akkor jogosult, ha valóban előzetes feltevésre alapul, utólagos használatuk meghamisítja a statisztikai ítéletet.

Gyakorlatilag az esetek többségében a behatástól azt várjuk, hogy a statisztikai sokaságot valamilyen irányban »eltolja«, azaz csak a sokaság várható értékét változtatja meg, az eloszlás egyéb jellemzőit nem befolyásolja lényegesen. Így azon »távolság«-oknak van különösen lényeges szerepük, melyek bizonyos mértékben jellemzik, mérik az ilyen típusú tranzlációkat.

a) »*C*«-kritérium. Foglalkozzunk mindenekelőtt a (29) alatti tétel alkalmazásával, mely *Gnyegyenkotól* és *Mihalevicstől* származik. Azonos elemszámú minták esetén előzetes tájékozódásra használhatjuk abban az esetben, ha a priori feltevésünknek megfelelően a behatás adott irányban »eltolta« a vizsgált sokaságot és a »lemaradó« minta empirikus eloszlásfüggvénye teljesen a másik felett fekszik, legfeljebb közös pontja van vele. Null-hipotézis mellett ugyanis annak valószínűsége, hogy ennek az esetnek megfelelően  $C_{n,n} = n$  legyen, (29) szerint

$$(30) \quad V \{ C_{n,n} = n \} = \frac{1}{n+1}.$$

5%-szint mellett ilyenkor tehát már »ránézésre« is szignifikánsnak ítéelhetjük az eltérést, ha a minták legalább 20–20 elemszámúak.

b) »*Abszolút-D*«-kritérium. A (25) alatti tételt, mely *Gnyegyenkotól* és *Koroljuktól* származik, »szimmetrikus távolság« definiálására használhatjuk. E végből írjuk a tételt a következő alakba :

$$(31) \quad r_n(c) = V \left\{ D_{n,n} \equiv \frac{c}{n} \right\} = \frac{2}{\binom{2n}{n}} \sum_{\nu=1}^{\lfloor n/c \rfloor} (-1)^{\nu-1} \binom{2n}{n-\nu c} ; c = 1, 2, \dots, n.$$

$D_{n,n}$  is eloszlásmentes »távolságot« értelmmez. Null-hipotézis mellett annak valószínűségét, hogy  $D_{n,n} \equiv \frac{c}{n}$ , a (31) képletből nyerjük. Ezen  $v_n(c)$  valószínűségek értékeit az I. táblázatba foglaltuk. Ha  $D_{n,n}$  olyan nagy, hogy a megfelelő  $v_n(c)$  valószínűségi érték a használt valószínűségi szintnél (orvosi-biológiai vonatkozásoknál általában 5%) kisebb, úgy a két minta egymástól való eltérését szignifikánsnak ítéelhetjük. Az »abszolút-D«-kritériumot abban az esetben használhatjuk, ha a behatás irányára vonatkozólag nincs előzetes hipotézisünk.

c) »*Kétoldali-D*«-kritérium. Előzetes egyirányú hipotézis esetére az előbbinél jóval hatékonyabb eljárást nyerünk a *Gnyegyenkotól* és *Rvaacsevtől* származó (27) tétel alkalmazásával, amely (azonos elemszámú minták esetén) a  $D_{n,n}^-$  és  $D_{n,n}^+$  változók együttes eloszlását adja meg. Mint említettük, bennünket elsősorban a két minta egymástól való »eltoltságának«, »tranzlációjának« jellemzése érdekel. Világos, hogy az elsőnek választott minta annál inkább »lemarad« a másik mögött, annál inkább mondhatjuk róla, hogy »balra tolódott« az  $x$ -tengelyen a másodiktól, minél nagyobb  $D_{n,n}^+$  és ugyanakkor minél kisebb  $D_{n,n}^-$ ; tehát minél nagyobb az első minta empirikus eloszlásfüggvényének a második feletti »maximális kiugrása« és ugyanakkor minél kisebb a

második mintának az első feletti »maximális kiugrása«. Írjuk tehát a (27) alatti tételt a következő alakba :

$$(32) \quad w_n(a, b) = V \left\{ D_{n,n}^- \leq \frac{a}{n} : D_{n,n}^+ \geq \frac{b}{n} \right\} = \\ = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \left| \sum_{v=1,2,\dots} \binom{2n}{n+a+1-v(a+b+1)} + \right. \\ \left. + \sum_{v=1,2,\dots} \binom{2n}{n+b-v(a+b+1)} - 2 \sum_{v=1,2,\dots} \binom{2n}{n-v(a+b+1)} \right|.$$

Itt  $a$  és  $b$  nem-negatív egész számok lehetnek és természetesen  $0 \leq a + b \leq n$ . Null-hipotézis mellett  $w_n(a, b)$  a valószínűsége annak, hogy megfelelő sorrendben véve a mintákat (tehát az »elmaradónak« várt mintát elsőnek, a másikat pedig másodiknak választva),  $D_{n,n}^- \leq \frac{a}{n}$  és  $D_{n,n}^+ \geq \frac{b}{n}$  legyen. Adott esetben a II. táblázatból kiolvasott  $w_n(a, b)$  értéket a szinthez hasonlítva ítéltethjük meg, szignifikánsan eltér-e egymástól a várt irányban a két minta?

Az elmondottnak orvosi vonatkozású példákkal való szemléltetése előtt igyekszünk gyakorlati szempontból is világosan meghatározni, milyen esetben, milyen feltételek betartása mellett alkalmazhatjuk két minta, megfigyelési adatsor közti eltérés szignifikanciájának megítélésére a fenti módszereket.

Három feltételnek kell teljesülnie. 1. A vizsgált statisztikai sokaságnak *folytonos eloszlásúnak* kell lennie. A kimondottan diszkrét eloszlású sokaságtól eltekintve (pl. a baktérium-szám, megbetegedettek száma stb.) az orvosi-biológiai kutatásban szereplő sokaságok majdnem mind ilyenek. Tudjuk azonban, hogy az egyes adatokra vonatkozó mérési eredmények többé-kevésbé hibás értékeket szolgáltatnak, ezért ezeket megfelelő módon kerekíteni szokták. Ilyen kerekített értékekből álló adatsorokat, mintákat azonban — túlságos kerekítés után — már nem tekinthetjük folytonos eloszlású sokaságot reprezentáló mintáknak, hiszen a kerekítés miatt az egyes adatok csak ugrás-szerű, diszkrét értéket vehetnek fel. Különösen fontos ezt hangsúlyoznunk azért, mert az orvosi-biológiai gyakorlatban előforduló mérések — mint azt már szöveztünk — általában igen nagy hibával dolgoznak, az egyes adatok tehát csak erős kerekítés után értékelhetők egyenként. Ezt a tényezőt azonban a módszerek alkalmazásakor aránylag könnyen kiküszöbölhetjük azáltal, ha tudományos kísérletekben a *mérőműszer megengedte legnagyobb pontossággal olvassuk le az eredményeket* s ezeket kerekítés nélkül használjuk fel statisztikai értékelésre. Igen hasznos, ha egyetlen adatra vonatkozólag több mérést végzünk s a pontosan leolvasott értékek ugyanannyi jegyig számított számtani középértékével dolgozunk. Természetesen hangsúlyozzuk, hogy a kerekítés nélkül nyert adatok utolsó néhány jegye az egyénenkénti jellemzés szempontjából értéktelen lehet, a mérési hibaokozta torzítás azonban a kísérlet egészének statisztikai értékelésében kiegyenlítődik s hatása legfeljebb a statisztikai ítélet határozottságának rovására megy. A folytonossági feltétel teljesülésének azt a gyakorlatilag elegendő (bár nem szükséges) kritériumát adhatjuk meg, hogy a két vizsgált minta »egyesítésével« nyert adatsorban *minden egyes érték csak egyszer forduljon elő*, tehát nem fordulhat elő sem az, hogy az egyik mintában



egy érték többször szerepel, sem pedig az, hogy a két mintának van »közös« eleme. Megjegyezzük, hogy G. M. Manyia [18] eredményei feljogosítanak bennünket arra, hogy úgy véljük, ezeket a módszereket idővel csoportosított adatokra is alkalmazhatjuk. — 2. Az alkalmazhatóság második feltétele az, hogy a *mintáknak*, melyekre a szignifikancia-vizsgálatot alkalmazzuk, *egymástól függetleneknek* kell lenniük. Ki kell tehát zárnunk e módszerek alkalmazásánál az ú. n. önkontroll esetét, melynél ugyanazokon az egyéneken végezzük el a behatást is, akiken előzőleg a kontrolladatokat leolvastuk. Ezeket a módszereket tehát csak akkor használhatjuk, ha a »kontroll« és »kezelt« egyedek egymástól független csoportot képeznek. — 3. A harmadik megszorítás arra vonatkozik, hogy a megfelelő (25), (27) és (29) alatti tételek egyelőre csak *azonos elemszámú minták* esetén alkalmazhatók. Minthogy elméletileg is ez a legoptimálisabb elosztása a kísérleti egyedeknek a két csoport között, a kísérleteket már lehetőleg eszerint tervezzük meg. Ha a két minta már adott és különböző elemszámúak, úgy az egyik mintából megfelelő számú elem kisorsolásával már egyenlő elemszámú mintákat kaphatunk. Ebben az esetben természetesen információt veszünk, amit a kísérletek alkalmasabb tervezésével esetleg elkerülhettünk volna. Megjegyezzük, hogy a rendstatisztika további kifejlődésével módot nyerhetünk majd egyenlőtlén elemszámú minták ilyen módszerekkel történő értékelésére is.

A példákra rátérve megjegyezzük, hogy tapasztalatunk szerint az ismertett három új módszert konkrétan grafikus úton alkalmazhatjuk a legegyszerűbben. A két minta empirikus eloszlásfüggvényeit kockás vagy milliméteres papírra rajzoljuk fel és ezután könnyen leolvashatjuk a megfelelő változók értékeit. Érdeemes megjegyeznünk, hogy az  $x$ -tengelyen történő monoton (sorrendtartó) transzformáció esetén — mint már említettük — ezek az értékek változatlanok maradnak és így nem szükséges a valódi léptéket felmérnünk az  $x$ -tengelyre: ehelyett alábbi egyszerűbb módon járhatunk el: A két mintában szereplő összes adatokat egyetlen adatsorral egyesítjük és nagyság szerint növekedőleg elrendezzük. Ezután az  $x$ -tengelyen ekvidisztáns távolságokban ezen egyesített adatsor minden egyes adata helyett ugyanezen sorrendben egy-egy pontot jelölünk ki, de például kék, illetve piros színnel, aszerint, hogy az illető adat az első vagy a második mintához tartozik. A következő lépés az, hogy ezen kék, illetve piros pontokból álló »transzformált« minták empirikus eloszlásfüggvényeit rajzoljuk meg a megfelelő színekkel. Természetesen kockás papírnál az  $x$ -tengely egységét alkalmasan  $n$  kockával egyenlőnek válasszuk (ha  $n$ - $n$ -elemszámú mintákról van szó), mivel ekkor éppen 1 kockával kell feljebb ugrnunk az egyes minta-elemeknél, tehát a lépcső-vonalak »fokai« 1 kockányi magasságúak. A  $D_{n,n}^-$ ,  $D_{n,n}$  ill.  $D_{n,n}$  differenciák értékeit ezután az ábrából könnyen leolvashatjuk.

#### 4.

#### Példák

Az 1. példa egy konkrét minta empirikus eloszlásfüggvényének grafikonját adja meg, de itt még az  $x$ -tengelyen a szokásos skálát alkalmazzuk. — 20 emberen lemérve a glomerulus filtratum mennyiségét, például a következő eredményeket kapjuk (itt és a továbbiakban is mindig nagyság szerint növekedőleg elrendezve adjuk meg a mintákat):

*Glomerulus filtratum mennyisége ml/min egységben:*

81,8	84,1	86,0	88,2
89,7	91,5	92,3	93,9
94,6	96,2	97,3	98,7
100,5	101,0	103,5	104,4
105,3	107,6	109,2	111,3

Ezen adatok empirikus eloszlásfüggvényét az 1. ábrán láthatjuk. Az  $x$ -tengelyen ebben a példában a szokásos léptéket használjuk.

2. *példa.* Két különböző községben levő általános iskolákban megmérték 24–24 12-éves fiú mellkaskörfogatát. Az  $X$ -községben lévő iskola igen jó sporteredményeket ért el, a másik,  $Y$ -községbeli lemaradt a versenyeken. A kérdés az, szignifikánsan nagyobb-e a jobban sportoló  $X$ -községbeli tanulók mellkaskörfogata az  $Y$ -községbeliekénél? A mérések eredményei például a következők voltak:

*Mellkaskörfogat cm-egységben belégzéskor:*

*$X$ -községben:*

66,7	67,4	68,5	69,2
70,3	71,0	73,1	74,9
76,6	77,5	78,4	78,9
79,0	80,6	81,0	81,7
82,1	82,5	83,7	84,0
84,6	85,4	85,9	86,3

*$Y$ -községben:*

63,5	64,3	65,5	66,3
67,8	68,2	69,4	70,5
71,4	71,8	72,2	72,3
73,7	73,9	74,3	75,0
75,3	76,4	77,1	78,2
78,6	80,3	82,8	83,0

A 2. ábráról először is látjuk, hogy az  $Y$ -minta empirikus eloszlásfüggvénye konzekvensen a másik felett halad s így a » $C$ «-kritériumot alkalmazva rögtön láthatjuk, hogy az adott irányú eltérés 5%-os szint mellett szignifikáns!

$$V \{C_{24,24} = 24\} = \frac{1}{25} = 4\% < 5\%.$$

A »kétoldali  $D$ «-kritérium szerint természetesen még inkább szignifikánsnak találjuk az eltérést: a 2. ábrából

$$D_{24,24}^+ = \frac{10}{24} \text{ és } D_{24,24}^- = 0, \text{ tehát}$$

$$(33) \quad w_{24}(0,10) = 0,52\% \ll 5\%.$$

3. *példa.* Azt vizsgáljuk, befolyásolja-e egy bizonyos diéta a testsúly növekedését. 20—20 egyforma súlyú és korú, azonos nemű és beltenyészetből származó patkányon kísérletet végzünk. Az első 20 állat a diétát kapja (»kezeltek«), a másik 20-at pedig a szokásos módon tápláljuk (»kontrollok«). Megfelelő idő múlva lemérjük mind a 40 patkány súlygyarapodását és például a következő eredményeket kapjuk:

*Súlygyarapodás gr.-egységben 2 hét múlva:*

1. »kezeltek«:

18,2	20,1	22,0	24,1
25,9	26,8	28,9	31,1
31,9	32,8	37,7	41,0
44,8	47,1	50,0	54,8
60,2	63,1	68,4	71,3

2. »kontrollok«:

30,2	34,3	35,1	36,2
38,6	39,4	40,0	42,3
42,9	44,2	45,9	49,1
51,1	52,0	53,1	53,9
56,2	58,4	62,0	67,3

A grafikus módszert alkalmazva láthatjuk, hogy a minták adott sorszámozása mellett (lásd a 3. ábrát)

$$D_{20,20}^{+} = \frac{9}{20}, \quad D_{20,20}^{-} = \frac{2}{20} \quad \text{és} \quad D_{20,20} = \max(D_{20,20}^{+}, D_{20,20}^{-}) = \frac{9}{20}.$$

Az »abszolút-D«-kritérium alkalmazásánál az I. táblázatból kiolvashatjuk, hogy

$$v_{20}(9) = 3,35 \% < 5 \% ,$$

és így 5%-os szint mellett az eltérést szignifikánsnak ítéldhetjük.

4. *példa.* Vizsgáljuk két diureticum hatását. Előzetes állatkísérletek alapján az a feltevésünk, hogy az »A«-készítmény diureticus hatása nagyobb a »B«-készítményénél. Feltevésünk alátámasztására 16 betegen lemérjük az »A« készítmény, másik 16 betegen pedig a »B«-készítmény hatására fellépő diuresist. Kérdés, szignifikánsan nagyobb-e az »A«-készítmény diureticus hatása a »B«-készítményénél?

*Napi diuresis 100 ml.-egységben:*

»A«-készítmény:

8,3	11,4	20,1	26,2
27,2	36,0	36,6	37,3
38,4	41,9	42,7	44,4
45,0	47,5	48,6	51,1

»B«-készítmény:

8,7	13,8	18,9	21,7
23,9	25,5	26,8	28,9
30,0	31,2	32,3	33,9
35,5	40,6	43,7	46,6

Minthogy itt egyirányú, előzetes hipotézisen alapuló vizsgálatról van szó, felhasználhatjuk a »kétoldali-D«-kritériumot. A 4. ábráról leolvashatjuk, hogy

$$D_{16,16}^{+} = \frac{8}{16} \text{ és } D_{16,16}^{-} = \frac{1}{16}, \text{ tehát a II. táblázatból}$$

$$w_{16}(1,8) = 1,45 \% < 5\%.$$

Tehát mondhatjuk, hogy az »A«-készítmény szignifikánsan hatásosabb a »B«-készítménynél 5%-os szint mellett.

Úgy véljük, hogy a bemutatott példák jól szemléltetik azt, hogy tágabb alkalmazhatóságuk mellett ezek a módszerek technikai egyszerűségükkel is kitűnnek.

# IRODALOM

- [1.] T. W. Anderson és D. A. Darling: *Annals of Math. Statistics* 23. (1952) 193—212. old.
- [2.] K. L. Chung: *Transactions of the Am. Math. Society* 67. (1949) 36—50. old.
- [3.] H. Cramér: *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 11. (1928) 13—74. old. és 141—180. old.
- [4.] M. D. Donsker: *Memoirs of the Am. Math. Society* 6. (1951) 12. old.
- [5.] M. D. Donsker: *Annals of Math. Statistics* 23. (1952) 277—281. old.
- [6.] J. L. Doob: *Annals of Math. Statistics* 20. (1949) 393—403. old.
- [7.] W. Feller: *Annals of Math. Statistics* 19. (1948) 177—189. old.
- [8.] В. И. Гливенко: *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari* 4 (1933). 92—99. old.
- [9.] Б. В. Гнеденко: *Курс теории вероятностей*, Гиттл. Москва Ленинград (1950) (Ft. 14. ) főleg: 278—292. old.
- [10.] Б. В. Гнеденко és В. С. Корольюк: *Доклады А. Н.* 80. (1951) 525—528. old.
- [11.] Б. В. Гнеденко és Е. Л. Рвачева: *Доклады А. Н.* 82. (1952) 513—516. old.
- [12.] Б. В. Гнеденко: *Доклады А. Н.* 82. (1952). 661—663. old.
- [13.] Б. В. Гнеденко és В. С. Михалевич: *Доклады А. Н.* 82. (1952) 841—843. old.
- [14.] Б. В. Гнеденко és В. С. Михалевич: *Доклады А. Н.* 85. (1952) 25—27. old.
- [15.] M. Kac: *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA* 35. (1949) 252—257. old.
- [16.] А. Н. Колмогоров: *Известия Ак. Наук. Сер. физ.-мат.* (1933) 363—372. old. és *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari* 4. (1933) 1—11. old. és 83—91. old.
- [17.] И. Д. Квнт: *Доклады А. Н.* 71. (1950) 229—231. old.
- [18.] Г. М. Маниа: *Доклады А. Н.* 69 (1949) 495—497. old.
- [19.] F. J. Massey: *Annals of Math. Statistics* 21. (1950) 116—119. old.
- [20.] F. J. Massey: *Annals of Math. Statistics* 21. (1950) 440—443. old.
- [21.] F. J. Massey: *Annals of Math. Statistics* 22. (1951) 125—128. old.
- [22.] F. J. Massey: *Annals of Math. Statistics* 23. (1952) 435—441. old.
- [23.] В. С. Михалевич: *Доклады А. Н.* 85 (1952). 485—488. old.
- [24.] R. Mises: *»Wahrscheinlichkeitsrechnung«*, Deuticke Wien, 1931.
- [25.] А. У. Панвин: *Автореферат Моск. пед. инст. им. В. П. Потемкина* (1951).
- [26.] *Szentmártony Tibor: Matematikai statisztika a műszaki gyakorlatban*, Mérnöki Továbbképző Int. Kiadv. Bpest, (1950.) (Ft. 27.50) főleg: 98—99. old.
- [27.] Н. В. Смирнов: *Comptes Rendus Ac. Sc. Paris.* 202. (1936) 449. old.



- [28.] Н. В. Смирнов: Матем. Сборник. 2. (44) (1937) 973 - 993. old.  
 [29.] Н. В. Смирнов: Матем. Сборник. 6 (44) (1939) 3 26. old. és Бюллетен Мат. 2. (1939).  
 [30.] Н. В. Смирнов: Бюллетен (1939). мат. 2. és Annals of Math. Statistics 19. (1948) 279—281. old.  
 [31.] A. Wald és J. Wolfowitz: Annals of Math. Statistics 10. (1939) 105—118. old.

## О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ МЕДИЦИНСКО-БИОЛОГИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

И. ЮВАНЦ — Т. ЛИПТАК

### Резюме

Первая часть работы трактует о принципиальных вопросах применений. Она группирует специальные проблемы, проистекающие из характера медицинско-биологического исследования, вокруг двух центральных вопросов. Один круг проблем связан с исследованием «сигнификации» именно с правильным толкованием самой «сигнификации». Другой круг проблем относится к выборкам медицинско-биологического исследования, имеющим часто, в силу необходимости, лишь малое число элементов. Что касается другой группы вопросов, работа предлагает введение статистических методов, независимых от распределения и вырабатываемые также и для малых выборок, т. е. она предлагает применение методов, независимых от почти всех предварительных предположений, относящихся к исследуемой статистической совокупности.

Вторая часть работы, связанная с вышеуказанным предложением, познакомит с главными теоремами теории вариационных рядов и сообщает новейшие советские результаты в этой области. С помощью этих результатов, третья часть работы вырабатывает для исследования сигнификации методы, которые не зависят от распределения совокупности, и являются применимы и при малых выборках. Наконец, иллюстрируется практическое применение этих новых методов несколькими примерами медицинской научно-исследовательской работы, и сообщаются необходимые для вычислений таблицы, составленные Группой Медицинской Математической Статистики Института Прикладной Математики.

Работа исходит из медицинско-биологических применений, а большинство трактующих принципиальных вопросов имеет более общий характер. Статистические методы, изложенные в этой работе, могут широко применяться.

## SUR QUELQUES PROBLÈMES DE L'APPLICATION MÉDICO-BIOLOGIQUE DE LA STATISTIQUE MATHÉMATIQUE

I. JUVANCSZ — T. LIPTÁK

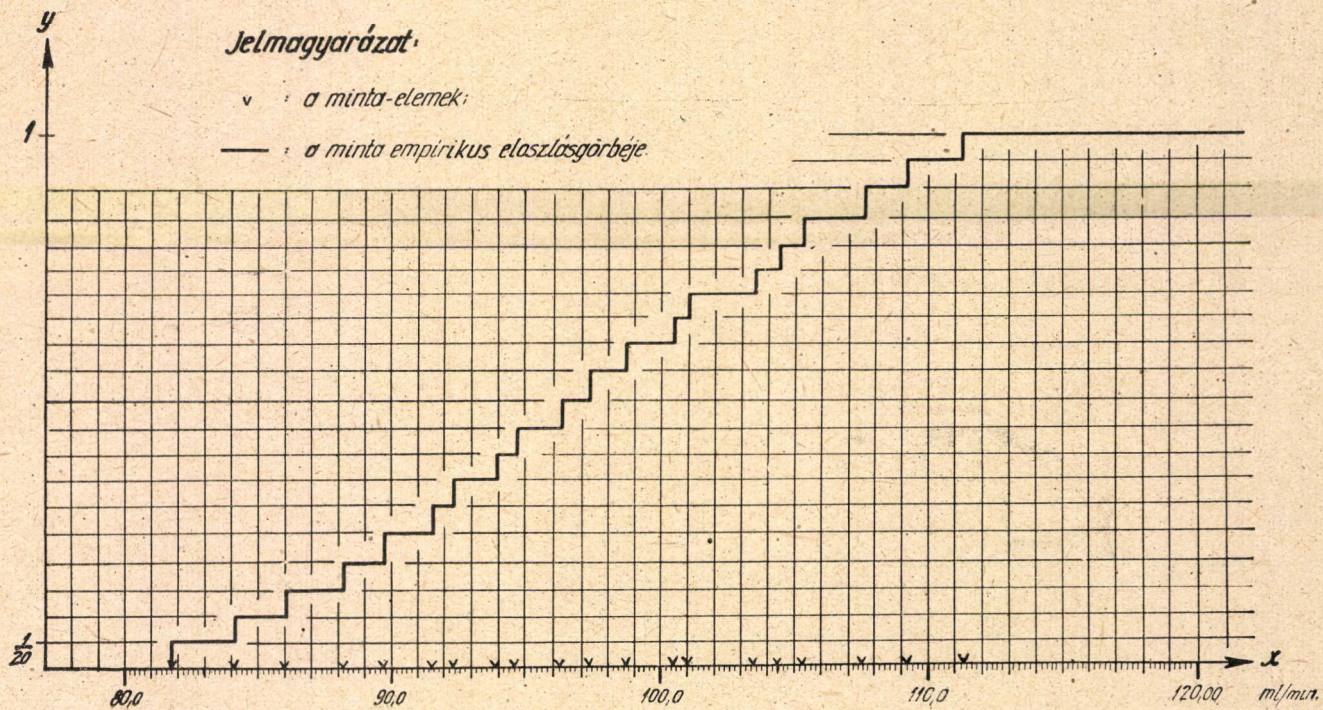
### RÉSUMÉ

La première partie de la publication s'occupe des questions de principe des applications. Il groupe les problèmes spéciaux, qui résultent de la nature des recherches médico-biologiques, autour de deux questions: l'une des sphères de problèmes s'attache aux recherches de signification, notamment à l'interprétation correcte de la signification elle-même, tandis que l'autre sphère de problème dérive de la prise d'échantillon qui, dans les recherches médico-biologiques, souvent ne contient, par nécessité, qu'un nombre réduit d'éléments. Tandis qu'en ce qui regarde le premier groupe de problèmes l'article, vu le fait que les recherches concernant ce groupe de problèmes ne sont pas encore achevées, ne s'occupe que de la seule formulation du problème et de son importance, il propose, en ce qui regarde le deuxième groupe de problèmes, l'introduction de méthodes statistiques «exemptes de distribution» élaborées pour les petits échantillons aussi, c'est-à-dire l'application de méthodes indépendantes de presque toute supposition préalable.

La seconde partie de l'article s'attachant à la proposition mentionnée décrit les théorèmes principaux de la statistique d'ordre, (en d'autres termes: de la théorie des séries de variations) et renseigne aussi sur les résultats soviétiques les plus récents dans

cette direction. En utilisant ces résultats, la publication, dans sa troisième partie, élabore des méthodes exemptes de distribution qui peuvent être employées, dans le cas des petits échantillons aussi, pour l'examen de la signification. Enfin l'article illustre l'application pratique de ces méthodes nouvelles par quelques exemples de rapports médicaux et publie les tables nécessaires pour les calculs qui ont été élaborés par le groupe de statistique mathématique médicale de l'Institut des Mathématiques Appliquées.

L'article prend comme point de départ les problèmes qui se présentent dans les applications médico-biologiques, mais un certain nombre des questions de principe discutées ici sont de caractère plus général, et l'on peut s'attendre que les méthodes statistiques exemptes de distribution, basées sur la statistique d'ordre vont soulever un intérêt général et seront utilisées dans un large domaine d'application.



1. ábra

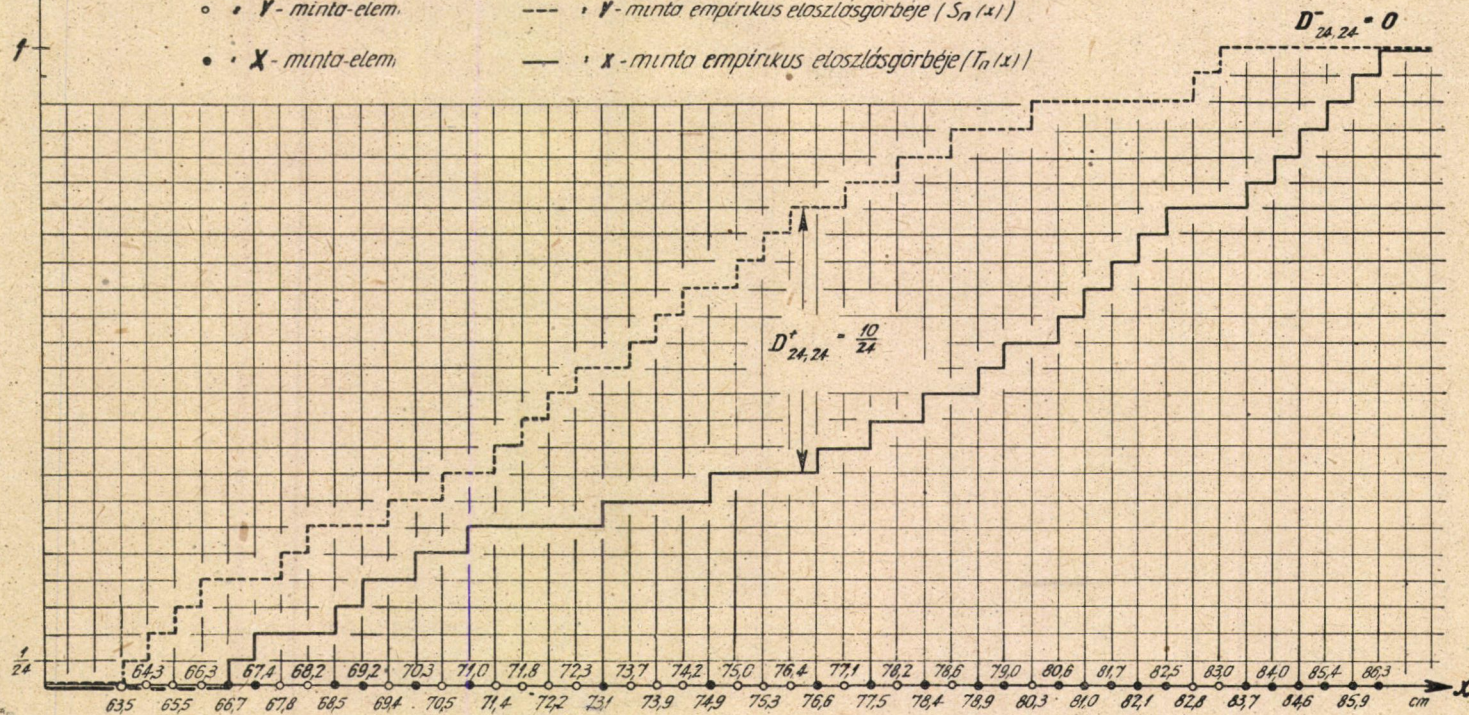


y  
f*Jelmagyarázat:*

• • Y - minta-elem.

--- • Y - minta empirikus eloszlásgörbéje ( $S_n(x)$ )

• • X - minta-elem.

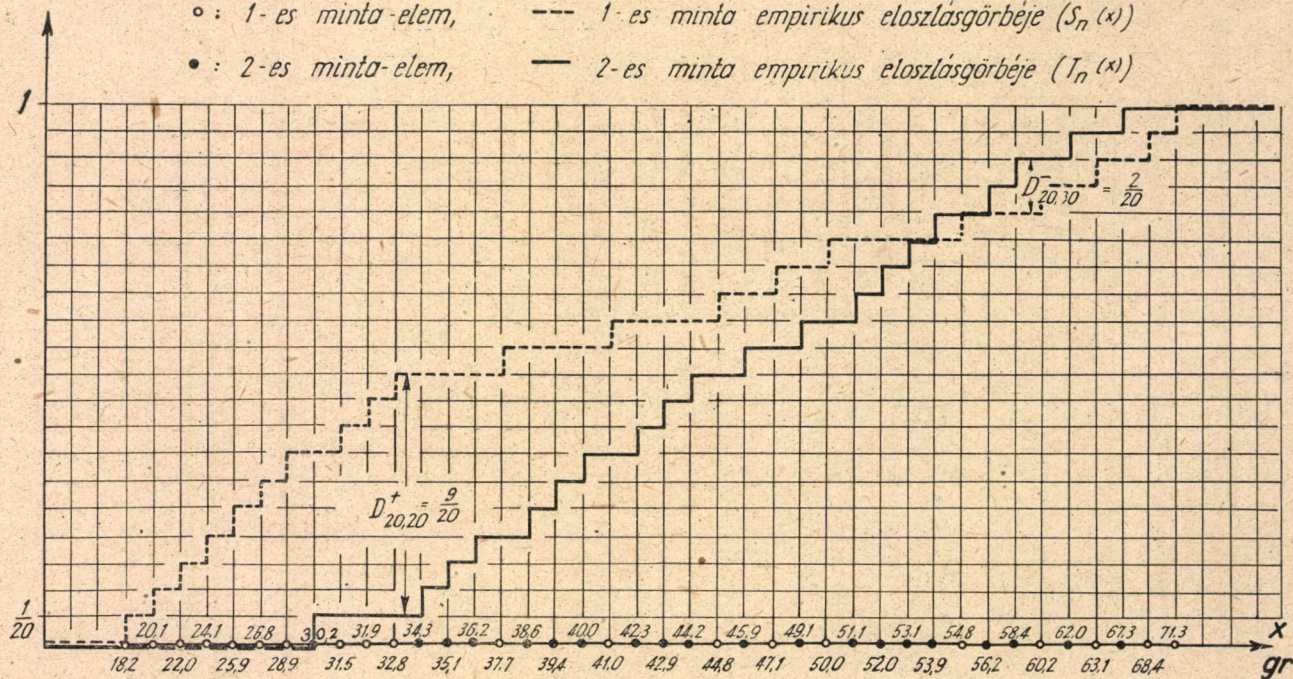
— • X - minta empirikus eloszlásgörbéje ( $T_n(x)$ )

2. ábra



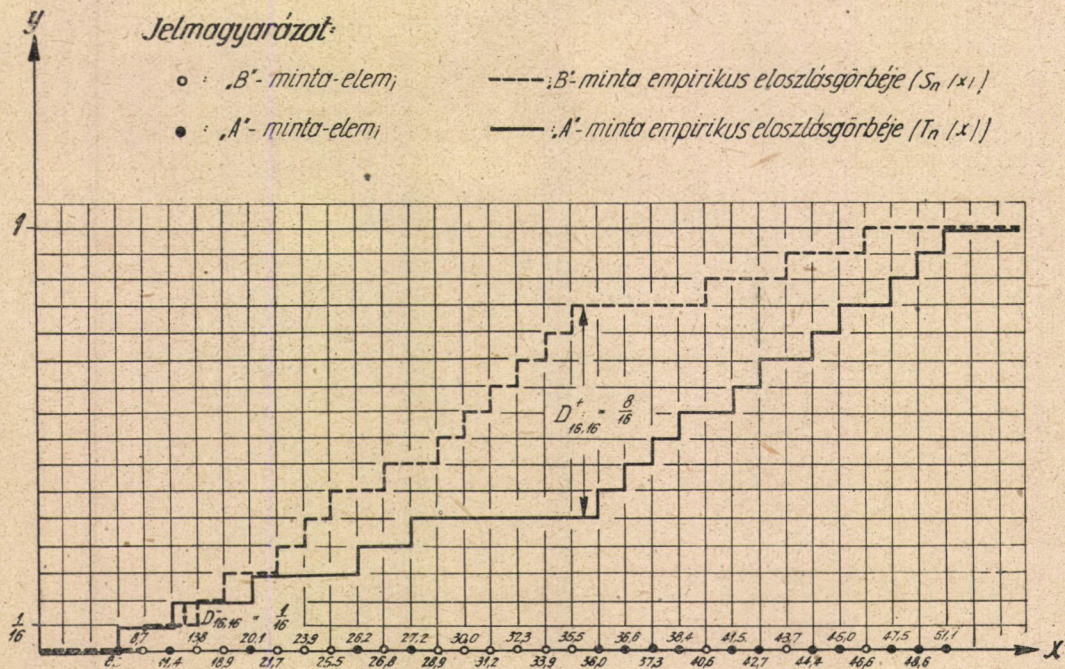
### Jelmagyarázat:

- : 1-es minta-elem,      --- 1-es minta empirikus eloszlásgörbéje ( $S_n(x)$ )  
 • : 2-es minta-elem,      — 2-es minta empirikus eloszlásgörbéje ( $T_n(x)$ )



3. ábra





4. ábra



I. Táblázat.

Az «abszolút-D»-kritérium alkalmazásához szükséges  $v_n(c)$  valószínűségek értékei kismintákra

$$v_n(c) = V \left\{ D_{n,n} \geq \frac{c}{n} \right\} = \frac{2}{\binom{2n}{n}} \sum_{v=1}^{\left[ \frac{n}{c} \right]} (-1)^{v-1} \binom{2n}{n-vc}$$

100  $v_n(c)$  %

$\begin{smallmatrix} c \\ n \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
5	100,00	87,30	35,71	7,94	0,79	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	100,00	93,07	47,40	14,29	2,60	0,22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	100,00	96,27	57,52	21,21	5,30	0,82	0,06	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	100,00	98,01	66,01	28,27	8,70	1,87	0,25	0,02	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	100,00	98,95	73,01	35,17	12,59	3,36	0,63	0,07	0,00	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	100,00	99,45	78,69	41,75	16,78	5,24	1,23	0,21	0,02	0,00	—	—	—	—	—	—	—	—
11	100,00	99,71	83,26	47,92	21,15	5,77	1,70	0,38	0,06	0,01	0,00	—	—	—	—	—	—	—
12	100,00	99,85	86,90	53,61	25,58	9,95	3,14	0,79	0,15	0,02	0,00	—	—	—	—	—	—	—
13	100,00	99,92	89,78	58,82	29,99	12,65	4,43	1,26	0,29	0,05	0,01	0,00	—	—	—	—	—	—
14	100,00	99,96	92,06	63,55	34,33	15,49	5,90	1,88	0,49	0,10	0,02	0,00	—	—	—	—	—	—
15	100,00	99,98	93,83	67,81	38,55	18,44	7,55	2,62	0,77	0,18	0,04	0,01	0,00	—	—	—	—	—
16	100,00	99,99	95,23	71,64	42,63	21,45	9,33	3,50	1,12	0,30	0,07	0,01	0,00	—	—	—	—	—
17	100,00	99,99	96,31	75,06	46,54	24,50	11,24	4,50	1,56	0,46	0,12	0,02	0,00	—	—	—	—	—
18	100,00	100,00	97,15	78,10	50,26	27,54	13,24	5,60	2,07	0,67	0,18	0,04	0,01	0,00	—	—	—	—
19	100,00	100,00	97,81	80,81	53,79	30,57	15,32	6,81	2,67	0,92	0,28	0,07	0,02	0,00	—	—	—	—
20	100,00	100,00	98,31	83,20	57,13	33,56	17,45	8,11	3,35	1,23	0,40	0,11	0,03	0,01	0,00	—	—	—
21	100,00	100,00	98,70	85,31	60,28	36,50	19,63	9,48	4,11	1,59	0,55	0,17	0,04	0,01	0,00	—	—	—
22	100,00	100,00	99,01	87,17	63,24	39,37	21,84	10,93	4,93	2,00	0,73	0,24	0,07	0,02	0,00	—	—	—
23	100,00	100,00	99,24	88,80	66,01	42,18	24,06	12,43	5,83	2,47	0,95	0,32	0,10	0,03	0,01	0,00	—	—
24	100,00	100,00	99,42	90,24	68,60	44,90	26,28	13,98	6,78	2,99	1,20	0,43	0,14	0,04	0,01	0,00	—	—
25	100,00	100,00	99,55	91,50	71,02	47,55	28,50	15,58	7,79	3,56	1,48	0,56	0,19	0,06	0,02	0,00	—	—
26	100,00	100,00	99,66	92,60	73,27	50,10	30,71	17,20	8,85	4,18	1,81	0,71	0,26	0,08	0,02	0,01	0,00	—
27	100,00	100,00	99,74	93,57	75,37	52,56	32,90	18,86	9,96	4,84	2,17	0,98	0,33	0,11	0,03	0,01	0,00	—
28	100,00	100,00	99,80	94,41	77,32	54,94	35,06	20,53	11,10	5,55	2,56	1,09	0,42	0,15	0,05	0,01	0,00	—
29	100,00	100,00	99,85	95,14	79,12	57,22	37,20	22,21	12,29	6,30	2,99	1,31	0,53	0,20	0,07	0,02	0,01	0,00
30	100,00	100,00	99,88	95,78	80,80	59,41	39,29	23,91	13,50	7,09	3,46	1,56	0,65	0,25	0,09	0,03	0,01	0,00

# II. Táblázat (1. rész)

A »kétoldali-D«-kritérium alkalmazásához szükséges  $w_n(a,b)$  valószínűségek értékei kismintákra

$$w_n(a,b) = V \left\{ D_{n,n}^- \leq \frac{a}{n}; D_{n,n}^+ \geq \frac{b}{n} \right\} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \left\{ \sum_{v=1}^n \binom{2n}{n+a+1-v(a+b+1)} + \sum_{v=1}^n \binom{2n}{n+b-v(a+b+1)} - 2 \sum_{v=1}^n \binom{2n}{n-v(a+b+1)} \right\}$$

100  $w_n(a,b)$  %

n	a \ b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	0	22,86	18,57	8,57	1,43	—	—	—	—	—	—
	1	58,57	37,14	11,43	—	—	—	—	—	—	—
5	0	16,67	16,27	10,32	3,17	0,40	—	—	—	—	—
	1	51,98	39,68	17,06	3,97	—	—	—	—	—	—
	2	75,79	46,83	17,86	—	—	—	—	—	—	—
6	0	14,29	14,18	10,82	4,65	1,08	0,11	—	—	—	—
	1	46,32	39,50	21,21	6,93	1,30	—	—	—	—	—
	2	72,73	50,97	23,59	7,14	—	—	—	—	—	—
7	0	12,50	12,47	10,64	5,71	1,86	0,35	0,03	—	—	—
	1	41,64	37,94	23,89	9,79	2,59	0,41	—	—	—	—
	2	68,97	53,06	28,35	10,55	2,65	—	—	—	—	—
8	0	11,11	11,10	10,12	6,37	2,61	0,69	0,11	0,01	—	—
	1	37,76	35,79	25,37	12,28	4,23	0,92	0,12	—	—	—
	2	65,07	53,65	32,08	13,89	4,34	0,93	—	—	—	—
	3	81,12	60,37	33,69	14,13	4,35	—	—	—	—	—
9	0	10,00	10,00	9,47	6,72	3,25	1,09	0,24	0,03	0,00	—
	1	34,54	33,49	25,95	14,30	5,67	1,60	0,31	0,04	—	—
	2	61,29	53,22	34,83	16,99	6,22	1,67	0,32	—	—	—
	3	79,09	62,14	37,55	17,55	6,29	1,68	—	—	—	—



n	a \ b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
10	0	9,09	9,09	8,81	6,83	3,76	1,49	0,42	0,08	0,01	0,00	—	—	—
	1	31,82	31,26	25,89	15,84	7,17	2,42	0,60	0,10	0,01	—	—	—	—
	2	57,76	52,12	36,74	19,75	8,19	2,60	0,62	0,10	—	—	—	—	—
	3	76,76	63,04	40,72	20,77	8,37	2,62	0,62	—	—	—	—	—	—
11	0	8,33	8,33	8,19	6,78	4,15	1,88	0,63	0,16	0,03	0,00	—	—	—
	1	29,49	29,20	25,42	16,93	8,54	3,30	0,97	0,21	0,03	0,00	—	—	—
	2	54,53	50,61	37,93	22,11	10,14	3,67	1,03	0,22	0,03	—	—	—	—
	3	74,27	63,27	43,26	23,74	10,51	3,73	1,04	0,22	—	—	—	—	—
	4	85,24	68,47	44,89	24,11	10,57	3,73	1,04	—	—	—	—	—	—
12	0	7,69	7,69	7,62	6,63	4,42	2,23	0,86	0,25	0,06	0,01	0,00	—	—
	1	27,47	27,32	24,70	17,65	9,73	4,20	1,42	0,37	0,07	0,01	0,00	—	—
	2	51,57	48,87	38,55	24,07	12,01	4,83	1,55	0,39	0,07	0,01	—	—	—
	3	71,74	62,98	45,22	26,41	12,65	4,96	1,57	0,39	0,08	—	—	—	—
	4	83,93	69,46	47,57	27,05	12,78	4,98	1,57	0,39	—	—	—	—	—
13	0	7,14	7,14	7,10	6,42	4,59	2,53	1,09	0,37	0,10	0,02	0,00	—	—
	1	25,71	25,64	23,83	18,05	10,74	5,08	1,93	0,58	0,14	0,02	0,00	—	—
	2	48,89	47,04	38,71	25,64	13,76	6,04	2,16	0,63	0,14	0,02	0,00	—	—
	3	69,24	62,29	46,67	28,78	14,73	6,28	2,21	0,63	0,14	0,02	—	—	—
	4	82,42	70,00	49,81	29,75	14,97	6,32	2,21	0,63	0,14	—	—	—	—
14	0	6,67	6,67	6,65	6,18	4,68	2,78	1,32	0,50	0,15	0,04	0,01	0,00	—
	1	24,17	24,13	22,88	18,21	11,56	5,92	2,47	0,84	0,23	0,05	0,01	0,00	—
	2	46,45	45,19	38,52	26,87	15,35	7,26	2,85	0,92	0,24	0,05	0,01	0,00	—
	3	66,80	61,33	47,69	30,84	16,73	7,65	2,94	0,94	0,24	0,05	0,01	—	—
	4	80,80	70,18	51,66	32,22	17,11	7,73	2,95	0,94	0,24	0,05	—	—	—
	5	88,37	74,01	53,04	32,61	17,20	7,75	2,95	0,94	0,24	—	—	—	—

n	a \ b	1	2	3	4	5	5	7	8	9	10	11	12	13	14
15	0	6,25	6,25	6,24	5,92	4,71	2,99	0,64	0,22	0,06	0,01	0,00	—	—	—
	1	22,79	22,77	21,93	18,17	12,21	6,69	3,03	1,13	0,35	0,09	0,02	0,00	—	—
	2	44,23	43,37	38,07	27,78	16,76	8,46	3,59	1,28	0,38	0,09	0,02	0,00	—	—
	3	64,45	60,16	48,32	32,60	18,60	9,04	3,74	1,31	0,38	0,09	0,02	0,00	—	—
	4	79,09	70,04	48,22	34,45	19,19	9,19	3,77	1,31	0,38	0,09	0,02	—	—	—
	5	87,52	74,67	55,00	35,03	19,33	9,22	3,77	1,31	0,38	0,09	—	—	—	—
16	0	5,88	5,88	5,88	5,66	4,69	3,15	1,73	0,78	0,29	0,09	0,02	0,00	—	—
	1	21,57	21,56	20,98	17,99	12,70	7,38	3,58	1,45	0,49	0,14	0,03	0,01	0,00	—
	2	42,20	41,62	37,43	28,42	18,00	9,62	4,37	1,68	0,55	0,15	0,03	0,01	0,00	—
	3	62,21	58,86	48,64	34,08	20,35	10,43	4,60	1,74	0,56	0,15	0,03	0,01	0,00	—
	4	77,34	69,66	54,33	36,45	21,16	10,67	4,65	1,75	0,56	0,15	0,03	0,01	—	—
	5	86,54	75,08	56,68	37,26	21,40	10,72	4,66	1,75	0,56	0,15	0,03	—	—	—
17	0	5,56	5,56	5,55	5,40	4,63	3,27	1,90	0,92	0,37	0,13	0,04	0,01	0,00	—
	1	20,47	20,46	20,07	17,70	13,05	8,00	4,12	1,80	0,66	0,21	0,05	0,01	0,00	—
	2	40,35	39,96	36,66	28,82	19,06	10,72	5,16	2,13	0,75	0,23	0,06	0,01	0,00	—
	3	60,08	57,47	48,70	35,30	21,94	11,80	5,50	2,22	0,77	0,23	0,06	0,01	0,00	—
	4	75,58	69,08	55,21	38,21	23,04	12,14	5,60	2,24	0,78	0,23	0,06	0,01	0,00	—
	5	85,46	75,27	58,11	39,31	23,38	12,24	5,62	2,25	0,78	0,23	0,06	0,01	—	—
18	0	5,26	5,26	5,26	5,16	4,55	3,36	2,06	1,06	0,46	0,17	0,05	0,01	0,00	—
	1	19,47	19,47	19,21	17,34	13,28	8,52	4,64	2,16	0,86	0,29	0,08	0,02	0,00	—
	2	38,65	38,38	35,80	29,02	19,96	11,74	5,96	2,62	1,00	0,33	0,09	0,02	0,00	—
	3	58,07	56,03	48,54	36,27	23,39	13,13	6,44	2,76	1,03	0,33	0,09	0,02	0,00	—
	4	73,83	68,34	55,85	39,76	24,80	13,61	6,58	2,79	1,04	0,33	0,09	0,02	0,00	—
	5	84,30	75,26	59,30	41,17	25,28	13,75	6,61	2,80	1,04	0,33	0,09	0,02	0,00	—
18	0	90,17	78,48	60,69	41,65	25,42	13,78	6,62	2,80	1,04	0,33	0,09	0,02	—	—

## II. Táblázat folytatás (4. rész)

100  $w_n(a, b)$  %

n	a \ b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
19	0	5,00	5,00	5,00	4,93	4,45	3,41	2,19	1,19	0,55	0,22	0,07	0,02	0,01	0,00		
	1	18,57	18,57	18,39	16,93	13,41	8,97	5,12	2,52	1,07	0,39	0,12	0,03	0,01	0,00		
	2	37,08	36,90	34,89	29,05	20,70	12,68	6,75	3,13	1,27	0,45	0,14	0,04	0,01	0,00		
	3	56,16	54,58	48,20	37,03	24,69	14,40	7,38	3,33	1,32	0,46	0,14	0,04	0,01	0,00		
	4	72,10	67,48	56,26	41,11	26,44	15,07	7,59	3,39	1,33	0,46	0,14	0,04	0,01	0,00		
	5	83,09	75,08	60,28	42,85	27,08	15,25	7,64	3,40	1,34	0,46	0,14	0,04	0,01	0,00	—	—
	6	89,53	78,61	62,01	43,50	27,29	15,30	7,66	3,40	1,34	0,46	0,14	0,04	0,01	—	—	—
20	0	4,76	4,76	4,76	4,72	4,34	3,44	2,30	1,31	0,65	0,27	0,10	0,03	0,01	0,00		
	1	17,75	17,75	17,63	16,48	13,45	9,35	5,57	2,88	1,59	0,51	0,17	0,05	0,01	0,00		
	2	35,63	35,51	33,94	28,94	21,29	13,54	7,51	3,66	1,57	0,59	0,19	0,06	0,01	0,00		
	3	54,36	53,14	47,72	37,60	25,84	15,61	8,33	3,94	1,65	0,61	0,20	0,06	0,01	0,00		
	4	70,40	66,52	56,48	42,26	27,95	16,44	8,62	4,03	1,67	0,61	0,20	0,06	0,01	0,00		
	5	81,84	74,76	61,07	44,37	28,78	16,72	8,70	4,05	1,68	0,61	0,20	0,06	0,01	0,00		—
	6	88,81	79,10	63,15	45,20	29,07	16,81	8,72	4,05	1,68	0,61	0,20	0,06	0,01	0,00	—	—
	7	92,50	81,08	63,98	45,48	29,15	16,83	8,73	4,05	1,68	0,62	0,20	0,06	0,01	—	—	—
21	0	4,55	4,55	4,55	4,51	4,22	3,44	2,39	1,43	0,74	0,33	0,13	0,04	0,01	0,00		
	1	17,00	17,00	16,92	16,02	13,02	9,65	5,99	3,23	1,53	0,64	0,23	0,07	0,02	0,00		
	2	34,29	34,21	32,99	28,73	21,75	14,31	8,25	4,20	1,89	0,75	0,26	0,08	0,02	0,00		
	3	52,66	51,72	47,13	38,00	26,85	16,75	9,28	4,58	2,01	0,79	0,27	0,08	0,02	0,00		
	4	68,74	65,49	56,52	43,23	29,35	17,79	9,65	4,70	2,04	0,79	0,27	0,08	0,02	0,00		
	5	80,57	74,32	61,69	45,73	30,39	18,17	9,78	4,73	2,05	0,80	0,27	0,08	0,02	0,01	0,00	
	6	88,03	79,17	64,14	46,77	30,77	18,29	9,81	4,74	2,05	0,80	0,27	0,08	0,02	0,01	0,00	—
	7	92,14	81,50	65,17	47,15	30,89	18,32	9,82	4,74	2,05	0,80	0,27	0,08	0,02	0,02	—	—
22	0	4,35	4,35	4,35	4,33	4,09	3,43	2,47	1,53	0,83	0,39	0,16	0,06	0,02	0,01	0,00	
	1	16,30	16,30	16,25	15,56	13,34	9,89	6,36	3,58	1,77	0,78	0,30	0,10	0,03	0,01	0,00	
	2	33,04	32,99	32,05	28,43	22,09	14,99	8,96	4,74	2,23	0,94	0,35	0,11	0,03	0,01	0,00	
	3	51,05	50,32	46,45	38,24	27,73	17,81	10,20	5,23	2,40	0,99	0,36	0,12	0,03	0,01	0,00	
	4	67,13	64,41	56,43	44,04	30,62	19,08	10,69	5,40	2,45	1,00	0,36	0,12	0,03	0,01	0,00	
	5	79,28	73,78	62,14	46,93	31,89	19,57	10,86	5,45	2,46	1,00	0,36	0,12	0,03	0,01	0,00	
	6	87,19	79,13	64,99	48,20	32,38	19,74	10,91	5,46	2,47	1,00	0,36	0,12	0,03	0,01	0,00	
	7	91,72	81,81	66,24	48,69	32,55	19,79	10,92	5,46	2,47	1,00	0,36	0,12	0,03	0,01	0,00	—

n	a \ b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
23	0	4,17	4,17	4,17	4,15	3,98	3,41	2,53	1,62	0,91	0,45	0,20	0,08	0,03	0,01	0,00	
	1	15,67	15,67	15,63	15,10	13,20	10,07	6,26	3,91	2,02	0,93	0,38	0,14	0,04	0,01	0,00	
	2	31,88	31,85	31,12	28,05	22,33	15,59	9,62	5,28	2,59	1,14	0,45	0,16	0,05	0,01	0,00	
	3	49,53	48,97	45,71	38,35	28,47	18,79	11,10	5,89	2,82	1,21	0,47	0,16	0,05	0,01	0,00	
	4	65,57	62,45	56,21	44,63	31,77	20,31	11,72	6,12	2,89	1,23	0,47	0,16	0,05	0,01	0,00	
	5	77,99	73,15	62,45	48,00	33,29	20,93	11,94	6,19	2,91	1,24	0,47	0,16	0,05	0,01	0,00	
	6	86,32	78,98	65,69	49,51	33,91	21,15	12,02	6,21	2,91	1,24	0,47	0,16	0,05	0,01	0,00	
	7	91,24	82,02	67,18	50,13	34,14	21,24	12,04	6,21	2,91	1,24	0,47	0,16	0,05	0,01	0,00	
	8	93,83	83,44	67,79	50,36	34,21	21,25	12,04	6,21	2,91	1,24	0,47	0,16	0,05	0,01	0,00	—
24	0	4,00	4,00	4,00	3,99	3,85	3,37	2,57	1,71	1,00	0,52	0,24	0,10	0,03	0,01	0,00	
	1	15,08	15,08	15,05	14,64	13,03	10,20	6,98	4,22	2,26	1,08	0,46	0,18	0,06	0,02	0,00	
	2	30,80	30,78	30,22	27,63	22,47	16,11	10,24	5,82	2,96	1,36	0,56	0,21	0,07	0,02	0,01	0,00
	3	48,09	47,66	44,93	38,34	29,10	19,70	11,97	6,56	3,25	1,46	0,59	0,21	0,07	0,02	0,01	0,00
	4	64,06	62,17	55,88	45,21	32,81	21,47	12,73	6,85	3,35	1,49	0,60	0,22	0,07	0,02	0,01	0,00
	5	76,70	72,45	62,64	48,93	34,60	22,24	13,02	6,95	3,38	1,49	0,60	0,22	0,07	0,02	0,01	0,00
	6	85,41	78,74	66,28	50,71	35,36	22,53	13,12	6,98	3,39	1,50	0,60	0,22	0,07	0,02	0,01	0,00
	7	90,72	82,15	68,02	51,47	35,65	22,63	13,15	6,99	3,39	1,50	0,60	0,22	0,07	0,02	0,01	0,00
	8	93,61	83,80	68,77	51,76	35,75	22,66	13,16	6,99	3,39	1,50	0,60	0,22	0,07	0,02	0,01	0,00
25	0	3,85	3,85	3,85	3,84	3,73	3,33	2,60	1,78	1,08	0,58	0,28	0,12	0,05	0,02	0,00	
	1	14,53	14,53	14,51	14,20	12,84	10,28	7,24	4,51	2,51	1,25	0,56	0,22	0,08	0,03	0,01	0,00
	2	29,79	29,78	29,35	27,16	22,54	16,55	10,82	6,34	3,34	1,59	0,68	0,26	0,09	0,03	0,01	0,00
	3	46,73	46,40	44,11	38,24	29,62	20,52	12,81	7,23	3,70	1,72	0,73	0,28	0,10	0,03	0,01	0,00
	4	62,61	62,03	55,46	45,60	33,74	22,57	13,72	7,60	3,84	1,76	0,74	0,28	0,10	0,03	0,01	0,00
	5	75,43	71,70	62,71	49,73	35,80	23,49	14,09	7,73	3,88	1,78	0,74	0,28	0,10	0,03	0,01	0,00
	6	84,47	78,42	66,74	51,79	36,72	23,86	14,22	7,77	3,89	1,78	0,74	0,28	0,10	0,03	0,01	0,00
	7	90,14	82,19	68,75	52,70	37,09	23,99	14,26	7,79	3,89	1,78	0,74	0,28	0,17	0,03	0,01	0,00
	8	93,34	84,08	69,65	53,07	37,22	24,04	14,28	7,80	3,90	1,78	0,74	0,28	0,10	0,03	0,01	0,00



n	a \ b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
26	0	3,70	3,70	3,70	3,70	3,62	3,27	2,62	1,84	1,15	0,64	0,32	0,14	0,06	0,02	0,01	0,00	
	1	14,02	14,02	14,01	13,76	12,62	10,32	7,45	4,78	2,75	1,42	0,66	0,28	0,10	0,04	0,01	0,00	
	2	28,85	28,83	28,50	26,67	22,53	16,92	11,35	6,84	3,72	1,84	0,82	0,33	0,12	0,04	0,01	0,00	
	3	45,44	45,19	43,27	38,05	30,03	21,27	13,60	7,89	4,17	2,01	0,88	0,35	0,13	0,04	0,01	0,00	
	4	61,20	59,89	54,97	45,87	34,56	23,60	14,68	8,35	4,34	2,07	0,89	0,36	0,13	0,04	0,01	0,00	
	5	74,16	70,90	62,67	50,42	36,91	24,69	15,14	8,52	4,40	2,08	0,90	0,36	0,13	0,04	0,01	0,00	
	6	83,52	78,03	67,10	52,76	38,00	25,15	15,31	8,58	4,42	2,09	0,90	0,36	0,13	0,04	0,01	0,00	
	7	89,54	82,16	69,39	53,84	38,46	25,32	15,37	8,60	4,42	2,09	0,90	0,36	0,13	0,04	0,01	0,00	
	8	93,02	84,30	70,45	54,30	38,63	25,38	15,39	8,60	4,42	2,09	0,90	0,36	0,13	0,04	0,01	0,00	
	9	94,85	85,31	70,90	54,47	38,69	25,40	15,40	8,60	4,42	2,09	0,90	0,36	0,13	0,04	0,01	0,00	
27	0	3,57	3,57	3,57	3,57	3,51	3,21	2,63	1,90	1,22	0,70	0,36	0,17	0,07	0,03	0,01	0,00	
	1	13,55	13,55	13,54	13,35	12,39	10,33	7,64	5,03	2,98	1,59	0,77	0,34	0,13	0,05	0,02	0,00	
	2	27,96	27,95	27,70	26,16	22,46	17,23	11,83	7,32	4,11	2,09	0,97	0,41	0,16	0,05	0,02	0,00	
	3	44,22	44,03	42,42	37,79	30,36	21,94	14,36	8,55	4,65	2,31	1,05	0,44	0,16	0,06	0,02	0,00	
	4	59,85	58,75	54,42	46,04	35,28	24,57	15,62	9,10	4,87	2,39	1,07	0,44	0,17	0,06	0,02	0,01	0,00
	5	72,92	70,06	62,55	50,99	37,93	25,84	16,17	9,32	4,94	2,41	1,08	0,44	0,17	0,06	0,02	0,01	0,00
	6	82,55	77,58	67,37	53,63	39,20	26,39	16,39	9,40	4,97	2,42	1,08	0,44	0,17	0,06	0,02	0,01	0,00
	7	88,89	82,05	69,93	54,89	39,76	26,61	16,47	9,42	4,98	2,42	1,08	0,44	0,17	0,06	0,02	0,01	0,00
	8	92,67	84,45	71,17	55,44	39,98	26,69	16,50	9,43	4,98	2,42	1,08	0,44	0,17	0,06	0,02	0,01	0,00
	9	94,71	85,62	71,72	55,66	40,05	26,72	16,50	9,43	4,98	2,42	1,08	0,44	0,17	0,06	0,02	0,01	0,00
28	0	3,45	3,45	3,45	3,45	3,40	3,15	2,63	1,94	1,28	0,76	0,40	0,20	0,09	0,03	0,01	0,00	
	1	13,10	13,10	13,10	12,95	12,15	10,31	8,15	5,26	3,20	1,76	0,88	0,40	0,17	0,06	0,02	0,01	0,00
	2	27,12	27,11	26,92	25,63	22,35	17,48	12,27	7,78	4,49	2,36	1,13	0,50	0,20	0,07	0,02	0,01	0,00
	3	43,06	42,91	41,57	37,47	30,59	22,54	15,07	9,19	5,13	2,62	1,23	0,53	0,21	0,08	0,02	0,01	0,00
	4	58,54	57,63	53,82	46,12	35,91	25,46	16,52	9,85	5,40	2,73	1,27	0,54	0,21	0,08	0,02	0,01	0,00
	5	71,69	69,19	62,35	51,47	38,86	26,92	17,18	10,12	5,50	2,76	1,28	0,54	0,21	0,08	0,02	0,01	0,00
	6	81,57	77,08	67,54	54,40	40,32	27,59	17,46	10,22	5,54	2,77	1,28	0,54	0,21	0,08	0,02	0,01	0,00
	7	88,22	81,89	70,39	55,86	40,98	27,86	17,56	10,26	5,55	2,78	1,28	0,54	0,21	0,08	0,02	0,01	0,00
	8	92,28	84,56	71,82	56,52	41,26	27,96	17,59	10,27	5,55	2,78	1,28	0,54	0,21	0,08	0,02	0,01	0,00
	9	94,53	85,88	72,46	56,79	41,36	28,00	17,60	10,27	5,55	2,78	1,28	0,54	0,21	0,08	0,02	0,01	0,00

n \ a \ b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
29	0	3,33	3,33	3,33	3,30	3,09	2,62	1,98	1,34	0,81	0,45	0,22	0,10	0,04	0,02	0,01	0,00
	1	12,69	12,69	12,57	11,90	10,26	7,92	5,47	3,42	1,94	1,00	0,47	0,20	0,08	0,03	0,01	0,00
	2	26,33	26,33	26,18	25,10	22,19	17,67	12,66	8,22	4,86	2,63	1,30	0,59	0,25	0,09	0,03	0,00
	3	41,96	41,84	40,73	37,10	30,75	23,07	15,74	9,81	5,62	2,95	1,43	0,64	0,26	0,10	0,03	0,00
	4	57,28	56,53	53,18	46,12	36,44	26,28	17,39	10,59	5,95	3,08	1,48	0,65	0,26	0,10	0,03	0,00
	5	70,49	68,31	62,07	51,85	39,70	27,95	18,17	10,92	6,08	3,13	1,49	0,66	0,27	0,10	0,03	0,00
	6	80,59	76,53	67,64	55,10	41,37	28,73	18,50	11,05	6,12	3,14	1,50	0,66	0,27	0,10	0,03	0,00
	7	87,53	81,67	70,78	56,74	42,15	29,07	18,63	11,10	6,14	3,15	1,50	0,66	0,27	0,10	0,03	0,00
	8	91,86	84,59	72,39	57,51	42,48	29,20	18,68	11,11	6,14	3,15	1,50	0,66	0,27	0,10	0,03	0,00
	9	94,33	86,10	73,15	57,84	42,61	29,24	18,69	11,12	6,14	3,15	1,50	0,66	0,27	0,10	0,03	0,00
10	95,62	86,81	73,47	57,98	42,66	29,26	18,70	11,12	6,14	3,15	1,50	0,66	0,27	0,10	0,03	0,01	0,00
30	0	3,23	3,23	3,23	3,22	3,02	2,61	2,01	1,39	0,87	0,49	0,25	0,12	0,05	0,02	0,01	0,00
	1	12,30	12,30	12,30	12,21	11,65	10,19	8,01	5,66	3,62	2,11	1,12	0,54	0,24	0,10	0,04	0,00
	2	25,59	25,58	25,47	24,57	21,99	17,81	13,02	8,64	5,23	2,90	1,48	0,69	0,30	0,12	0,04	0,00
	3	40,91	40,82	39,89	36,69	30,85	23,54	16,36	10,42	6,10	3,29	1,64	0,75	0,32	0,12	0,04	0,00
	4	56,07	55,45	52,50	46,04	36,90	27,05	18,21	11,32	6,50	3,46	1,70	0,77	0,33	0,13	0,04	0,00
	5	69,31	67,41	61,74	52,15	40,46	28,92	19,12	11,72	6,66	3,52	1,72	0,78	0,33	0,13	0,04	0,00
	6	79,61	75,94	67,66	55,68	42,34	29,83	19,52	11,88	6,72	3,54	1,73	0,78	0,33	0,13	0,04	0,00
	7	86,82	81,60	71,08	57,54	43,24	30,23	19,68	11,94	6,74	3,54	1,73	0,78	0,33	0,13	0,04	0,00
	8	91,41	84,57	72,89	58,44	43,65	30,40	19,74	11,96	6,75	3,54	1,73	0,78	0,33	0,13	0,04	0,00
	9	94,10	86,26	73,77	58,84	43,81	30,46	19,76	11,97	6,75	3,54	1,73	0,78	0,33	0,13	0,04	0,00
10	95,54	87,09	74,16	59,00	43,87	30,48	19,77	11,97	6,75	3,54	1,73	0,78	0,33	0,13	0,04	0,02	0,00



## AZ OSZTÁLY MUNKATÁRSAINAK AZ OSZTÁLY MUNKÁJÁNAK EREDMÉNYEIT TARTALMAZÓ, MÁSUTT MEGJELENT DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

- Rényi Alfréd:* Az aprítás matematikai elméletéről. Építőanyag (1950) 1—8.
- Rényi Alfréd:* A Poisson-eloszlás problémaköréről. MTA III. o. Közleményei, 1 (1950), 202—212. o.
- Rényi Alfréd:* On the algebra of distributions, Publ. Math. 1 (1950) 135—149. o.
- Rényi Alfréd:* A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének feladatairól. Akadémiai Értesítő (1951) 1—7. o.
- Rényi Alfréd:* Hőmunkások víz- és sóanyagcseréje. Orvosi Hetilap (1951) 1—20. o.
- Rényi Alfréd:* On some problems concerning Poisson processes. Publ. Math. 2 (1951) 66—73. o.
- Rényi Alfréd:* Újabb eredmények a valószínűségszámítás terén. MTA III. o. Közleményei, 2 (1952) 125. o.
- Rényi Alfréd:* Valószínűségeloszlások vetületeiről. Acta Mathematica. (Sajtó alatt.)
- Rényi Alfréd:* Sztochasztikus függetlenség és teljes függvényrendszerek. I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, 299—308. o.
- Rényi Alfréd:* A valószínűségszámítás elvi kérdései a dialektikus materializmus megvilágításában. Filozófiai Évkönyv, 1952. (Sajtó alatt.)
- Jánossy Lajos, Rényi Alfréd és Aczél János:* Összetett Poisson-eloszlásokról I. MTA III. o. Közleményei, 1 (1951) 315—328. o.
- Rényi Alfréd:* Összetett Poisson-eloszlásokról II. u. o. I (1951) 329—342. o.
- Aczél János:* Összetett Poisson-eloszlásokról III. Acta Mathematica. (Sajtó alatt.)
- Prékopa András:* Összetett Poisson-eloszlásokról IV. u. o. (Sajtó alatt.)
- Rényi A.—Turán P.:* Két bizonyítás Jánossy Lajos egy tételére. MTA III. o. Közleményei, 1 (1951) 369. o.
- Rényi A.—Hajós Gy.:* A rendstatistika néhány alapvető kérdéséről. Acta Mathematica. (Sajtó alatt.)
- Rényi A.—Szentmártony T.:* Gépalkatrészek és felszerelési tárgyak törzskészítésének valószínűségszámítási meghatározása. Matematikai Lapok 3 (1952) 129—139. o.
- Rényi A.—Pukánszky L.:* On the approximation of measurable functions. Publications Math. 2 (1951) 146—149. o.
- Székelly G.:* A kötörés valószínűségszámítási tárgyalásáról. MTA. III. o. Közleményei. I. 1. 245—249. o.
- Takács Lajos:* Több gép egyidejű működésének valószínűségszámítási tárgyalása. Magyar Technika (1950) 11—12, 61—63. o.
- Takács Lajos:* Gépegyüttállások valószínűségszámítási tárgyalása, tekintettel a várakozási időre. MTA III. o. Közleményei, I. 1. 228—235. o.
- Takács Lajos:* Bekövetkezési és koincidencia jelenségek időtartamban tetszőleges eloszlású történések esetén. u. o. I. 2. 371. o.
- Takács Lajos:* Koincidencia jelenségek állandó időtartamú események esetén. I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, 731—740. o.
- Takács Lajos:* Időtartamban tetszőleges eloszlású történésekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról. Acta Math. (Sajtó alatt.)
- Takács Lajos:* Poisson-eloszlás által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatokról és azok fizikai alkalmazásáról. (Sajtó alatt.)



## A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI ÉS MATEMATIKAI STATISZTIKAI OSZTÁLYOK SZEMINÁRIUMÁBAN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK KIVONATAI

A valószínűségszámítási és matematikai statisztikai osztály rendszeresen tart közös szemináriumokat, amelyeken az osztály munkatársai az általuk elért újabb eredményekről, továbbá az általuk feldolgozott újabb szakirodalomról számolnak be. Az osztályértekezleteken nemcsak az osztály munkatársai, hanem meghívott vendégek is résztvesznek. Az előadásokat a résztvevők részletesen megvitatják. Az alábbiakban közöljük az 1952. évi osztályértekezleteken elhangzott előadások rövid kivonatát.

*L'incze István* beszámolója a Csehszlovákiában szerzett tapasztalatokról. 1952. január 7.

Előadó beszámolt a Csehszlovák Központi Matematikai Intézet szervezetéről és működéséről, továbbá a prágai Tudományegyetemen folyó matematikus- és matematikai statisztikus-képzésről, végül pedig néhány kutatóintézet matematikai csoportjának munkájáról. Foglalkozott a beszámoló a Csehszlovák Matematikai Intézetben folyó aspiránsképzéssel, a Csehszlovákiában megjelent matematikai szakkönyvekkel és az ipari minőségellenőrzés statisztikai módszereinek bevezetésével a csehszlovák iparban és az ezzel kapcsolatos tudományos és szervező munkával.

*Zierrmann Margit*: Braginszkij: Operatív statisztikai minőségellenőrzés a gép- iparban az individuális értékelés módszere alapján. Moszkva. 1951. c. munkájának ismertetése. 1952. január 21.

Szerző minőségellenőrzési eljárása a gyártásközbéli minőségellenőrzés figyelemreméltó új módszere. E módszer lényege az, hogy előre megállapított  $n$  számú darabból álló minta (szerző legalább 4–5 darabból álló mintavételt ajánl) valamely ellenőrizendő adatát megmérve, a kapott méretek alapján a mintadarabokat nagyság szerinti sorrendben helyezi s oly kontrollkártyát készít, amelyen a toleranciahatárokon belül  $n$  sáv jelzi, hogy hová kell esnie a nagyságszerinti első, második stb. mérési adatnak ahhoz, hogy a termelési folyamatot kielégítőnek mondhasuk. Mihelyt valamelyik méret a megismételt mintavétel során többször is kiugrik a neki megállapított sávból, vagy e sávok határain sűrűsödik, úgy az annak a jele, hogy a termelési folyamatban (az általunk feltételezett eloszláshoz képest) valami eltolódás állt be, tehát figyelmeztetni kell a termelőt a selejt veszélyére. A módszer elméletileg a rendstatisztika ismert tételein alapszik.

*Zierrmann Margit*: A rendstatisztikával kapcsolatos néhány problémáról. 1952. február 4.

Az előadás tárgya a rendstatisztika néhány tételének bizonyítása volt, melyek Braginszki minőségellenőrzési módszerével kapcsolatosak.

Legyenek adva a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  független valószínűségi változók, amelyek eloszlásfüggvénye  $F(x)$  folytonos. Rendezzük a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  valószínűségi változókat nagyság szerint, úgy új valószínűségi változókat kapunk, legyenek ezek  $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_n$ . Az új valószínűségi változókkal kapcsolatban különböző vizsgálatok folytathatók.

Előadó meghatározta  $\zeta_k = F(\eta_k)$  valószínűség-eloszlását, várható értékét, szórását, valamint megvizsgálta a  $\delta_k = \zeta_{k+1} - \zeta_k$  és  $\frac{\zeta_k}{\zeta_{k+1}}$  valószínűségi változók eloszlását.

*Szentmártony Tibor*: Rendstatisztika (összefoglaló ismertetés). 1952. március 3.

A rendstatisztika egy  $S$  statisztikai sokaságból vett minta nagyság szerint rendezett  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  elemeiből igyekszik  $S$ -re visszakövetkeztetni. Különösen értékesek természetesen az  $S$ -nek  $F(x)$  eloszlásfüggvényétől független, ú. n. eloszlásmentes következtetések. Így alapvető, hogy ama  $n+1$  szakasz-hosszúságok, melyekre  $[0,1]$  az  $F(x_i)$  pontokkal osztható, eloszlásmentes eloszlást mutatnak. Nevezetes eloszlásmentes megbízhatósági határokat szolgáltatnak rendezett mintaelemek, pl. az  $S$  quantilisre, továbbá az  $S$ -re vonatkozó türesi határookra.

Maga  $x_r$  eloszlásfüggvénye már  $F(x)$ -től függ. Így került sor az eloszlásfüggvények  $n \rightarrow \infty$  esetén való aszimptotikus vizsgálatára. A központi határeloszlástételre emlékeztető teljességű eredményekre az  $x_1, x_n$  szélső mintaelemek esetén 1943-ban Gnyegyenko jutott. A közepes  $x_r$  elemekkel ily értelemben rendszeresen 1935-ben és 1949-ben N. Szmirnov foglalkozott a K. Pearson-tól származó  $r/n \rightarrow s \neq 0$  feltétel mellett. Több  $x_r$  kapcsolatát illetően az  $x_n - x$  mintaterjedelmre vonatkozó elért eredmények a legfontosabbak.

A rendstatisztika körébe tartozik *Kolmogorov*-nak az 1933-beli eredménye, amely a sokaság eloszlásfüggvényére a rendezett minta eloszlásfüggvénye segítségével ad aszimptotikusan ma már táblázattal jól használható megbízhatósági határokat.

A többméretű eloszlások rendstatisztikájában *A. Wald* ért el újabban eredményeket.

*Szentmártony Tibor*: Szekvenciális analízis (összefoglaló ismertetés). 1952 április 7.

A szekvenciális analízis folyamatos (előre nem rögzített elemszámú) mintavételre alapuló statisztikai eljárás. *Dodge* és *Romig* (1929) kettős, majd *Bartly* (1943) többes mintavételi eljárása alapján a brassói származású s a közelmúltban tragikusan elhunyt *Wald Ábrahám* 1943–45-ben építette ki, majd különösen *I. Wolfowitz*, *M. A. Girschik*, *D. Blackwell* és *P. Armitage* fejlesztette tovább. Jelentős *A. N. Kolmogorov* és *Iu. Prohorov* dolgozata, amely változó számú valószínűségi változó összegének várható értékére vonatkozik és *Wald* egy tételét alapozza meg. Az eljárás egy  $S$  sokaság  $f(x, \theta)$  diszkrét vagy folytonos valószínűségeloszlásnak  $\theta$  paraméterére vonatkozó  $H_1$  hipotézisek vizsgálatára, valamint  $\theta$  becslésére használható. Mindkét esetben az  $S$ -ből vett  $x_1, x_2, \dots, x_m$  minták növekvő  $m$  elemszámú sorozata alapján. Ha pl. az egyszerű  $H_1(\theta = \theta_1)$  hipotézisnek a  $H_2(\theta = \theta_2)$  hipotézissel szembeni vizsgálatáról van szó, a helyes  $H_1$  elutasításánál megengedett kis  $\alpha_1$  és a helytelen  $H_2$  elfogadásának megengedett kis  $\alpha_2$  valószínűsége mellett, akkor az eljárás a következő: Legyen  $Z_m$  az  $m$  számú  $f(x_1, \theta_2)/f(x_1, \theta_2)$  hányadosok szorzata. A mintavétel a  $H_1$  elfogadásával, illetve elutasításával befejezik, mihelyt  $Z_n \leq A_1 (\geq \alpha_2/(1 - \alpha_1))$ , illetve  $Z_n \geq A_2 (\leq (1 - \alpha_2)/\alpha_1)$ . Az eljárás értékelésére a  $H_1$  elfogadási valószínűségét adó  $L(\theta)$  műveletjellemző függvény és az  $E(n, \theta)$  várható elemszám szolgál. Az előbbinek a  $H_1$  hipotézis helyessége esetében nagynak, különben kicsinek kell lenni. A fenti példában  $L(\theta_1) = 1 - \alpha_1$ , míg  $L(\theta_2) = \alpha_2$ . Általában kimutatható, hogy ha a  $\vartheta = f(x; \theta_2)/f(x; \theta_1)$  viszony egy alkalmas  $h(\theta)$  hatványának a  $S$  eloszlásfüggvénye szerinti integrálja a  $(-\infty, \infty)$  szakaszon 1, akkor  $L(\theta)$  és  $E(n; \theta)$  az  $A_1, A_2, h(\theta)$ , valamint  $\log v$  várható értékével kifejezhető.

A szekvenciális analízist egyes esetekben kettőnél több hipotézisre is kiterjesztették. Egyelőre azonban csak paraméteres elmélet. Ezzel szemben aszimptotikus eloszlásokra, amelyek csak nagy elemszámú minta esetében érvényesek, nem támaszkodik, a minta elemszámának bizonytalanságától mentes elmélet, amely sokszor 50%-os megtakarítást is lehetővé tesz.

*Fontányi Ágota*: Az Ipari Minőségellenőrző Intézet munkája és tapasztalatai a matematikai statisztikai módszerek alkalmazása terén. 1952 április 21.

Ismertette, hogy az IMEI volt az, amely hazai viszonylatban elsőnek kezdett foglalkozni a statisztikai minőségellenőrzés kérdésével éppen hivatásánál fogva s ismerette, hogy hol voltak nehézségek s miben álltak azok. (Tapasztalat hiánya és irodalomhiánya, a módszer bevezetéséhez szükséges jogkör hiánya.)

Ezután beszámolt a Csavarárugyárban végzett kontrollkártyás ellenőrzés szervezéséről, sikereiről és arról, hogy szervezési hibák hogyan akadályozták a munkát. Ismertette a csavarszabvány mintavételi részének valószínűségszámítás alapján való módosítását. Az egyesült Izzógyárban üvegalkatrészt készítő automatákon végeztek adatfelvételezést, melyek alapján a max.-min. kontrollkártya vezetését lehet végezni. Ugyanezen üzemenrészben a szuperrevíziót a statisztikai mintavétel alapjaira fektették. Ismertette az IMEI munkáját és szakvéleményét a R. M. Művek Kerékpárgyára számára csapágygolyók vizsgálatával kapcsolatban.

*Theiss Ede*: Statisztikai minőségellenőrzés többdimenziós eloszlások alapján. 1952 április 28. (összefoglaló ismertetés)

Ha a statisztikai minőségellenőrzés a szuperrevízió vagy a gyártási folyamat megjavítása céljából a gyártmányoknak a tényleges felhasználás körülményei között való költséges kipróbálásánál nyer alkalmazást, úgy a vizsgálatoknál maximális pontosságra kell törekedni. Ilyenkor figyelembe kell venni, hogy a gyártmány vizsgált, különböző tulajdonságai egymástól nem függetlenek, vagyis a különböző valószínűségi változók, mint valószínűségi vektor-változók egy többdimenziós eloszlásfüggvény által vannak meghatározva. E függvények figyelembevételére a zavaró tényezők hatásának megállapításánál legegyszerűbb, ha a Student-féle hányadosnak *Hotelling* által megadott általánosításából indulunk ki.

Ha  $n$  elemből álló mintákat veszünk és mindig  $k$  fajta tulajdonságot vizsgálunk, akkor a  $v$ -ik elem észlelt értékei legyenek  $x_{1v}, x_{2v}, \dots, x_{kv}$ . Ezekből képezzük a következő momentumokat:

$$l_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n (x_{iv} - \bar{x}_i)(x_{jv} - \bar{x}_j)$$

Itt  $\bar{x}_i$  és  $\bar{x}_j$  a megfelelő tulajdonságok mintacsoportbeli középértékei. A momentumok determinánsa legyen  $L = |l_{ij}|$  és az  $l_{ij}$  elemhez tartozó aldetermináns  $L_{ij}$ . Ez esetben a Hotelling-féle hányados

$$T^2 = (n-1) \sum_{i=j} \frac{L_{ij}}{L} \bar{x}_i \bar{x}_j$$

itt feltételezzük, hogy az egyes  $x$  értékek átlagtól való eltérések. A  $T$  hányados eloszlásfüggvénye ismeretes és visszavezethető a Fisher-féle  $z$ -eloszlásra.

A fentiek alapján a  $T$  hányadosra nézve megállapíthatjuk a 0,05 és 0,01 valószínűségnek megfelelő kontrollhatárokat, amelyek segítségével a  $T$  értékekre vonatkozóan kontrolldiagramm szerkeszthető. Amennyiben valamilyen mintából számított  $T$  érték a valószínűségi szintnek megfelelő küszöbértékeknél nagyobb, úgy ez olyan szignifikáns zavaró hatást jelez, amely egyébként esetleg az egyes tulajdonságokra külön-külön szerkesztett ellenőrző diagrammban nem mutatkozik. Mint az előadás egy konkrét példán szemléltette, célszerű a tulajdonságok különböző kombinációinak alapulvételével többféle  $T$  hányadosra ellenőrző diagrammokat szerkeszteni.

*Medgyessy Pál:* Nem független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásáról. 1952 május 5., 12., 19., 26.

Ismertette Sz. Bernstein: Sur l'extension du theorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes (Math. Ann. 97. 1927. 1–59.) című cikkének legfontosabb kérdéseit, melyek kimutatják, hogy bizonyos megkötések mellett, nem független valószínűségi változók összegeinek határeloszlása tart a normális eloszláshoz.

A tételeket Bernstein Markov-lánecokra alkalmazta. Ebben az irányban jelentős lépéssel továbbjutott Ju. V. Linnik: K teorii nyeodnorodnih cepej Markova (Az inhomogén Markov-lánecok elméletéhez) (Izv. Ak. N. Sz. Sz. R. Szer. Mat. 13 (1949) 65–94 c. cikkében, melyet előadó szintén ismertetett.

*Rényi Alfréd:* Kompresszorok és légtartályok racionális méretezése üzemek sűrített levegővel való ellátására. 1952 június 9 (lásd hasonló című cikket).

*Rényi Alfréd:* Üzemek egyidejűségi tényezőjének valószínűségszámítási vizsgálata. 1952 július 6. (lásd hasonló című cikket).

*Prékopa András:* Összetett Poisson-folyamatokról. 1952 augusztus 24.

Előadó rövid, direkt bizonyítást adott az általános formulák segítségével is bizonyítható azon tételre vonatkozólag, hogy ha egy  $\xi_t$  additív sztochasztikus folyamat időben homogén és csak egész értékeket vesz fel, akkor ha  $f(u, t)$ -vel jelöljük  $\xi_t$  karakterisztikus függvényét, ez a következő alakban állítható elő:

$$f(u, t) = \exp t \sum_{k \neq 0} C_k (e^{iku} - 1)$$

ahol

$$C_k \geq 0 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \sum_{k \neq 0} C_k < \infty$$

*Rényi Alfréd:* Beszámoló az 1952 szeptemberében Wrocławban (Lengyelország) sztochasztikus folyamatokról tartott konferenciáról. 1952 október 10.

Előadó röviden ismertette H. Steinhaus, E. Marcewski, C. Ryll-Nardzewski, S. Hartman, I. Los és mások, a konferencián tartott előadásait, valamint általában Lengyelországban szerzett tapasztalatait.

*Medgyessy Pál:* A Galton-deszkával kapcsolatos néhány problémáról. 1952 október 5. (Lásd a hasonló című cikket.)

*Székelly Gábor:* Kötörési energiaszükségletének minimalizálása az elő- és után-  
törők legcélszerűbb beállításával. 1952 november 9. (lásd a hasonló című cikket).

*Takács Lajos:* Poisson-folyamatok által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásairól. 1952 november 23.

Tekintsünk egy  $\lambda(u)$  sűrűséggel jellemzett Poisson-folyamatot. Az egyes események indításának el  $f(u, x)$  lefolyású jeleket, ahol  $x$  valószínűségi változó. Jelöljük a  $(0, t)$  intervallumban kezdődő jelek összegét  $t$  időpontban  $\eta(t)$  valószínűségi függvénnyel és a  $(-\infty, t)$  intervallumban kezdődő jelek összegét  $t$  időpontban  $\eta^*(t)$  valószínűségi függvénnyel. Az  $\eta(t)$  és  $\eta^*(t)$  folyamatok, melyek általában nem-Markov folyamatok, Markov folyamatokra vezethetők vissza és így meghatározhatók  $\eta(t)$  és  $\eta^*(t)$  eloszlásfüggvényei, továbbá  $\lambda(u) = \lambda$  (állandó) esetben megadható  $\eta^*(t)$  harmonikus analízise. Ezután előadó példákat adott a részecskeszámlálás köréből.

*Takács Lajos:* Poisson-folyamat által származtatott történések folyamatáról. 1952 december 7.

Tekintsünk egy időben homogén Poisson-folyamatot, melyben az előforduló események mindegyike létrehoz egy történést, melynek időtartama valószínűségi változó. Rényi A. kimutatta, hogy egy adott időpontban folyó történések száma Poisson-eloszlást mutat. Meghatározza az egymást követő történésszakaszok kezdőpontjai közötti távolságok eloszlásfüggvényét, melynek ismeretében több probléma megoldható. A kérdéssel az irodalomban *Lever* és *Schen*, *Kosten* és *Domb* foglalkozott, de csak állandó időtartamú történések esetén. Tárgyalási módjuknál sokkal egyszerűbben, egy új módszer segítségével sikerült magát az általános problémát is megoldani.

*Takács Lajos:* Várakozási idő probléma általános tárgyalása Poisson-folyamatok segítségével. 1952 december 14.

Meghatározandó egy kiszolgáló berendezéshez Poisson-folyamat szerint érkező személyek várakozási idejének eloszlásfüggvénye, azon feltevések mellett, hogy a kiszolgálás érkezési sorrendben történik és a kiszolgálási idő tetszőleges eloszlást mutató valószínűségi változó. A tárgyalás általánosabb és sokkal egyszerűbb, mint Th. C. Fry, F. Pollaczek, A. N. Kolmogorov és A. J. Hincsin speciális esetekre adott megoldásai.





7

**MATEMATIKAI STATISZTIKAI OSZTÁLY**



## A REGRESSZIÓS EGYÜTTTHATÓ MEGHATÁROZÁSA ADOTT ALAPPONTOK ESETÉN

VINCZE ISTVÁN

### ÖSSZEFOGLALÁS

Az  $x$  és  $y$  változók között lineáris kapcsolat áll fenn:  $y = Rx + Q$ . Az  $R$  (és  $Q$ ) állandók meghatározására  $x$ -nek rögzített  $a_1, a_2 \dots a_s$  értékei mellett összesen  $N$  számú mérést végzünk. Kérdés, hogyan osszuk el az  $a_i$  pontok között az  $N$  számú mérést, hogy a  $R$  tapasztalati regressziós együttható szórásnégyzete minimum legyen. Feltesszük, hogy az  $a_i$ -k pontos értékek, tehát nem valószínűségi változók, továbbá, hogy az  $a_i$ -ben mért  $y$  értékek azonos eloszlást követnek, szórásuk az  $a_i$  ponttól függ:  $\sigma(a_i)$ .

*Bebizonyítjuk, hogy e feltételek mellett a regressziós egyenest az  $s$  számú  $a_i$  pont közül elég két vagy legfeljebb három pontban végzett mérés alapján meghatározni. A két- és hárompontos extrémálisok.*

Ha  $\sigma_i$  = állandó ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), akkor mindig két pontban és pedig a két szélső  $a_i$  pontban — kell méréseket végeznünk, egyenlő arányban osztva el a mérések számát.

A dolgozat foglalkozik még a regressziós együttható módosított definíciójával, amelynél a szélsőértékfeladat egyszerűbben tárgyalható és egyszerűbben kezelhető — ha nem is feltétlenül jobb — eredményre vezet.

### Bevezetés

Az alábbiakban tárgyalt matematikai statisztikai probléma a Biokémiai Ipari Kutató Laboratórium munkája során merült fel egy koncentráció-mérési eljárás pontosságának vizsgálata és az eljárás egyszerűsítésére irányuló kutatás során. A feladatot a matematikai statisztika módszereivel megvizsgáltuk, eredményeink alapján a Kutató Laboratórium a mérési eljárást jelentősen egyszerűsítette és ugyanakkor pontosabbá tette. A mérésnél az eddiginél sokkal kisebb számú különböző hígítású oldattal kell dolgozni és ennek megfelelően az értékelés munkája is lényegesen egyszerűsödött. Ez lehetővé tette, hogy azok a kisebb intézetek, amelyek munkájához ez szükséges, a mérést önállóan elvégezzék.

A probléma felvetése *Tettamanti Károly*, a Kutató Laboratórium igazgatója részéről történt, aki a feladat matematikai megfogalmazásának munkájában is segítségemre volt.

E helyen köszönöm meg *Rényi Alfréd*-nek a probléma megoldása során tett értékes megjegyzéseit.



## 1. A probléma matematikai statisztikai megfogalmazása

Legyen az  $y$  változó mennyiség az  $x$  változó mennyiségnek — annak valamely  $(\alpha, \beta)$  intervallumában — lineáris függvénye :

$$y = Rx + Q.$$

Az ismeretlen  $R$  (és  $Q$ ) állandók meghatározására végezzünk  $y$  értékeire összesen  $n$  számú mérést az  $x$  változó rögzített  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_s$  értékei mellett és pedig az  $x = a_1$  helyen  $n_1$  számú, az  $x = a_2$  helyen  $n_2$  számú mérést, s. i. t., ahol

$$(1) \quad n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$$

Kérdés, hogyan osszuk el az egyes  $a_i$  helyek között az összesen  $n$  számú mérést ahhoz, hogy a tapasztalati regressziós együttható a »legjobb közelítését« nyújtsa az elméleti értéknek. Pontosabban : *hogyan válasszuk az  $n_1, n_2, \dots, n_s$  egész számokat az (1) feltétel mellett úgy, hogy a tapasztalati regressziós együttható szórásnégyzete minimális legyen*

$$\sigma^2(\varrho) = \min$$

Feladatunk feltételeit a következőkben foglaljuk össze :

a) Az  $a_1, a_2, \dots, a_s$  mennyiségek pontosan beállíthatók és mérhetők, tehát nem valószínűségi változók.

b) Az  $a_i$  pontban mért  $n_i$  számú  $y$ -ra nyert  $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{in_i}$  értékek független mérési adatok eredményei, eloszlásuk ugyanaz  $y = Rx + Q$  várható értékkel és  $\sigma_i(a_i) = \sigma_i$  szórással. Ez a követelmény fennáll  $i = 1, 2, \dots, s$ -re. Az  $\eta_{ik}$ -k ( $k = 1, 2, \dots, s$ ) közös eloszlása egyébként tetszőleges lehet.

## 2. A feltételek gyakorlati vonatkozásai

Azt, hogy az  $y$  és  $x$  változó mennyiségek között lineáris kapcsolat áll fenn, akár a tapasztalat támaszthatja alá, akár elméleti megfontolások nyújthatják. A regressziós egyenes lehető pontos meghatározása azt a célt szolgálja, hogy segítségével a változók további összetartozó értékeit határozhassuk meg numerikus vagy grafikus úton.

Az  $x$  változó mennyiség rögzített  $a_1, a_2, \dots, a_s$  értékeinek pontos, szórámentes beállíthatósága a gyakorlatban pl. olyan esetekben teljesül, ha az  $a_i$ -k maguk természetes számok : atomok rendszámai, bizonyos egyedek darabszámai stb. Ilyennek tekinthetők bizonyos feltételek mellett a fizikában vagy kémiában előforduló igen pontosan mérhető mennyiségek is, amelyeknél a mérési pontossághoz képest az  $a_i$ -k beállításánál elkövetett hibák elenyészőek, vagy pedig az  $x$  értékek beállításánál felmerülő szórások elhanyagolhatóan csekélyek a hozzájuk tartozó  $y$  értékek szórásaival szemben.

Az a feltevés, hogy valamely rögzített vagy rögzítettnek tekinthető  $x = a_i$  érték mellett az  $y$ -ra kapott mérési eredmények ugyanazt az eloszlást követik, kézenfekvő, ennek ellenére ezt tapasztalatilag ellenőrizni kell. Ennek a feltevésnek már következménye, hogy az  $y$  értékek szórását a megfelelő  $x$  érték függvényének tekinthetjük :  $\sigma(\eta_{ik}) = \sigma(a_i) = \sigma_i$  adott  $i$  mellett  $k = 1, 2, \dots, n_i$ -re,  $i = 1, 2, \dots, s$ -re. Erre nézve még a következőket jegyezzük

meg: az  $y$  és  $x$  kémiai vagy fizikai mennyiségek lineáris összefüggése rendszerint az  $x$ -nek valamely  $(\alpha, \beta)$  intervallumban áll fenn, ezenkívül vagy már nem érvényes a mennyiségek lineáris összefüggése, vagy egyáltalán nincsenek értelmezve a mennyiségek. Előfordulhat ilyen esetben, hogy az  $y$  értékek szórása az intervallum határai felé növekszik annak belsejében felvett értékeihez képest.

Különlegesen egyszerű a helyzet, mint azt alább megmutatjuk, ha a szórások azonosak  $x$  minden értékére.

### 3. A szélsőértékfeladat felállítása

Az 1. pontban használt jelölések figyelembevételével a tapasztalati regressziós együttható — a legkisebb négyzetek módszerének az ordináták különbségére való alkalmazásával — a következő:

$$\varrho = \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{n_i} (\eta_{ik} - \bar{\eta}_i) (a_i - \omega)}{\sum_{i=1}^s n_i (a_i - \omega)^2},$$

ahol

$$\bar{\eta}_i = \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{n_i} \eta_{ik}}{n}, \quad \omega = \frac{\sum_{i=1}^s n_i a_i}{n}, \quad \sum_{i=1}^s n_i = n.$$

Az

$$\bar{\eta}_i = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} \eta_{ik}}{n_i}$$

jelölés bevezetésével, valamint a  $\sum_{i=1}^s n_i (a_i - \omega) = 0$

összefüggés figyelembevételével  $\varrho$  kifejezése a következő

$$\varrho = \frac{\sum_{i=1}^s n_i (a_i - \omega) \bar{\eta}_i}{\sum_{i=1}^s n_i (a_i - \omega)^2}$$

$\varrho$  e kifejezésben csupán az  $\bar{\eta}_i$  valószínűségi változók szerepelnek, melyek szórásnégyzete —  $\eta_i$  előbbi értelmezése és az 1. §.  $\beta$ .) feltételei értelmében

$$\sigma^2(\bar{\eta}_i) = \frac{\sigma^2(\eta_{ik})}{n_i} = \frac{\sigma_i^2}{n_i},$$

ahol a  $\sigma$ -k a megfelelő elméleti eloszlások szórásai.

Az  $\bar{\eta}_i$ -k függetlensége miatt  $\varrho$  szórásnégyzete

$$(I) \quad \sigma^2(\varrho) = \frac{\sum_{i=1}^s n_i (a_i - \omega)^2 \sigma_i^2}{\left[ \sum_{i=1}^s n_i (a_i - \omega)^2 \right]^2}.$$

E kifejezést kell tehát minimummá tenni, figyelembe véve az

$$(I.1) \quad \frac{\sum_{i=1}^s a_i n_i}{n} = \omega$$

$$(I.2) \quad \sum_{i=1}^s n_i = n$$

összefüggéseket.

Szélsőértékfeladatunknak az analízis eszközei segítségével való megoldhatósága érdekében egyrészt az  $n_i$  egészszámokat folytonos változóknak tekintjük, másrészt pozitivitásuk biztosítására helyettük a következő új változókat vezetjük be:

$$u_i^2 = \frac{n_i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

A szórásnégyzet mármost a következő alakba megy át:

$$\sigma^2(\varrho) = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^s (a_i - \omega)^2 \sigma_i^2 u_i^2}{\left[ \sum_{i=1}^s (a_i - \omega)^2 u_i^2 \right]^2} = \frac{1}{n} \cdot f(u_1, u_2, \dots, u_s, \omega).$$

Szélsőértékfeladatunkat végülis következőképpen fogalmazzuk:

Az

$$(I') \quad f(u_1, u_2, \dots, u_s, \omega) = \frac{\sum_{i=1}^s (a_i - \omega)^2 \sigma_i^2 u_i^2}{\left| \sum_{i=1}^s (a_i - \omega)^2 u_i^2 \right|^2}$$

$s + 1$  változós függvény az  $(u_1, u_2, \dots, u_s, \omega)$  mely értékrendszerei mellett veszi fel legkisebb értékét, a

$$(I'.1) \quad g(u_1, u_2, \dots, u_s, \omega) \equiv \sum_{i=1}^s a_i u_i^2 - \omega = 0$$

$$(I'.2) \quad h(u_1, u_2, \dots, u_s) \equiv \sum_{i=1}^s u_i^2 - 1 = 0$$

mellékfeltételek figyelembevételével.

#### 4. Az eredmények összefoglalása

Az előző §-ban megfogalmazott szélsőértékfeladat vizsgálata a következő eredményre vezet:

Az  $(I')$ -ben megadott függvénynek az  $(I'.1.)$  és  $(I'.2.)$  feltételek mellett — hacsak az  $(a_i, \sigma_i^2)$   $(i = 1, 2, \dots, n)$  értékpárok között bizonyos speciális összefüggések nem állanak fenn — csakis olyan  $(u_1, u_2, \dots, u_s)$  értékrendszerek mellett lehet minimuma, amelyekre nézve az  $u_i$ -k közül legfeljebb három különbözik 0-tól.

Az  $(a_i, \sigma_i^2)$  értékpárok különleges megválasztása mellett más értékrendszerek is tekintetbe jöhetnek szélsőérték szempontjából, de ezek nem feltétlenül adnak minimumot.

Ha  $\sigma_i = \sigma$   $(i = 1, 2, \dots, s)$  állandó, akkor csakis az

$$u_1^2 = \frac{1}{2}, \quad u_s^2 = \frac{1}{2}, \quad u_i = 0, \quad i = 2, 3, \dots, s-1$$

értékrendszer adja a minimumot.\*

Különösen egyszerű eredmény adódik abban a speciális esetben, ha a regressziós egyenlet alakja

$$y = Rx.$$

\* Az  $a_1$  és  $a_s$  pontokban egyenlő számú mérést természetesen csak akkor végezhetünk, ha  $n$  páros. Amennyiben az  $n_i$ -kre így kapott kifejezések nem egész számok, úgy azokat természetesen ki kell kerekíteni egész számmá.



Ekkor ugyanis az egyenes egy pontja —  $x = 0, y = 0$  — ismeretes és abban a további egy pontban kell mérni, amelyre a  $\left(\frac{\sigma_i}{a_i}\right)^2$  kifejezés —  $i = 1, 2, \dots, s$  — értéke minimum.

Eredményeinket gyakorlati szempontból a következőképpen fogalmazhatjuk:

Ahhoz, hogy az 1. §-ban megadott feltételek mellett keresett regressziós együtthatót olyan mérésekkel határozzuk meg, amelyek mellett az együttható szórásnégyzete minimális, az  $a_i$  helyek közül két, vagy legfeljebb három pontban kell mérést végezni.

Ha az  $y$  értékek szórása minden  $a_i$  pontban ugyanaz és az összes mérések száma páros, akkor az egymástól legtávolabbra eső két pontban kell a méréseket fele-fele arányban megosztani, tehát

$$n_1 = u_1^2 \cdot n = \frac{1}{2} n, \quad n_s = u_s^2 n = \frac{1}{2} n$$

mellett lesz a szórásnégyzet minimum:

$$\min \sigma^2(\varrho) = \left( \frac{2\sigma}{a_1 - a_s} \right)^2.$$

Ha az  $y$  értékek szórása  $a_i$ -vel változik, akkor minden pontpárra és minden ponthármásra — az alább megadandó eljárás szerint — meg kell határozni azt a szórást, amely mint minimális tekintetbe jöhet és ezek közül kell a legkisebbet kiválasztani.

A kétpontos mérések közül azon  $(a_j, a_k)$  értékpár mellett kell a méréseket végezni, amelyre

$$\left( \frac{\sigma_j + \sigma_k}{a_j - a_k} \right)^2 = \text{minimum} \quad (j \neq k; j, k = 1, 2, \dots, s)$$

akkor a mérések számát az  $a_j$  és  $a_k$  pontok között a szórások arányában kell megosztani

$$n_j = \frac{\sigma_j}{\sigma_j + \sigma_k} \cdot n \quad n_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_j + \sigma_k} \cdot n$$

Amennyiben az  $n_i$ -re így kapott kifejezések nem egész számok, úgy azokat természetesen ki kell kerekíteni egész számmá.

Minden  $(a_j, a_k, a_l)$  értékhármashoz tartozik olyan  $(u_j^*, u_k^*, u_l^*)$  értékrendszer, vagyis a mérések számának olyan eloszlása, amely a regressziós együttható szórásnégyzetének minimuma szempontjából tekintetbe jöhet; ezek meghatározási módját az alábbi 5. §-ban ismertetjük. Ez az eljárás konkrét esetekben alkalmazható s a szélsőérték jellegét minden esetben külön meg kell állapítani. Az ott konstruált numerikus példában a három ponthoz kapott szórásnégyzet nagyobb, mint a három pont közül kiragadható kétpontokhoz tartozó szórásnégyzetek közül a legkisebb. Ha ez általában igaz — amit ezideig csupán a  $\sigma_i = \text{állandó}$  esetében sikerült bizonyítani — akkor kétpontos mérés nyújtja a szórásnégyzetre az abszolút minimumot.

A hárompontos lokális szélsőérték meghatározása eléggé fáradságos számolást igényel, amit — ha a legjobb szórásnégyzetet keressük — bármely három pontra el kell végezni. Ezért az alábbiakban egy módszert ismertetünk,

melynek segítségével három vagy többpontos mérések esetén is meghatározhatjuk a mérések számának a pontok közti olyan eloszlását, amely a regressziós együttható szórásnégyzetének szempontjából viszonylag jó eredményre vezet, számítástechnikailag pedig igen jól kezelhető. Sőt, mint azt a 6. §-ban numerikus példán látni fogjuk, e módosított regressziós együttható minimális szórásnégyzete kisebb lehet hárompontos mérés esetén annál, mintha a regressziós együtthatót a szokott alakban — minimális szórásnégyzettel — határoztuk volna meg. Ez a módszer a regressziós egyenes következő módosított meghatározása alapján sikerül:

Tekintsük az  $a_i$  helyen mért  $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{in_i}$  értékek számtani közepét

$$\bar{\eta}_i = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} \eta_{ik}}{n_i}.$$

Keressük most az  $n$  számú  $(a_i, \eta_{ik})$  ( $k = 1, 2, \dots, n_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, s$ ) pont helyett az  $s < n$  számú  $(a_i, \bar{\eta}_i)$  ponthoz tartozó regressziós egyenest. Ekkor a regressziós együttható

$$\varrho^* = \frac{\sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a})(\eta_i - \bar{\eta})}{\sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a})^2},$$

ahol most  $\bar{a}$  az  $a_i$ -k számtani közepe:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^s a_i}{s}.$$

Ebben az esetben ahhoz, hogy

$$\sigma^2(\varrho^*) = \text{minimum}$$

legyen,  $n_j$ -t az  $a_j$ -ben végzett mérések számát — a következőképpen kell kiszámítani:

$$n_j = \frac{|a_j - \bar{a}| \sigma_j}{\sum_{i=1}^s |a_i - \bar{a}| \sigma_i} \cdot n,$$

emellett a szórásnégyzet minimuma:

$$\min \sigma^2(\varrho^*) = \frac{1}{n} \frac{\left[ \sum_{i=1}^s |a_i - \bar{a}| \sigma_i \right]^2}{\left[ \sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a})^2 \right]}.$$

Ez a módszer tehát tetszőleges  $s$  mellett minimumot ad a regressziós együtthatókra. A pontok száma redukálódik, ha valamelyik  $a_i$  összeesik az  $\bar{a}$  súlyponttal, ahol — mint azt formulánk mutatja — mérést nem kell végezni.

Ha  $s = 2$ , akkor a mérések számának eloszlását és a szórásnégyzet minimumát illetően ugyanarra az eredményre jutunk, ami megegyezik a regressziós együttható fenti — szokott — értelmezése alapján nyert eredménnyel.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából megjegyezzük, hogy rendszerint elég az  $(a_j, a_k)$  értékpárokhoz tartozó extrémális szórások közül a legkisebbet venni és ennek megfelelően a mérést elvégezni; ezzel általában biztosíthatjuk, hogy nem túlságosan nagy számú összmérés igénybevételével a szórás a gyakorlat számára megfelelő kis értékkel bír.

### 5. A szórásnégyzet szélsőértékeinek meghatározása

Vizsgáljuk meg mindenekelőtt az  $f(u_1, u_2, \dots, u_s, \omega)$  függvényt a mellékfeltételek figyelembevételével. Az I'2. feltétel szerint e függvénynek az  $s$  dimenziós egységgömb zárt felszínén kell minimumát keresni, éspedig az (I' 2.) mellékfeltétel figyelembevételével, mely szerint  $\omega$  az  $x$  tengelyen az  $a_i$  pontoknak  $u_i^2$  súlyok szerint vett súlypontja. E függvény pozitív és amint azt alább  $\alpha$ ) alatt megmutatjuk, a következő  $s$  számú pontban válik végtelenné :

$$u_i = 1, \quad u_1 = u_2 = \dots = u_{i-1} = u_{i+1} = \dots = u_s = 0,$$

ahol  $i = 1, 2, \dots, s$ . Minden egyéb helyen a függvény folytonos és a benne szereplő változók szerint akárhányszor differenciálható.

Megmutatjuk, hogy a függvény határozottan pozitív alsó korláttal bír. Legyen ugyanis a  $\sigma_i$ -k közül a legkisebb pl. a  $\sigma_1$ . Ekkor, minthogy  $\omega$  az  $a_i$  értékek pozitív súlyok szerint vett súlypontja, tehát

$$a_1 < \omega < a_s \quad \text{és így} \quad |a_i - \omega| \leq |a_1 - a_s|$$

$i = 1, 2, \dots, s$ -re. Felírhatjuk tehát — a  $\sigma_i$ -ket legkisebb értékükkel helyettesítve, majd  $(a_i - \omega)^2$  értékeit a nevezőben nagyobbítva — a következő egyenlőtlenséget :

$$f(u_1, u_2, \dots, u_s, \omega) \geq \frac{\sigma_1^2}{(a_1 - a_s)^2} > 0,$$

amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Függvényünk tehát felveszi a mondott tartományban határozottan pozitív abszolút minimumát (esetleg több helyen is).

Az alábbi tárgyalásunkban arra szorítkozunk, hogy a Lagrange-féle multiplikátor eljárás segítségével meghatározzuk a változók ama értékrendszereit, amelyek a szélsőérték szempontjából figyelembe jöhetnek. Ezek, mint mondtuk, olyan tulajdonságúak, amelyek a változónak legfeljebb három 0-tól különböző értékét tartalmazzák. Ezek az értékrendszerek véges számban vannak. Meghatározásuk alapján lehet tehát a legkisebb szórásnégyzetet nyerni és így azt az  $u_i$  értékrendszert kiválasztani, ami a követendő mérési eljárást meghatározza.

Feladatunk tehát az (I')-ben adott  $s + 1$ -változós függvény szélsőértékeinek meghatározása az (I'1.) és (I' 2.) mellékfeltételek figyelembevételével.

Alkalmazzuk a Lagrange-féle multiplikátor módszert. Keresnünk kell az  $u_1, u_2, \dots, u_s, \omega$  változóknak, továbbá a  $\lambda$  és  $\mu$  számoknak azon értékeit, amelyek mellett a következő egyenletek teljesülnek :

$$(II) \quad \frac{\partial f}{\partial u_j} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u_j} + \mu \frac{\partial h}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

$$(II') \quad \frac{\partial f}{\partial \omega} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \omega} + \mu \frac{\partial h}{\partial \omega} = 0.$$

Ennek az  $s + 1$  számú egyenletnek az I'. 1. és I'. 2. egyenletekkel való kiegészítése nyújt az  $n + 3$  számú ismeretlen meghatározására kellő számú egyenletet.

További számításaink áttekinthetőbbé tételére vezessük be a következő jelöléseket :

$$(III.1) \quad M = \sum_{i=1}^s \sigma_i^2 (a_i - \omega)^2 u_i^2,$$

$$(III.2) \quad N = \sum_{i=1}^s (a_i - \omega)^2 u_i^2,$$

$$(III.3) \quad R = \sum_{i=1}^s \sigma_i^2 (a_i - \omega) u_i^2.$$

Tehát

$$\sigma^2(\varrho) = \frac{1}{n} \frac{M}{N^2}.$$

E jelölések figyelembevételével (II) és (II') egyenleteink — a parciális deriváltak kiszámítása után — a következő alakot öltik :

$$(II.1) \quad \frac{2\sigma_j^2(a_j - \omega)^2 u_j N^2 - 4(a_j - \omega)^2 u_j M N}{N^4} + 2a_j u_j \lambda + 2u_j \mu = 0$$

$j = 1, 2, \dots, s,$

$$(II'1) \quad \frac{-2 \left[ \sum_{i=1}^s \sigma_i^2 (a_i - \omega) u_i^2 \right] N^2 - 4 \left[ \sum_{i=1}^s (a_i - \omega) u_i^2 \right] M N}{N^4} - \lambda = 0.$$

A (II' 1.)-ből  $\lambda$  azonnal kifejezhető; a számlálóban a második zárójelben lévő kifejezés az (I'1) és (I'2) feltételek miatt 0 s így

$$\lambda = - \frac{2R}{N^2}$$



$\mu$  kiszámításához szorozzuk a II. 1. egyenletek mindegyikét a megfelelő  $u_j$ -vel s összegezzük az  $s$  számú egyenletet. Ekkor a III. jelölések, valamint az (I'1) és (I'2) feltételek figyelembevételével a következőt nyerjük :

$$\frac{2MN^2 - 4MN^2}{N^4} + 2\lambda\omega + 2\mu = 0.$$

S ebből  $\lambda$  fenti kifejezésének behelyettesítésével

$$\mu = \frac{M + 2R\omega}{N^2}$$

$\lambda$  és  $\mu$  e kifejezéseit (II. 1.)-be behelyettesítve, az  $M' = \frac{M}{N}$  jelölés bevezetésével egyszerű átalakítás után a következőt nyerjük :

$$(II. 2) \quad u_j [(a_j - \omega)^2 (\sigma_j^2 - 2M') - 2(a_j - \omega) R + M] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

A keresett  $u_j$  és  $\omega$  változóknak teljesíteniük kell még az (I'1) és (I'2) feltételeket. (II. 2.) egyenleteink mindegyikében tehát az  $u_j$  vagy a szögletes zárójelben álló kifejezés legalább egyikének el kell tűnnie.

Szélsőérték szempontjából tekintetbe jövő értékrendszereket tehát a következő módon kell meghatározunk : az  $s$  számú  $u_j$  közül  $l$  számú meghatározottat 0-tól különbözőnek, míg az  $s - l$  számú többi 0-nak vesszük. Ekkor az  $l$  számú  $u_j$ -re a (II. 2.) egyenletek  $l$  egyenletet szolgáltatnak, továbbá az (I'1) és (I'2) feltételeket kell figyelembe venni. Azonban az  $l$  számú (II. 2.)-es egyenlet közül  $l - 1$ -ből, valamint az (I. 2.) és (I'1) feltételekből már következik az  $l$ -ik. Így az  $l + 1$  számú ismeretlen meghatározására  $l + 1$  számú független egyenlet szolgál. Mégis — mint azt alább kimutatjuk — általában, vagyis az  $a_i$  és  $\sigma_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) tetszőleges értékeire, ezek az egyenletek nem elégíthetők ki a felvetett kérdésnek megfelelő reális értékekkel, ha  $l > 3$ .

Most rátérünk azoknak az értékrendszereknek meghatározására, amelyek a (II. 2.) egyenleteket, valamint (I'1) és (I'2) feltételeket kielégítik.

a) Legyen az  $u_j$ -k közül egy — pl. az  $u_1$  — 0-tól különböző, míg a többi 0. Megmutatjuk, hogy a feltételek mellett az  $f(u_1, u_2, \dots, u_s, \omega)$  függvénynek  $\infty$  helye van.

Végezzük ugyanis a következő határátmenetet :

$$u_1^2 \rightarrow 1$$

$$u_j^2 \rightarrow 0, \quad j = 2, 3, \dots, s$$

ekkor

$$\omega \rightarrow a_1$$

s könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az  $f(u_1, u_2, \dots, u_s, \omega)$  kifejezésének számlálója és nevezője egyaránt 0-hoz tart, azonban a nevező negyedrendben, míg a számláló csupán másodrendben, q. e. d.

A továbbiakban a számunkra tekintetbe jövő értékrendszerek meghatározásához tehát legalább két  $u_j$ -t kell 0-tól különbözőnek tekinteni. Ebből viszont következik, hogy a (III)-ban értelmezett  $M$  és  $N$  mennyiségek határozottan pozitívak :

$$M > 0, \quad N > 0.$$

Ugyanis (III)-ból látható, hogy  $\omega$  legfeljebb egy  $a_i$ -val eshet össze, de ugyanakkor van még egy  $u_j$  ( $i \neq j$ ), amely 0-tól különbözik.

$\beta$ ) Legyen most  $l \geq 5$  és különbözzék pl. az  $u_1, u_2, \dots, u_l$  a 0-tól, míg legyen  $u_j = 0$ , ha  $j = l+1, l+2, \dots, s$ .

Tekintsük e § első részében jelzett  $l+1$  egyenletből álló egyenletrendszert  $u_1, u_2, \dots, u_l, \omega$ -ra megoldva s számítsuk ki segítségükkel az  $M, R, M'$  mennyiségeket. Ekkor teljesülnie kell az  $l$  számú

$$(a_j - \omega)^2 (\sigma_j^2 - 2M') - 2(a_j - \omega) R + M = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l$$

egyenletnek. Ez azonban azt jelenti, hogy a  $(\xi, \eta)$  koordinátarendszerben értelmezett

$$(\xi - \omega)^2 (\eta - 2M') - 2(\xi - \omega) R + M = 0$$

harmadrendű algebrai görbének az  $l \geq 5$  számú  $(\xi = a_j, \eta = \sigma_j^2)$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) ponton kell áthaladnia. Márpedig e négyparaméteres  $(M, M', R, \omega)$  görbét 4 pontja teljesen meghatározza s előre tetszőlegesen megadott 5 pont általában nem fekszik rajta. Ezzel azonban megmutattuk, hogy — hacsak az  $(a_j, \sigma_j^2)$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) mennyiségek bizonyos feltételeknek eleget nem tesznek — a tárgyalt eset nem szolgáltat feladatunk számára lokális szélsőértéket.

$\gamma$ ) Az előző meggondolás azonban lényegében azt az állítást is tartalmazza, hogy általában már az  $l = 4$  számú nullától különböző  $u_j$  felvétele nem vezet szélsőértékfeladatunk szempontjából reális eredményhez. Ugyanis az  $(a_j, \sigma_j^2)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) mennyiségek már egyértelműen meghatározzák az  $\omega, M, M', R$  mennyiségeket.

Ekkor a következő egyenletrendszernek kell teljesülnie:

$$(a_j - \omega)^2 (\sigma_j^2 - 2M') - 2(a_j - \omega) R + M = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Vezessük be még az  $L$  ismeretlent és írjuk egyenletrendszerünket a következő alakban:

$$\sigma_j^2 (a_j - \omega)^2 L - 2(a_j - \omega)^2 M' - 2(a_j - \omega) R + M = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

E homogén egyenletrendszernek az  $L, M, M', R$  ismeretlenekre nézve kell legyen nem triviális megoldása (sőt  $L = 1, M > 0, M' > 0$  feltételeknek eleget tevő megoldásnak is kell léteznie), amiből a determináns eltűnése következik. Így némű átalakítás után  $\omega$ -ra nézve a következő egyenletet nyerjük:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 (a_1 - \omega)^2 & (a_1 - \omega)^2 & (a_1 - \omega) & 1 \\ \sigma_2^2 (a_2 - \omega)^2 & (a_2 - \omega)^2 & (a_2 - \omega) & 1 \\ \sigma_3^2 (a_3 - \omega)^2 & (a_3 - \omega)^2 & (a_3 - \omega) & 1 \\ \sigma_4^2 (a_4 - \omega)^2 & (a_4 - \omega)^2 & (a_4 - \omega) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ezt a determinánst egyszerű átalakítással olyan alakra hozhatjuk, amely  $\omega$ -ra nézve másodfokú egyenletet szolgáltat.

Válasszuk most a következő értékeket:

$$a_1 = -2, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 2$$

$$\sigma_1^2 = 1, \quad \sigma_2^2 = 11, \quad \sigma_3^2 = 19, \quad \sigma_4^2 = 5;$$

$\omega$ -ra a 0 és 8 értékeket nyerjük, minthogy azonban  $\omega$  az  $x$  tengelyen az  $a_i$  pontoknak pozitív súlyokkal vett súlypontja, az  $\omega = 0$  jöhet csak tekintetbe. Ehhez az értékhez azonban az

$$M = -16, \quad M' = -\frac{1}{2}, \quad R = 2$$

értékeket nyerjük, amelyek az

$$M > 0, \quad M' > 0,$$

feltételeknek nem tesznek eleget s így nem szolgálhatnak alapul az  $u_j$ -k kiszámítására, q. e. d.

δ) Térjünk most át az  $l = 2$  esetre. Legyenek

$$u_1 \neq 0, \quad u_2 \neq 0, \quad u_3 = u_4 = \dots = u_s = 0.$$

Ekkor az

$$\begin{aligned} a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 &= \omega \\ u_1^2 + u_2^2 &= 1 \end{aligned}$$

és egyszerű számítással nyerjük az

$$\begin{aligned} N &= (a_1 - a_2)^2 u_1^2 u_2^2, \\ M &= (\sigma_1^2 u_2^2 + \sigma_2^2 u_1^2) N, \\ R &= \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{a_1 - a_2} N, \\ M' &= \sigma_1^2 u_2^2 + \sigma_2^2 u_1^2 \end{aligned}$$

összefüggéseket. E kifejezéseket a  $j = 1$  és 2-re felírt (II. 2.) egyenletekbe helyettesítve, megfelelő egyszerűsítés után  $u_1^2$ -re a következő egyenletet nyerjük:

$$(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) u_1^4 - 2\sigma_1^2 u_1^2 + \sigma_1^2 = 0.$$

Innen

$$u_1^2 = \frac{\sigma_1^2 \pm \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}.$$

A négyzetgyök pozitív előjele  $u_1^2 > 1$  eredményhez vezetne s így a negatív előjelet véve bevezetésünkben állított

$$u_1^2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

eredményünkhöz jutottunk. Ebből

$$u_2^2 = 1 - u_1^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

s a szórásnégyzet — némi számolás eredményeként —

$$\sigma^2(\varrho) = \frac{1}{n} \frac{M}{N^2} = \frac{1}{n} \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{a_1 - a_2} \right)^2.$$

ε) Bebizonyítjuk  $\sigma_i = \sigma$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) esetre vonatkozó állításunkat.  
Ekkor

$$M = \sigma^2 \sum_{i=1}^s (a_i - \omega)^2 u_i^2 = \sigma^2 \cdot N$$

$$R = \sigma^2 \sum_{i=1}^s (a_i - \omega) u_i^2 = 0.$$

(II.) egyenleteink így alakulnak :

$$\sigma^2 N u_j [-(a_j - \omega)^2 + N] = 0.$$

Tegyük fel most, hogy az  $u_j$ -k közül három különbözik 0-tól :

$$u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0, u_4 = u_5 = \dots = u_s = 0.$$

$\sigma > 0$ ,  $N > 0$  miatt kell tehát; hogy

$$-(a_j - \omega)^2 + N = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

teljesüljön. Ebből

$$(a_1 - \omega)^2 = (a_2 - \omega)^2 = (a_3 - \omega)^2$$

következnék, minthogy azonban az  $a_i$ -k valósak és egymástól különbözőek, ezek az egyenlőségek nem teljesülhetnek.

i) Az  $y = Rx$  esetben eredményünket legegyszerűbben közvetlenül vezethetjük le. Ekkor ugyanis a regressziós együttható a már használt jelöléseinkkel :

$$R = \frac{\sum_{i=1}^s n_i a_i \overline{\eta_i}}{\sum_{i=1}^s n_i a_i}.$$

Ennek szórásnégyzete pedig az  $u_i$  változók bevezetésével :

$$\sigma^2(R) = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^s \sigma_i^2 a_i^2 u_i^2}{\left( \sum_{i=1}^s a_i^2 u_i^2 \right)^2}.$$



E kifejezést kell minimummá tenni a  $\sum_{i=1}^s u_i^2 = 1$  mellékfeltétel figyelembevételével.

A *Lagrange* multiplikátor módszer a következő feltételi egyenletekhez vezet:

$$u_i \frac{a_i^2(\sigma_i^2 - 2M') + M}{N^2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Itt

$$M = \sum_{i=1}^s \sigma_i^2 a_i^2 u_i^2$$

$$N = \sum_{i=1}^s a_i^2 u_i^2$$

$$M' = \frac{M}{N}.$$

Azonban a  $\beta$ ) és  $\gamma$ ) pontokban alkalmazott megfontolásaink itt arra az eredményre vezetnek, hogy az  $u_i$ -k közül legfeljebb egy választható 0-tól különbözőnek, ha csak az  $(a_i, \sigma_i^2)$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) értékpárok között bizonyos speciális összefüggések nem állanak fenn. (Ilyen összefüggés pl. az  $a_i = -a_j$  és  $\sigma_i = \sigma_j$ , amely esetben  $u_i$  és  $u_j$  is választható 0-tól különbözőnek.) Legyen tehát

$$u_i \neq 0, \quad u_j = 0, \quad \text{ha } j \neq i.$$

Ekkor

$$a_i^2(\sigma_i^2 - M') + M = 0$$

kifejezésből  $u_i^2 = 1$  adódik s ebből

$$\sigma^2(\varrho) = \frac{1}{n} \left( \frac{\sigma_i}{a_i} \right)^2.$$

Tehát az összes mérést abban az  $a_i$  pontban kell végezni, amelyre  $\sigma^2(\varrho)$  itt kapott kifejezése minimum.

$\kappa$ ) Oldjuk most meg a hárompontos feladatot. A (II. 2.) egyenleteket  $j = 1, 2, 3$ -ra felírva, ezekből  $M, M', R$  kifejezhetők  $\omega$  segítségével:

$$M = - \frac{(a_1 - \omega)(a_2 - \omega)(a_3 - \omega)}{A} [\sigma_1^2(a_2 - a_3)(a_1 - \omega) + \sigma_2^2(a_3 - a_1)(a_2 - \omega) + \sigma_3^2(a_1 - a_2)(a_3 - \omega)],$$

$$M' = \frac{1}{2A} [\sigma_1^2(a_2 - a_3)(a_1 - \omega)^2 + \sigma_2^2(a_3 - a_1)(a_2 - \omega)^2 + \sigma_3^2(a_1 - a_2)(a_3 - \omega)^2]$$

$$R = - \frac{1}{2A} [\sigma_1^2(a_2 - a_3)(a_1 - \omega)^2(a_2 + a_3 - 2\omega) + \sigma_2^2(a_3 - a_1)(a_2 - \omega)^2(a_1 + a_3 - 2\omega) + \sigma_3^2(a_1 - a_2)(a_3 - \omega)^2(a_1 + a_2 - 2\omega)],$$

ahol

$$A = a_1^2(a_2 - a_3) + a_2^2(a_3 - a_1) + a_3^2(a_1 - a_2).$$

Innen  $N = \frac{M}{M'}$  és felírhatjuk  $u_1, u_2, u_3$  és  $\omega$ -ra a következő egyenleteket:

$$\sigma_1^2(a_1 - \omega)^2 u_1^2 + \sigma_2^2(a_2 - \omega)^2 u_2^2 + \sigma_3^2(a_3 - \omega)^2 u_3^2 = M$$

$$(a_1 - \omega)^2 u_1^2 + (a_2 - \omega)^2 u_2^2 + (a_3 - \omega)^2 u_3^2 = N$$

$$\sigma_1^2(a_1 - \omega) u_1^2 + \sigma_2^2(a_2 - \omega) u_2^2 + \sigma_3^2(a_3 - \omega) u_3^2 = R$$

$$(a_1 - \omega) u_1^2 + (a_2 - \omega) u_2^2 + (a_3 - \omega) u_3^2 = 0$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

Az itt felírt öt egyenlet közül bármely négyből kiszámíthatók az ismeretlenek s azok az ötödiket kielégítik.

$\omega$  meghatározására legegyszerűbben úgy járhatunk el, hogy a második egyenletet elhagyjuk s a jobboldalon álló  $M, R, 0, 1$ -hez  $u_i^2$  tényezőt, mint további ismeretlent írunk. Így homogén egyenletrendszerhez jutunk, amelynek nem triviális megoldását a determináns eltűnése biztosítja:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2(a_1 - \omega)^2 & \sigma_2^2(a_2 - \omega)^2 & \sigma_3^2(a_3 - \omega)^2 & -M \\ \sigma_1^2(a_1 - \omega) & \sigma_2^2(a_2 - \omega) & \sigma_3^2(a_3 - \omega) & -R \\ (a_1 - \omega) & (a_2 - \omega) & (a_3 - \omega) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Így általában hatodfokú egyenlethez jutottunk, amely némi átalakítás után egy legfeljebb harmadfokú egyenletbe vihető át. Gyökei közül a  $(a_1, a_3)$  intervallumba esők jönnek figyelembe szélsőértékfeladatunk szempontjából.

Példaképpen legyenek

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2,$$

$$\sigma_1^2 = 1, \quad \sigma_2^2 = 1, \quad \sigma_3^2 = 4,$$

ekkor

$$M = (1 - \omega)(1 + \omega)(2 - \omega)^2,$$

$$M' = \frac{1}{2}(5 - 4\omega + \omega^2),$$

$$R = \omega(2 - \omega)^2.$$

$\omega$ -ra nézve a következő egyenletet kapjuk:

$$2\omega^3 - 11\omega^2 + 14\omega - 3 = 0.$$

A  $(-1, 2)$  intervallumba eső gyökök:  $\omega = 0,26794\dots$  és  $\omega' = 1,5$ . Kiszámítva az ezekhez az értékekhez tartozó  $u_i$ -ket, azt találjuk, hogy feladatunknak csupán az  $\omega = 0,26794\dots$  felel meg,  $\omega'$ -nél ugyanis  $u_i^2$ -ra nézve negatív mennyiségeket is kapunk.

$\omega$  ezen értéke mellett

$$u_1^2 = 0,4433\dots$$

$$u_2^2 = 0,4019\dots$$

$$u_3^2 = 0,1546\dots$$

A regressziós együttható szórásnégyzete:

$$\sigma^2(\varrho) = \frac{1}{n} \cdot 1,43649 \dots$$

Hasonlítsuk össze a szórásnégyzetre kapott eredményünket a három pontból választható két-két ponthoz tartozó extrémális szórásnégyzetekkel:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad \sigma^2(\varrho) = \frac{1}{n} \cdot 1$$

$$a_1 = -1, \quad a_3 = 2, \quad \sigma^2(\varrho) = \frac{1}{n} \cdot 1$$

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad \sigma^2(\varrho) = \frac{1}{n} \cdot 9.$$

Tehát a három ponthoz kapott szórásnégyzetnél jobb eredményt kapunk, ha vagy az  $a_1 = -1$  és  $a_2 = 1$  pontokban mérünk, a mérések számát fele fele arányban osztva meg, vagy pedig az  $a_1 = -1$  és  $a_3 = 2$  pontokban mérünk, az elsőben a mérések

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1} + \sqrt{4}} = 33,3 \dots \% \text{-át},$$

a másodikban

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1} + \sqrt{4}} = 66,6 \dots \% \text{-át}$$

végezve.

#### 6. A regressziós együttható módosított alakjának vizsgálata

A regressziós egyenest tehát az egyes  $(a_i, \eta_{ik})$   $k = 1, 2, \dots, n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$  összesen  $n$  számú pont helyett csupán az  $s$  számú  $(a_i, \bar{\eta}_i)$  ponton vezetjük keresztül, ahol az  $s$  számú

$$\bar{\eta}_i = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} \eta_{ik}}{n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

egymástól független értékek, rendre

$$y_i = \varrho^* a_i + c, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

várható értékkel és

$$\sigma^2(\bar{\eta}_i) = \frac{\sigma^2(\eta_{i,k})}{n_i} = \frac{\sigma_i^2}{n_i}$$

szórásnégyzettel. A tapasztalati regressziós együttható

$$\varrho^* = \frac{\sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a}) (\bar{\eta}_i - \bar{\eta})}{\sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a})^2},$$

ahol most

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^s a_i}{s}$$

tehát  $\bar{a}$  — az  $a_i$  pontok súlypontjának koordinátája — most állandó. Tekintve, hogy

$$\sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a}) = 0,$$

tehát

$$\varrho^* = \frac{\sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a}) \bar{\eta}_i}{\sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a})^2}.$$

$\varrho^*$  várható értéke nyilván a regressziós együttható elméleti értéke.

A szórásnégyzet, tekintettel az  $\bar{\eta}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) valószínűségi változók függetlenségére, továbbá az egyes  $\eta$  értékek szórásnégyzetére vonatkozó feltevésekre

$$\sigma^2(\varrho^*) = \frac{\sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a})^2 \frac{\sigma_i^2}{n_i}}{\left[ \sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a})^2 \right]^2}.$$

Feladatunk ennek a kifejezésnek minimummá tétele, ahol a változókra a

$$\sum_{i=1}^s n_i = n$$

feltétel kell teljesüljön.



Vezessünk be ismét új változókat, legyen

$$\lambda_i = \frac{n_i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

amelyeket ismét folytonos változóknak tekintünk. Ekkor szélsőértékfeladatunk így fogalmazható:

Meghatározandók az

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a})^2 \frac{\sigma_i^2}{\lambda_i}}{\left[ \sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a})^2 \right]^2}$$

függvény szélső értékei a

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) = \sum_{i=1}^s \lambda_i - 1 = 0$$

mellékfeltétel figyelembevételével.

A *Lagrange* multiplikátor módszert alkalmazva nyerjük a

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_j} + \mu \frac{\partial g}{\partial \lambda_j} = -C(a_j - \bar{a})^2 \frac{\sigma_j^2}{\lambda_j^2} + \mu = 0$$

egyenleteket, ahol

$$C = \frac{1}{n} \frac{1}{\left[ \sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a})^2 \right]^2}.$$

Ezért az

$$\frac{(a_j - \bar{a})^2 \sigma_j^2}{\lambda_j^2} = C' = \text{állandó}, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

összefüggéseknek kell teljesülniök. Tekintettel arra, hogy  $C' > 0$ ,

$$\lambda_j = |a_j - \bar{a}| \cdot \sigma_j \cdot \frac{1}{C'}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

$\lambda_j$  ezen értékeinek  $j$ -re való összegezésével megkapjuk  $C'$  értékét s  $\lambda_j$ -re nyerjük, hogy

$$\lambda_j = \frac{|a_j - \bar{a}| \sigma_j}{\sum_{i=1}^s |a_i - \bar{a}| \sigma_i}, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

$\lambda_j$  ezen értékei mellett a szórásnégyzet

$$\sigma^2(\varrho^*) = \frac{1}{n} \left( \frac{\sum_{i=1}^s |a_i - \bar{a}| \sigma_i}{\sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a})^2} \right)^2.$$

Azt, hogy  $s$  adott értéke mellett a  $\lambda$ -k ily módon való megválasztása abszolút minimumot ad, a következőképpen láthatjuk be:

*Függvényünk alulról határozottan pozitív korláttal bír.* Vegyük ugyanis a legkisebbet a  $\sigma_i$ -k közül (legyen ez pl.  $\sigma_1$ ) és a legnagyobbat a  $\lambda_i$ -k közül (legyen ez pl.  $\lambda_2$ , a  $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$  miatt  $\lambda_2 \geq \frac{1}{s}$ ). Ekkor

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \geq \frac{1}{n} \frac{\sigma_1^2}{\lambda_2} \frac{1}{\sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a})^2}.$$

Másrészt a függvénydetermináns — a szabad feladatra is — határozottan pozitív; ugyanis.

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_j^2} = \frac{1}{n} \frac{(a_j - \bar{a})^2 \frac{\sigma_j^2}{\lambda_j}}{\left[ \sum_{i=1}^s (a_i - \bar{a})^2 \right]^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \cdot \partial \lambda_k} = 0$$

s így a függvénydetermináns  $s$  számú pozitív mennyiség szorzata.

Vegyük példaképpen az 5. § 2)-ben tárgyalt példát. Eszerint

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad \bar{a} = \frac{2}{3},$$

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 2.$$

A regressziós együttható szórásnégyzetének minimuma:

$$\min \sigma^2(*) = \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n}.$$

Itt tehát

$$\min \sigma^2(\varrho^*) < \min \sigma^2(\varrho)$$

esete forog fenn, vagyis az  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2$  pontokban a mérések számát rendre a fenti formulából nyert

$$\lambda_1 = 35,7 \dots \%, \quad \lambda_2 = 7,1 \dots \%, \quad \lambda_3 = 57,2 \dots \%$$

arányban megosztva ugyanolyan kis szórásnégyzettel nyerjük a regressziós együtthatót, mint az  $(a_1, a_3)$  vagy az  $(a_1, a_2)$  pontpárok esetében, ahol a regressziós együttható mindkét értelmezése szerint ugyanazt a

$$\min \sigma^2(\varrho) = \min \sigma^2(\varrho^*) = \frac{1}{n}$$

eredményt kapjuk.

### 7. A mérések számának meghatározása

Eddig elért eredményeink gyakorlati felhasználása szempontjából kiegészítésként az alábbiakban röviden két kérdéssel foglalkozunk:

a) hogyan kell a mérések összes számát —  $n$ -et — megválasztani ahhoz, hogy a konkrét feladatnak jól megfelelő értéket kapjunk a tapasztalati regressziós együtthatóra,

b) milyen eljárást kövessünk abban a gyakran felmerülő esetben, amikor az a) feladat alapján meghatározott  $n$  érték mellett az  $nu_i^2$  mennyiségek nem egész számok.

a) Legyen a regressziós együttható szórása minimum az  $a_1, a_2, a_3$ , ill.  $a_1, a_2$  pontokban  $u_1^2, u_2^2, u_3^2$ , ill.  $u_1^2, u_2^2$  értékek mellett végzett mérések esetén. Legyen a minimum

$$\sigma(\varrho) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\left( \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 (a_i - \omega)^2 u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^r (a_i - \omega)^2 u_i^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot A,$$

ahol most  $r = 3$ , ill.  $2$ . E kifejezésben az  $A$  tényezőt az  $a_j$  és  $\sigma_j$  mennyiségek ( $j = 1, 2 \dots s$ ) határozzák meg, így azt a követelményt, hogy  $\sigma(\varrho)$  megfelelően kicsi legyen,  $n$  megválasztásával érhetjük el.

Ha a  $\sigma(\varrho) < \varepsilon$  követelményt tesszük, akkor nyilván az  $n > \frac{A^2}{\varepsilon^2}$  egyenlőtlenségnek kell teljesülnie a mérések számára nézve.

Megjegyezzük, hogy ha a mérések száma nem túl kicsi (gyakorlatilag, ha meghaladja pl. az 50-et), akkor a regressziós együttható jó közelítéssel normális eloszlást követ s ekkor pl. 99,7% valószínűséggel állíthatjuk, hogy a regressziós együttható valódi értéke —  $R$  — a következő egyenlőtlenségnek tesz eleget:

$$\varrho - 3\sigma(\varrho) < R < \varrho + 3\sigma(\varrho).$$

Ha ekkor  $\varrho$  a 0-tól határozottan különbözik, akkor  $n$ -nek a

$$\frac{3\sigma(\varrho)}{|\varrho|} = \frac{3A}{\sqrt{n} \varrho} < \varepsilon,$$

vagyis

$$n \geq \frac{9A^2}{\varepsilon^2 \varrho^2}$$

megválasztása mellett 99,7%-os valószínűséggel állíthatjuk, hogy a valódi és tapasztalati együttható hányadosa legfeljebb  $\varepsilon$ -nal különbözik az 1-től.

Vegyük az 5. § x)-ban tárgyalt példát.

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \\ \sigma_1^2 = 1, \quad \sigma_2^2 = 1, \quad \sigma_3^2 = 4.$$

Válasszuk a méréseket az  $a_1 = -1$  és  $a_3 = 2$  pontokban, amikoris

$$u_1^2 = \frac{1}{3}, \quad u_3^2 = \frac{2}{3} \quad \text{és} \quad \sigma^2(\varrho) = \frac{1}{n}.$$

Ha az összes mérések számát 81-nek választjuk, akkor

$$\sigma(\varrho) = \frac{1}{9}$$

és 99,7% valószínűséggel állíthatjuk, hogy a regressziós együttható valódi értéke egy  $6 \cdot \sigma(\varrho) = \frac{2}{3}$  terjedelmű intervallumba esik.

Ugyanakkor végezzünk összesen 81 mérést az  $a_1, a_2, a_3$  pontokban, a mérések számát egyenletesen osztva el. Ekkor

$$u_1^2 = u_2^2 = u_3^2 = \frac{1}{3}, \quad \omega = \frac{2}{3}$$

és

$$\sigma^2(\varrho') = \frac{1}{n} \cdot 1,38 \dots,$$

ami azt jelenti, hogy a mérések számát 38%-al nagyobbak, tehát 112-nek kell választani ahhoz, hogy a regressziós együtthatóra ugyanolyan biztonságot érjünk el, mint a kétpontos extrémális mérés mellett.

b) A mérések számának az előzőekben mondottak szerinti meghatározása mellett sok esetben  $n$ -nek további kevés változtatásával még azt is elérhetjük, hogy  $nu_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ; ill.  $i = 1, 2$ ) is egész szám legyen.

Előfordulhat azonban, hogy a mérések elvégzése költséges, vagy már eleve kevés számú megfigyelés áll rendelkezésére. Erre az esetre megvizsgáljuk, hogy kétpontos mérés esetén milyen mértékben tér el a szórás a minimálistól, ha az  $nu_i^2$  értékek helyett a hozzájuk közeleső egész számokat választjuk.

Láttuk kétpontos mérés esetén

$$u_1^2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad u_2^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2},$$

a minimális szórásnégyzet

$$\sigma^2(\varrho) = \frac{1}{n} \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{a_1 - a_2} \right)^2.$$

Vezessük be az  $u_1^2 = \alpha_1, u_2^2 = \alpha_2$  jelöléseket és legyen  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ .  $n$ -et minden-



esetre úgy helyes megválasztani, hogy  $n\alpha_1 \geq 1$  legyen, amikor is  $[n\alpha_1] \geq 1$  (a szögletes zárójel  $n \cdot \alpha_1$  egész részét jelenti), tehát

$$n \geq \frac{1}{\alpha_1}$$

kell legyen, hogy az  $\alpha_1$  pontba is jusson legalább egy mérés. Számítsuk most ki a szórásnégyzetet, ha

$$u_1^2 = [n\alpha_1], \quad u_2^2 = n - [n\alpha_1].$$

Itt az  $n\alpha_1$ -et kerekítettük lefelé, de hasonló eredményre jutunk, ha  $u_1^2 = [n\alpha_2] + 1$ -et választunk.

Ekkor — elemi számolással — a szórásnégyzetre a következő kifejezést nyerjük

$$\sigma^2(\varrho') = \sigma^2(\varrho) n \left( \frac{\alpha_1^2}{[n\alpha_1]} + \frac{\alpha_2^2}{[n\alpha_2]} \right),$$

ahol  $\sigma(\varrho)$  a minimális szórási ;  $n$  megválasztásánál tehát arra kell ügyelnünk, hogy  $\sigma^2(\varrho)$  tényezője megfelelően kevés haladjon meg az 1-et.

Lássuk példaképpen a  $\sigma_1 = \sigma_2$  esetet, amikor is  $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}$ . A mérések száma legyen páratlan  $n = 2k + 1$ . Ekkor  $[n\alpha_1] = k$  és

$$\sigma^2(\varrho') = \sigma^2(\varrho) \frac{(2k+1)^2}{4k(k+1)}.$$

Könnyű belátni, hogy a  $\frac{(2k+1)^2}{k(k+1)}$  kifejezés  $k (\geq 1)$  növekedésével csökken. s legnagyobb értékét  $k = 1$ -re veszi fel, tehát

$$\frac{(2k+1)^2}{4k(k+1)} \leq \frac{9}{8}, \quad \text{ha } k \geq 1,$$

amiből

$$\sigma(\varrho) < \sigma(\varrho') \leq \sigma(\varrho) \sqrt{\frac{9}{8}} = \sigma(\varrho) \cdot 1,06 \dots$$

Tehát abban a szélső esetben, amikor 3 mérés áll rendelkezésre s az egyik pontban egy, a másikban két mérést végzünk, a szórási mindössze 6%-kal növekszik, de a mérések számának növelésével ez a különbség tetszőlegesen csökkenthető.

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА РЕГРЕССИИ

И. ВИНЦЕ .

Резюме

Между переменными  $x$  и  $y$  существует линейная связь :  $y = Rx + Q$ . Для определения констант  $R$  и  $Q$  исполняем  $N$  измерений при фиксированных значениях от  $x_1, x_2, \dots, x_N$  — спрашивается, как разделять  $N$  измерений на точки  $a_i$ , чтобы дисперсия эмпирического коэффициента регрессии была минимальна. Полагается, что  $a_i$  —

точные значения, т. е. не случайные величины, далее : величины  $y$ , измеренные в  $a_i$  имеют тождественные распределения, и их дисперсия  $\sigma(a_i)$  зависит от точки  $a_i$ .

Доказывается, что при этих условиях достаточно определить прямую регрессии на основе измерений, исполненных в двух или не более трех точках из  $s$  точек  $a_i$ . Для определения экстремальных двух и трех точек т. е. для выбора  $a_i$  и разделения числа измерений между точками вырабатывается метод.

Если  $\sigma_i$  — константа, ( $i = 1, 2, \dots$ ), то мы всегда должны исполнять измерения в двух точках — именно в двух крайних точках  $a_i$ , — разделяя число измерений в равной пропорции.

Работа занимается тоже модифицированной определением коэффициента регрессии, при которой задача экстремума трактуется проще и приводит к результату, обслуживаемому проще, хотя он не безусловно лучший.

## SUR LA DÉTERMINATION DU COEFFICIENT DE RÉGRESSION

E. VINCZE

### Résumé

Entre les variables  $x$  et  $y$  existe une relation linéaire :  $y = Rx + Q$ . Pour déterminer les constantes  $R$  (et  $Q$ ) on effectue des mesurages dont le nombre total est  $N$ , avec les valeurs  $a_1, a_2, \dots, a_s$  fixées de  $x$ . La question se pose, comment il faut distribuer parmi les points  $a_i$  les mesurages de nombre total  $N$ , pour que la carré de dispersion du coefficient de régression empirique  $R$  soit un minimum. On suppose que les  $a_i$  sont des valeurs exactes c'est-à-dire qu'ils ne sont pas des variables stochastiques, et, en outre, que les valeurs  $y$  mesurées avec les valeurs  $a_i$  ont la même distribution leur dispersion dépendant de l'endroit  $a_i$  :  $\sigma(a_i)$ .

Nous prouverons qu'avec ces conditions il suffit de déterminer la droite de régression à l'aide des mesurages effectués dans deux, ou tout au plus dans trois endroits parmi les endroits  $a_i$  de nombre  $s$ . Pour déterminer les extrémales à deux et à trois points c'est-à-dire pour choisir les  $a_i$  et distribuer le nombre de mesurages parmi ces points, nous élaborons une méthode.

Si  $\sigma_i$  est constant, ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), c'est toujours dans deux points — notamment dans les deux points  $a_i$  extrêmes — qu'il faut effectuer des mesurages en distribuant le nombre des mesurages en proportion égale.

L'article s'occupe en outre d'une définition modifiée du coefficient de régression, dans laquelle le problème de valeur extrême peut être discuté plus simplement et conduit à un résultat qui — même s'il n'est pas certainement meilleur — peut être manié plus simplement.



# AZ IPARI MINŐSÉGELLENŐRZÉS STATISZTIKAI MÓDSZEREI ÉS AZ INTÉZET FELADATAI E MÓDSZEREK BEVEZETÉSE TERÉN

VINCZE ISTVÁN

## ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk röviden ismerteti a gyártásközbéli- és a késztermék statisztikai ellenőrzésének egyszerű módjait, majd ezek összefüggését a matematikai statisztika néhány alapvető fogalmával. Végül felsorolja azokat a feladatokat, amelyeket az Intézetnek *elméleti tanácsadás és konkrét segítség (mérési adatok kiértékelése, ellenőrök kiképzése)* formájában a statisztikai módszerek bevezetéséhez adnia kell. E feladatok illusztrálására a cikk közli az Intézet és a Csepel Autógyár között létesült szocialista versenyszereződés szövegét, melyet a statisztikai módszereknek az Autógyárban való bevezetése érdekében kötöttek, továbbá közli a statisztikai módszerek bevezetésével elért első eredményeket a Telefongyárban.

1. A valószínűségszámítás és matematikai statisztika sokirányú és széleskörű gyakorlati felhasználásai között jelentős szerepet játszik az ipari minőségellenőrzés statisztikai módszereinek területe. Különösen az automatizált tömeggyártásnál igen nagy mértékben valósulnak meg azok a feltételek, amelyek mellett a valószínűségszámítás és ennek részét képező matematikai statisztika számtalan alapvető tétele érvényes. Azt a gondolatot, hogy valamely tömegcikk minőségét teljes átvizsgálás helyett minta alapján ellenőrizzük, *Osztrogradszkij* akadémikus már a múlt század közepén felvetette. Erre vonatkozó javaslatában megjegyezte, hogy az általa kitűzött probléma megoldása lehetővé teszi az ellenőrzéssel járó fizikai munkának egyhuszadára való csökkentését. A valószínűségszámításnak a kiváló orosz, majd szovjet matematikusok munkássága nyomán történt igen nagymérvű kifejlődése megteremtette az exakt tudományos alapot ahhoz, hogy e gondolatot megvalósítsák. Ma már a statisztikai minőségellenőrzésnek számtalan módja ismeretes és e módszereknek jelentős irodalma van mind elméleti téren, mind annak gyakorlatát illetően. Bár ezek az elméleti és gyakorlati eredmények számtalan jelentős ipari ország matematikusaitól és szakembereitől származnak, e módszerek intézményes elterjesztése csakis szocialista gazdasági rendszer feltételei között lehetséges s valóban azok rendszeres és kiterjedt alkalmazásával csakis a Szovjetunióban találkozunk. Az utolsó évtized alatt ennek eredményeként ugrásszerű eredményeket értek el a selejt és az ellenőrzésre fordított idő csökkentése terén. Így például a Sztálinról elnevezett moszkvai autógyárban a statisztikai ellenőrzésnek forgattyútengelyek préselésénél való alkalmazásával a selejtszázalékot az 1943. évi 6,9%-ról 1,1%-ra szállították le az 1948. évre; ugyanakkor a régebben alkalmazott 100%-os ellenőrzéssel szem-



ben a gyártmánydarabok 1,5%-a került csupán ellenőrzésre. A moszkvai Frézer-gyárban a kerek tárcsák statisztikai ellenőrzése következtében a selejt 14,2%-ról 1,3%-ra csökkent. A statisztikai módszerek alkalmazása — a gyártás színvonalára gyakorolt hatásán túl — fokozta e helyeken a technikai fegyelmet, lehetővé tette a gyártást befolyásoló tényezőknek mélyreható elemzését.

A Szovjetunió tanulságait felhasználva az utolsó évek során Csehszlovákiában és Lengyelországban is nagy előrehaladás történt a statisztikai minőségellenőrzés bevezetésének munkájában. Csehszlovákiában a gyártásközbéli ellenőrzés módszereit vezették be igen széles körben s terjesztik ki újabb és újabb területekre. E munkával matematikusok csoportjai foglalkoznak, amelyek csoportok a Csehszlovák Központi Matematikai Intézet valószínűségi számítási osztálya köré tömörülnek elvi problémáik felvetésében, megoldásában, tapasztalataik kicserélésében.

A Lengyel Központi Matematikai Intézet a végellenőrzés módszereire dolgozott ki táblázatokat és ezek az átvételi szabványoknál alkalmazásra is kerültek.

Hazánk a felszabadulás előtt ipari téren elmaradott ország volt, ahol a statisztikai minőségellenőrzésnek alig találjuk nyomát. Egy-két üzem alkalmazott mintavételi eljárást és néhány szabvány tartalmazott mintavételi előírásokat. Mindezek azonban tudományosan nem voltak megalapozva és így gyakorlati értékük is kétes volt.

Népgazdaságunk ötéves terve az iparnak és mezőgazdaságnak nemcsak minden eddigit felülmúló mennyiségi fejlesztését tűzi ki feladatul, hanem elsőrendű célként jelöli meg a minőség szintjének emelését, a gazdaságos, selejtmentes termelést. E célok elérése napirendre tűzte ipari dolgozóink, a munkások, technikusok, mérnökök szakmai ismereteinek, munkamódszereinek állandó fejlesztését, de ugyanakkor a minőségellenőrzés terén is fejlett, tudományos módszerek bevezetését. Szükséges tehát, hogy üzemeink minőségellenőrző osztályaiban, ahol ez indokolt és lehetséges, helyet találjanak a statisztikai ellenőrző módszerek. Ezzel együttjár természetesen, hogy minőségellenőreink egy részének szakismereteit ebben az irányban kiegészítsük.

Az Alkalmazott Matematikai Intézetnek e célok elérésében jelentős szerep jut. Mint azt az alábbiakban vázolni fogjuk, e módszerek jelentős matematikai eszközöket használnak fel és így mind e módszerek bevezetésének, mind folyamatos alkalmazásának munkájában az Intézetnek feladata az elméleti tanácsadás, de ugyanakkor, különösen az első időben, gyakorlati tenni-valók is. E feladat ellátásához az elméleti felkészülés mellett a Szovjetunió tapasztalatainak állandó tanulmányozása szükséges s fokozatosan a hazai tapasztalatok összegyűjtése.

Jelen ismertetésünkben először általában foglalkozunk a statisztikai minőségellenőrzés módszereivel, majd egyik alapvető módszernek elméleti — valószínűségi számítási — háttérét vizsgáljuk meg. E gondolatmenet tanulságaiból jutunk végül azokra az elméleti és gyakorlati feladatokra, amelyek e módszereknek népgazdaságunk minél nagyobb területén való elterjesztésében Intézetünkre hárulnak.

2. A tömegcikkgyártásnál előállított termékek igen nagy száma nehezé, költségessé teszi azok minden darabjának átvizsgálását, legtöbb esetben az gyakorlatilag keresztülvihetetlen. Elvileg sem lehetséges a 100%-os ellenőrzés ott, ahol valamely termék ellenőrzése a megvizsgált darab megsemmisítésével jár, mint izzólámpák élettartamának, csapágygolyók, téglák törési szilárd-

ságának mérésénél. A feladat ezekben az esetekben olyan módszerek kidolgozása, amelyek segítségével viszonylag csekély számú minta megvizsgálásával nagy biztonsággal tudunk következtetni a teljes gyártmányösszesség minőségi összetételére. E módszerek a minőségellenőrzés statisztikai módszerei.

A statisztikai minőségellenőrző módszerek részben gyártás közben, részben a már elkészült nagytömegű termék ellenőrzésénél kerülnek alkalmazásra. Az első, a gyártásközbeni ellenőrzés, valamely gyártási folyamat egy-egy művelete közben történik, oly módon, hogy bizonyos időközökben, pl. félóránként vizsgálnak meg 4—5—10 darabot s ezek bizonyos tulajdonságaiból következtetnek az előző vizsgálat óta eltelt időszak gyártmányainak összetételére. Azáltal, hogy a minta bizonyos adatait időrendben feljegyzik, vagy grafikusan felrajzolják, a gyártási műveletnek bizonyos tendenciái is előtűnnek. pl. a kés kopása következtében valamely hossz mérték — minőség szempontjából esetleg még elfogadható — meghosszabbodása. Ez a körülmény teszi lehetővé, hogy még megfelelő minőség gyártása mellett beavatkozzunk és a selejtes darabok gyártását idejekorán megakadályozzuk. Az időköz megválasztása, az egyes darabok minőségének, méreteinek megítélése természetesen attól függ, hogy milyen gyorsasággal történik a gyártás, milyenek a minőségi követelmények stb.

A késztermék ellenőrzés (végellenőrzés) alapproblémája, hogy adott darabszámú termékből hány darabot vizsgálunk meg és e mintával szemben milyen követelményeket támasszunk ahhoz, hogy a teljes összesség minőségére adott biztonsággal következtethessünk. Pl. 10 000 db égőből hány darabot vizsgálunk meg élettartamra s ezek adatait hogyan ítéljük meg ahhoz, hogy pl. 97%-os biztonsággal következtethessünk a teljes összesség átlagos élettartamára és selejtszázalékára. A 97%-os biztonság azt jelenti, hogy ha 10 000 darabos rendelést sokízben szállítunk és vizsgálunk meg e módszerrel, akkor 100 esetből átlagosan legfeljebb 3 esetben fordulhasson elő a teljes összességre vonatkozó helytelen következtetés.

3. A statisztikai minőségellenőrzés elvi, matematikai vonatkozásairól a következő példa segítségével igyekszünk képet adni. Vegyünk egy automata-gépen végbemenő gyártási műveletet, amely pl. 238 mm hosszúságú fémhengereket állít elő. Tekintsünk most el a nagyszámú gyártmánydarab egyéb tulajdonságaitól és fordítsuk figyelmünket csupán annak hosszúságára. Tegyük fel, hogy a gép huzamos időn keresztül kifogástalanul működik, helyesen állították be s az anyag is megfelel a követelményeknek. Az automatáról egymásután lekerülő darabok hosszát kellő pontosságú műszerrel mérve még ebben az esetben is azt fogjuk tapasztalni, hogy ahány darab, annyiféle a mért hosszúság és ezek az egymásutáni mérési adatok látszólagos szabálytalanságban, összevisszaságban követik egymást. Az egyes hosszúságértékek itt véletlenszerűen jelentkeznek: egy-egy lekerülő darabról előre soha sem tudjuk megmondani, hogy milyen lesz a pontos hosszúsága, legfeljebb — a gyártás ismeretében — csak annyit mondhatunk, hogy a kapott értékek általában két határ — pl. 236,7 és 239,3 mm — közé esnek. E véletlenszerűség nyilván nem annak következménye, hogy nem meghatározott okok hozzák létre az egyes hengerek hosszúságát, hanem azok létrejöttében olyan nagyszámú és bonyolult ok játszik közre, amelyeket gyakorlatilag lehetetlen áttekinteni; ilyen okok pl. a befogó szerkezetnek, a késnek apró rezgései, az anyagban előforduló kisebb egyenlőtlenségek, a hőmérséklet ingadozásai stb. A *valószínűségszámítás* mármost ilyen *véletlenszerű tömegjelenségekkel* foglalkozik s minthogy tárgyát, fogalmait,

a való világ jelenségeiből vonatkoztatta el, érthető, hogy eredményei felhasználhatók a tárgyat képező véletlenszerű jelenségek vizsgálatára, a mutatkozó törvényszerűségeknek a termelés szolgálatába állítására.

Lássuk az adott példánál milyen szabályszerűség mutatkozik meg, ha nagyszámú munkadarab hosszúságát tesszük vizsgálat tárgyává. Mérjünk meg pl. 1000 darabot közülük hosszúságra és számláljuk meg, hány darab esik a 236,7 mm-től 236,9 mm-ig terjedő közbe, hány darab a 236,9 mm-től a 237,1-ig terjedőbe, s. i. t. A kapott értékeket táblázatban tüntetjük fel, ahol az első oszlopban a közöket, a másodikban az illető közbe tartozó darabok számát tüntettük fel, míg a harmadik oszlop az illető közbe tartozó darabok számának az összes megmért darabok számához való arányát tünteti fel. Egy ilyen táblázat pl. a következő :

236,7—236,9	1	0,001
236,9—237,1	7	0,007
237,1—237,3	19	0,019
237,3—237,5	61	0,061
237,5—237,7	119	0,119
237,7—237,9	185	0,185
237,9—238,1	213	0,213
238,1—238,3	195	0,195
238,3—238,5	113	0,113
238,5—238,7	59	0,059
238,7—238,9	21	0,021
238,9—239,1	5	0,005
239,1—239,3	2	0,002

1000                      1,000

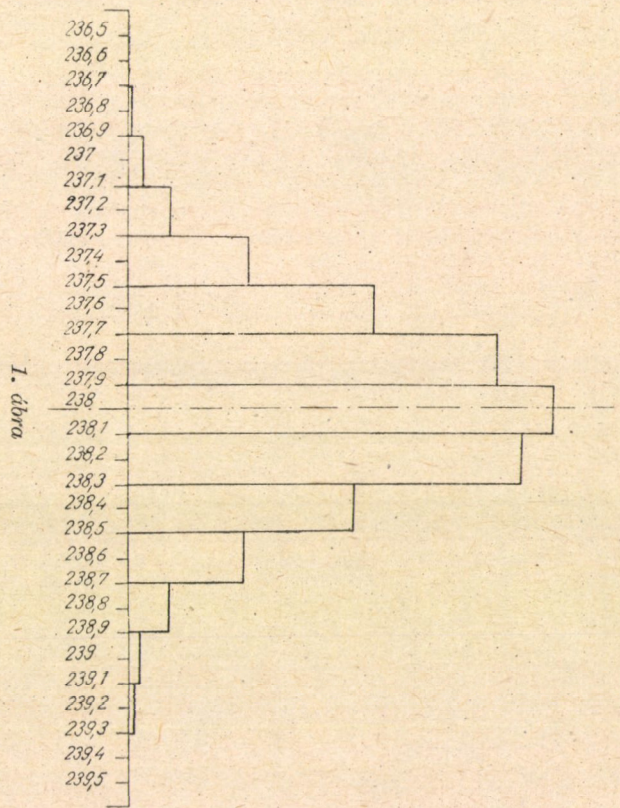
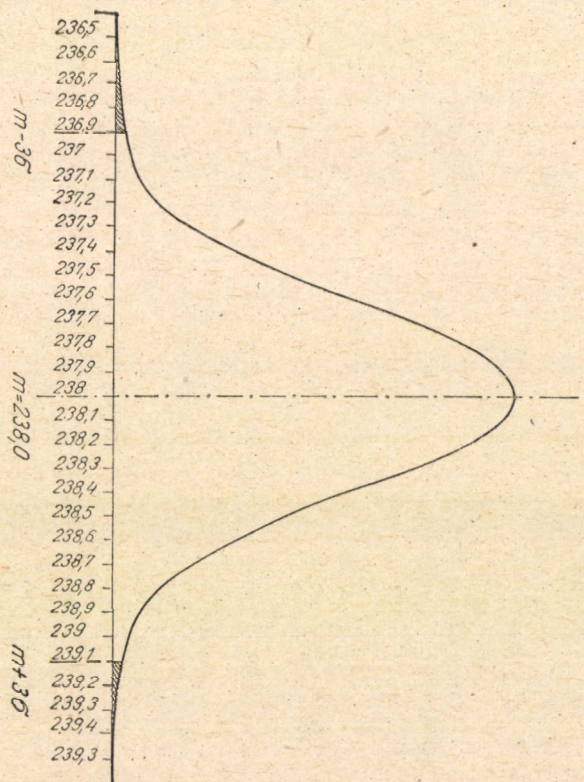
Az értéktáblázatból azonnal feltűnik az a szabályszerűség, hogy míg a középső (237,9 mm-től 238,1 mm-ig terjedő) közbe az összes darabok jelentős része (21,3%-a) esik, addig a többi közökbe kevesebb jut és pedig annál kevesebb, minél jobban eltávolodunk mindkét irányban ettől a hosszúságköztől. Még szembetűnőbb ez a szabályszerűség, ha a jelenséget a következő módon ábrázoljuk : vízszintes tengelyre felvisszük a közöket és mindegyik köz fölé olyan magasságú téglalapot állítunk, amely területének mérőszáma arányos az illető közhöz tartozó darabok számával, oly módon, hogy az összes téglalapok együttes területe az egységet adja.

Ha a mérések számát szaporítjuk s egyúttal a közöket sűrítjük, akkor téglalapjaink felső oldalai mindinkább megközelítik azt a folytonos görbét, amely következő ábránkon látható s melynek általános egyenlete

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Ezt a görbét Gauss-féle vagy normális eloszlásgörbének nevezzük, alakja után szokásos a haranggörbe elnevezés is. Ilyen típusú eloszlásgörbéhez bizonyos feltételek fennforgása esetén jutunk. Ilyen feltételeket elsőnek *Markov* és *Ljapunov* adtak meg.

Mint látjuk,  $e$  görbét két állandó —  $m$  és  $\sigma$  — határozzák meg. Ezeket az adatokat véges sok mérés alapján még pontosan nem ismerjük, azonban elég





nagyszámú mérés birtokában igen jó közelítő értéküket kaphatjuk a következő módon : Ha az egyes darabok hosszát  $x_1, x_2, \dots, x_n$ -el jelöljük, akkor

$$m \approx \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \bar{x},$$

vagyis  $m$ -et az egyes értékek számtani közepe közelíti meg jól, míg  $\sigma$ , az ú. n. szórás, a következő formulából nyerhető :

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}.$$

Fenti haranggörbe mármost a következő igen lényeges tulajdonsággal bír, amely tulajdonság a téglalapokból álló idommal való összefüggéséből nyilvánvaló : a vízszintes tengely két pontja (értéke) közti szakasz fölött és a görbe megfelelő része alatti terület azoknak a daraboknak részarányát adja, amelyek hossza e két érték közé esik. Ilymódon  $m$  és  $\sigma$  — pontos vagy elég jól közelítő — ismerete jelentős információt nyújt arra nézve, hogy a gyártás további során megadott két érték közé eső hosszúságot az összes darabok közül milyen arányban várjunk. Így például igazolható, hogy  $m - 3\sigma$ -tól  $m + 3\sigma$ -ig terjedő intervallumba esik az egész görbe alatti terület 0,997%-a, vagyis olyan esetek, hogy az egyes darabok hossza  $m - 3\sigma$ -nál kisebb és  $m + 3\sigma$ -nál nagyobb, 0,3%-ban fordulnak átlagosan elő.

A fenti adatokból  $m \approx 237,992$  és  $\sigma \approx 0,3708$  tehát várhatjuk, hogy a következő 1000 darab gyártmányban legfeljebb 3 darab lesz olyan, amelynek hossza 236,8868-nél kisebb és 239,1116-nál nagyobb.

Ezzel azonban már birtokában vagyunk a gyártásközbéli ellenőrzés egyik módszeréhez szükséges ismereteknek. Tegyük fel, hogy az adott esetben, amikor tehát 238,0 mm hosszúságú hengereket gyártunk, a darabok felhasználásánál a hosszúságban 1 mm hiba még nem bír jelentőséggel, vagyis 236,86 mm-től 239,14 mm-ig terjedő nagyságok nem jelentenek selejtet. Vizsgáljunk meg tehát a gyártás során — például félóránként — 4 darabot hosszúságra. Ha e négy érték a 236,9 és 239,1 közé esik, a gyártás folyamatát rendbenlévőnek tekintjük. Ha azonban a 4 közül akár egynek a hosszúsága is kívül esik ezeken a határokon, arra következtethetünk, hogy a gyártás stabilitása megbomlott, hogy a sok apró hatás mellett már jelentős mértékű, szisztematikus zavaró ok játszik közre a hosszúság kialakításában. Ugyanis olyan értéket, amelyet 1000 közül három esetben várunk, nem találjuk valószínűnek, hogy 4 közül akár egyszer is előforduljon. Ilyenkor a statisztikai ellenőr figyelmezteti a gépkezelőt a gyártási művelet felülvizsgálatára és az előző ellenőrzés óta legyártott darabok is tüzetesebb ellenőrzés alá kerülnek.

Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban a statisztikai ellenőrzés számtalan más formája is alkalmazásra kerül. Így pl. a 4 mérés legnagyobb és legkisebb értékét vizsgáljuk, esetleg csak ezek különbségét vagy számtani közepüket számítjuk. Az adatokat rendszerint grafikonokra, ú. n. ellenőrző diagrammokra visszük fel. Ilyen diagramm látható az alábbi ellenőrzőkártyán (3. ábra), amelyen négy-négy érték számtani közepének időbeli alakulását szemléltetjük.

A kártya feliratai úgy készültek, hogy használatát pontosan megvilágítják. A gyártmányok akkor nem selejtesek, ha méretük az alsó és felső tűréshatárok közé esik ; ha azonban az átlag a — szaggatott vonallal jelzett —

3. ábra

kontrollhatárokon kívül esik, már figyelmeztetés a gépkezelő részére, aki ilyenkor átállítja a gépet. Ez az eset fordul elő pl. az első időpontban történt mérés után. — Látjuk, hogy az átlagok tendenciája növekvő és az utolsó értékek, bár a felső kontrollhatáron belül esnek, arra mutatnak, hogy újabb beállítás nélkül a következő időszakban selejtes darabok fordulhatnak elő. Megjegyezzük — és ez a kártya felirataiból is kitűnik — hogy az átlag mellett szokásos a mintában talált legnagyobb és legkisebb érték különbségét is vezetni, ami a szórás értékének változásaira figyelmeztet.

4. Az előzőekben tárgyalt példa útján képet adtunk arról, miként vezet a tapasztalat bizonyos elméleti fogalmakhoz, törvényszerűségekhez és ezeket a törvényszerűségeket hogyan használhatjuk fel a gyakorlatban a tömeggyártásnál a minőség ellenőrzésére. Tudnunk kell azonban, hogy az adott példa igen sok szempontból egyszerűsített modelljét adja a gyártás egy műveletének. A valóságban a hosszméretekre kapott eloszlások nem mindig közelítik meg a normális eloszlást, továbbá nemcsak hosszúságot, hanem sok más mennyiséget is mérünk (köbtartalom, súly, átmérő) s ezek igen sokszor már elvileg nem vezetnek normális eloszláshoz. Szükséges tehát számtalan más eloszlás elvi és tapasztalati vizsgálata. Ugyanannál a műveletnél mért értékek különböző adatfelvételek esetén — egymással nem egészen azonos tapasztalati eloszlást adnak. Mikor tekintjük ezeket azonosaknak, mikor lényegesen különbözőeknek — ismét egy kérdés, melynek megoldása a matematikai statisztika mélyenjáró eredményeire támaszkodik. A gyártás során felmerülő különböző szisztematikus hibák az eloszlás más más természetű megváltozására vezetnek; így megváltozhat az átlag, vagy a szórás, esetleg mind a kettő. Konkrét gépkonstrukció esetén milyen mennyiségi összefüggések állnak fenn egyrészt a gép bizonyos szisztematikus hibái, másrészt az eloszlás és jellemző mennyiségeinek megváltozása között.

Az elmélet és gyakorlat összefüggő kérdéseinek egész sorát vethetjük fel, amelyek szükségessé teszik a matematikai statisztika utolsó évtizedekben kifejtett elméletének ismeretét és alkalmazását, de sok esetben továbbfejlesztését is. Ugyanakkor azonban szükséges a gyakorlat tapasztalatainak széleskörű megismerése is. Indokolt tehát, hogy a minőségellenőrzés statisztikai módszereinek népgazdaságunk számtalan területén való bevezetése és alkalmazása munkájában az Alkalmazott Matematikai Intézet nem csupán mint elméleti tanácsadó szerv vegyen részt. Feltétlenül szükséges, hogy tevékenyen részt vegyünk e módszerek bevezetésének előkészítésében, az adatok kiértékelésében, az ellenőrzés munkája folyamán használatos ellenőrzőkártyák megszerkesztése munkájában, de ezen túlmenően szükséges, hogy a már folyamatban lévő ellenőrzési munkákat figyelemmel kísérjük, a szerzett tapasztalatokat megismerjük és elméleti tanácsainkkal a munkát támogassuk. Részt kell vennünk az ezzel foglalkozó vezetők és statisztikai ellenőrök kiképzésében is a tanfolyamok anyagának összeállítására, néhány előadás tartása révén.

E feladatok teljesítésében — kellő hazai tapasztalatok hiányában — támaszkodnunk kell a Szovjetunió elért elméleti és gyakorlati eredményeire, a szovjet irodalom tanulmányozására. E téren nagyjelentőségű számunkra, hogy rövidesen magyar fordításban jelenik meg *Din*: Matematikai statisztika a technikában c. műve, amely könyv legjelentősebb részében az ipari minőségellenőrzés módszereivel foglalkozik, e tárgykörből veszi példáit, s amely könyv az élenjáró szovjet valószínűségi számítás és matematikai statisztika eredményeit igyekszik a tudományos követelmények kielégítése mellett tárgyalni.



Az Intézetre váró említett feladatokat tükrözik vissza azok a szocialista versenyszerződések, amelyeket az Intézet a Csepel Autógyárral és a Telefongyárral kötött. Éppen a feladatok szemléltetésére helyesnek találjuk a Csepel Autógyárral kötött szerződés szövegét szószerint közölni:

»A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete és a Csepel Autógyár a szovjet példamutatás alapján a tudományos kutatás és az ipari termelés jobb együttműködése, a társadalmi munka kiszélesítése érdekében egymás kölcsönös megsegítésére szocialista versenyszerződést kötnek.

A Csepel Autógyár be kívánja vezetni a minőségellenőrzés statisztikai módszereit. Ennek a komplex feladatnak a végrehajtásában a Csepel Autógyár, a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete és a Gépipari Technológiai Intézet együttműködnek. A Gépipari Technológiai Intézet a vele már ez év márciusában megkötött szocialista versenyszerződés értelmében működik közre az általa kijelölendő szakértő útján.

Jelen szerződés a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete és a Csepel Autógyár közötti kölcsönös kötelezettségvállalást rögzíti le és tárgyát a következők képezik:

Az Intézet minden szükséges útmutatást megad azokra az elméleti kérdésekre vonatkozólag, amelyek a minőségellenőrzés statisztikai módszerének bevezetésével kapcsolatosak, továbbá segítséget nyújt a beindítás után felmerülő tudományos problémák megoldásában.

A statisztikai módszerek bevezetésével kapcsolatos statisztikai adatok feldolgozását az Intézet részben maga vállalja, részben gondoskodik arról, hogy megfelelő alkalmazott matematikus hallgatók álljanak rendelkezésre, akik eközben a minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszereinek gyakorlati alkalmazásával maguk is közvetlenül megismerkednek.

Az Intézet vállalja, hogy a minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszereinek bevezetését és azok folyamatos alkalmazását rendszeres látogatásokkal (havonként legalább 6 alkalommal, a szükségnek megfelelően) segíti elő. Ezt a feladatot az Intézet minőségellenőrzési csoportja végzi, amelyből az Intézet igazgatója kijelöli azt a személyt, aki a versenyszerződéssel kapcsolatos teendőkben állandó összekötőként szerepel.

Az Intézet támogatást nyújt a statisztikai minőségellenőrök betanítására.

Az Intézet a statisztikai minőségellenőrzés kérdéséről két ismertető előadást tart az Autógyárban.

Az Autógyár statisztikai minőségellenőrző szervének vezetője az Intézetben két alkalommal beszámol a statisztikai módszerek bevezetésének állásáról és a módszer bevezetése során szerzett tapasztalatokról.

A Csepel Autógyár vállalja, hogy a statisztikai módszerek bevezetésével kapcsolatban összegyűjtött adatokat oktatási és tudományos célokra az Intézet rendelkezésére bocsátja.

A Csepel Autógyár lehetővé teszi, hogy a Tudományegyetemen tanuló nyaiakat végző alkalmazott matematikus hallgatók az Intézet vezetésével időnként gyárlátogatásokat tehessenek, valamint 1—2 hetes üzemi gyakorlaton vehessenek részt az Autógyárban, elsősorban a statisztikai ellenőrző módszerek bevezetésének tanulmányozása céljából.

A Csepel Autógyár lehetővé teszi, hogy azokkal a matematikai problémákkal kapcsolatban, amelyeket az Intézet elvi síkon már vizsgált (pl. gép-



alkatrészek tartalékolásának ütemterve, energiaforrások véletlenszerű igénybevétele stb.) az Intézet a gyár működésében tapasztalatokat szerezzen, illetve erre vonatkozólag adatokat kapjon.

A Gépipari Technológiai Intézettel együttműködve a minőségellenőrzés statisztikai módszerének bevezetésének munkatervét a helyzet feltárása után III. negyedévre vonatkozóan augusztus 20-ig havi ütemezésben dolgozzuk ki.

Az Intézet jelenleg folytatott munkáját illetően megjegyezzük, hogy az mind a Csepel Autógyárban, mind a Telefongyárban a statisztikai módszerek bevezetésénél tart. Előzetes mérések és számítások alapján megszerkesztettük a szükséges ellenőrző kártyákat s ezek alapján a Telefongyárban már folyik ellenőrzés, az Autógyárban jelenleg indul meg. A Telefongyárban az ellenőrzés rövid ideje alatt is bizonyos eredmények mutatkoztak. Így pl. a fazon- és csavarautomatákon a selejtszázalék múlt év augusztus 15-e előtt 1,5% volt; ez a szám a statisztikai minőségellenőrzés bevezetése következtében 0,51%-ra csökkent. Egy forgácsoló fazonautomata gépen egy gyártmánynál három lényeges méret közül kettőnél megtörtént a gyártásközbéli statisztikai minőségellenőrzés bevezetése méretellenőrző kártyák segítségével. A végellenőrzés megállapította, hogy ezen méretek nem megfelelő volta miatt selejtes darabok száma 0,22% alá süllyedt, míg a statisztikailag nem ellenőrzött méret nem megfelelő volta miatt selejtes darabok száma 5,9%-ot tett ki. Ezek a kezdeti eredmények, melyek elérésében Intézetünk részéről *Fontányi Ágota*, a Telefongyár részéről *Juhász Géza* jó munkáját kell kiemelnünk, mutatják, hogy milyen nagy lehetőségek vannak ezen a téren. Folyamatban vannak más nagyüzemekkel kapcsolatban is előkészítő munkálatok, továbbá késztermék ellenőrzési módszerek kidolgozása.

Az Intézet munkája elvi síkon is folyik. Megvitattuk *Braginszkij* ú. n. individuális értékek alapján való ellenőrzési módszereit s a vita nyomán eredmények is születtek, melyek *Rényi Alfréd*, illetőleg *Hajós György* és *Rényi Alfréd* munkái. Az Intézet kidolgozott továbbá egymásutáni gyártási műveletek gazdaságos ellenőrzésének elbírálására vonatkozó módszereket.

E szerződésből tűnik ki egy eddig nem említett fontos feladata az Intézetnek: a káderek nevelése. A Tudományegyetemen hallgató alkalmazott matematikusok gyakorlati irányú képzése az Intézet feladata, amely feladat ellátása az Intézetben folytatott termelési gyakorlatok útján történik. Az Intézet e hallgatókat bevonja az ipari minőségellenőrzés statisztikai módszerének bevezetési munkájába üzemi mérések, statisztikai számítások elvégzésével, ellenőrzőkártyák megszerkesztésével stb. Ily módon biztosítjuk, hogy a végzett hallgatók az üzembe kikerülve a statisztikai minőségellenőrzés problémáinál is megállják a helyüket.

Az eddigiekben inkább a gyártásközbéli ellenőrzés munkájáról volt szó, de mint említettük, a végellenőrzés helyes módszereinek kidolgozásával is foglalkoztunk. E feladat már kevesebb gyakorlati munkát ró az Intézetre, de itt is minden esetben szükséges a konkrét viszonyok tanulmányozása annak megállapítására, hogy az ismert módszerek közül melyiket alkalmazzuk. esetleg milyen új módszereket vezessünk be. Természetesen a tapasztalat az irányadó annak eldöntésében, hogy mely módszer gazdaságos és vezet jó eredményre a minőség megállapításában. Fontos feladat e téren szabványaink helyes — a matematikai statisztika tudományos követelményeinek megfelelő — átdolgozása is. Itt természetesen azokra a szabványelőírásokra gondolunk, amelyek a minőségnek mintavételi eljárás útján való megállapítását

célozzák. Ezért szoros együttműködés szükséges a Magyar Szabványügyi Intézettel, amely éppen a közelmúltban tűzte napirendre régi szabványelőírásainak megjavítását.

Úgy véljük, hogy már maguk a felsorolt feladatok eléggé jelentősek nép-gazdaságunk számára ahhoz, hogy az Intézet munkatervében a minőségellen-őrzés statisztikai módszerei kellő súllyal szerepeljenek. E munkánkkal is arra törekszünk, hogy eredményesen járuljunk hozzá a minőség emeléséért, a selejt csökkentéséért folytatott harchoz s ezzel is elősegítsük öt éves tervünk teljesítését és túlteljesítését.

#### IRODALOM

- Rényi Alfréd*: Bevezetés a valószínűségszámításba. (Sajtó alatt).  
*Dlín*: Mechanikai statisztika a technikában. (Sajtó alatt.)  
*Szentmártony Tibor*: Matematikai statisztika a műszaki gyakorlatban. (Budapest, 1949. Mérnöki Továbbképző Intézet).  
*Szokolovszkij*: Gépgyártás technológiája. (Budapest, 1951. Tankönyvkiadó).  
*Gosztyev*: Műszaki ellenőrzés és harc a selejt ellen a gépiparban. (Budapest, 1949. Nehézipari Könyvkiadó).  
*Fontányi Ágota*: A matematikai statisztika a minőségellenőrzésben. (Magyar Technika. VI. évf. 1. sz. 1951. I.)

#### СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА И ЗАДАЧИ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ В ОБЛАСТИ ВВЕДЕНИЯ ЭТИХ МЕТОДОВ

И. ВИНЦЕ

Резюме

Работа знакомит с простыми методами статистического контроля в течении производства и статистического контроля готового продукта. Потом, работа перечисляет задачи Института при введении этих методов в производстве. Для иллюстрирования этих задач работа сообщает текст соглашения, заключенного между Институтом и авто-заводом «Чепель» в интересе введения статистических методов в Автозаводе, и некото-рые первые результаты, полученные при введении статистических методов в Телефонном Заводе.

#### MÉTHODES STATISTIQUES DU CONTRÔLE DE QUALITÉ INDUSTRIEL ET LES TÂCHES DE L'INSTITUT DES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DANS LE CHAMPS DE L'INTRODUCTION DE CES MÉTHODES

E. VINCZE

RÉSUMÉ

L'article décrit brièvement les méthodes statistiques simples du contrôle de la qualité pendant la fabrication ainsi que celles du contrôle statistique du produit achevé. Après cela, l'article donne une énumération des tâches que l'Institut doit accomplir en forme de conseils théoriques et d'aide pratique (évaluation des données de mesures, instruction donnée aux contrôleurs) en connexion avec l'introduction des méthodes statis-tiques. Comme illustration de ces tâches, l'article publie le texte du contrat de concours socialiste conclu entre l'Institut et la Fabrique d'Automobiles de Csepel pour le but d'introduire les méthodes statistiques dans la fabrique d'automobiles et communiquer les premiers résultats obtenus par l'introduction des méthodes statistiques dans le Fabrique de Téléphone.

**AZ OSZTÁLY MUNKATÁRSAINAK AZ OSZTÁLY MUNKÁJÁNAK EREDMÉNYEIT  
TARTALMAZÓ, MÁSTUTT MEGJELENT DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE**

*Vincze István:* A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai  
Intézetének feladatáról. MTA III. o. Közleményei I. 1. (1950).

*Vincze István:* A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai  
Intézetének működéséről. MTA III. o. Közleményei. I. 2—4. (1951.)

*Vincze István:* Műszaki mutatószámokról. Többtermelés. 1951.

NUMERIKUS- ÉS GRAFIKUS MÓDSZEREK OSZTÁLYA





# A PLANIMÉTEREK MŰKÖDÉSI ELVE, KÜLÖNÖS TEKINTETTEL AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZET GÉPEIRE

FREY TAMÁS

## ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk részletesen ismerteti a polár-, lineár- és radiálpplaniméterek, valamint a Stieltjes-planiméterek működési elvét és konstrukcióját. — Rendszeresen és a szokásosnál részletesebben tárgyalja az  $\int_a^b f[y(x)] dx$  és  $\int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) dx$  alakú integrálok mérésére alkalmas funkciós planiméterek és funkciós integriméterek elméletét; utóbbi feladat megoldására szolgáló planiméter-típusok konstrukciójára konkrét javaslatot is ad: a Lorenz-planiméter megfelelő átalakítások elvégzése után alkalmazható e célra.

Ismerteti a cikk a Nyström-féle Stieltjes-planiméter egy gyakorlatilag hasznosnak bizonyult alkalmazási lehetőségét többparaméteres határozott integrálok numerikus kiértékelésénél.

Ebben a cikkben a leggyakrabban alkalmazott matematikai műszerek — a különböző planiméterek — elvi kérdéseivel foglalkozunk; olyan általánosan, hogy helyenként a fejlődés lehetőségeire is rámutathassunk; ismertetjük eközben az Alkalmazott Matematikai Intézet gépeit és azokat a különleges alkalmazási lehetőségeket, amelyek eddig a munka során felmerültek.

A cikk ismerteti azon technikai gépelemek nagy részét, amelyeket a mechanikai elven felépülő matematikai gépekben felfelhasználnak.

Ismertetjük e cikkben az Intézet harmonikus analízátorát is; ez ugyanis tulajdonképpen Stieltjes-planiméter. A harmonikus analízátorokról általánosságban azonban csak egy későbbi cikkben szándékozunk beszámolni.

A cikk első részében a planiméterek feladatát, elvi alapjait, a használt mérőműszereket ismertetjük; a második részben részletesen tárgyaljuk az egyes típusokat; végül a planiméterek speciális alkalmazási lehetőségeit és a várható pontosságot vázoljuk.

## 1. §. A planiméterekről általában

### 1.1. Feladatuk, csoportosításuk

Planiméternek hívjuk összefoglalóan a változó, vagy állandó felső határral rendelkező határozott integrálokat gépi úton mérő műszereket. Grafikusan

adott  $y = y(x)$ , ill.  $r = r(\varphi)$  egyenletű  $(g)$  görbe végigtapogatása alapján legáltalánosabban a

$$\int_{(g)} f[x, y(x)] dx \quad \text{ill.} \quad \int_{(g)} \Phi[r(\varphi)] d\varphi$$

alakú integrálok értékét tudjuk segítségükkel meghatározni.

Legegyszerűbb felépítésűek az ú. n. *körüljáró-planiméterek*, amelyek

$$\int_a^b y(x) dx; \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi) d\varphi \quad \text{és} \quad \oint \frac{r^2}{2} d\varphi$$

alakú integrálok meghatározására alkalmasak. Ennél összetettebbek a változó

felső határú,  $\int_a^{b(x)} y(x) dx$  alakú integrálokat mérő *integríméterek*. Legáltaláno-

sabbak a *funkciós-planiméterek* és *funkciós integríméterek*. Ezek — a grafikusan adott  $y = y(x)$  vagy  $r = r(\varphi)$  görbét végigjárva — felépítésüktől függően különböző

$$\int_a^b f[x, y(x)] dx; \quad \int_a^{b(x)} f[x, y(x)] dx \quad \text{ill.} \quad \int_{\alpha}^{\beta} \Phi[r(\varphi)] d\varphi \quad \text{és} \quad \int_{\alpha}^{\beta(\varphi)} \Phi[r(\varphi)] d\varphi$$

alakú integrálok értékét mérik. Külön tárgyaljuk az  $\int_{H(a)}^{H(b)} y(x) \cdot d[H(x)]$

alakú Stieltjes-integrálokat meghatározó *Stieltjes-planiméterek* működési elvét.

Tárgyalásunk kiindulási alapja egy általános egyenlet lesz, amely kapcsolatot teremt a műszer által mért és az integrál által meghatározott mennyiség között. Az ú. n. radiál-planiméterek és a Stieltjes-planiméterek kivételével valamennyi műszer tárgyalásához ezen egyenlet alapján kezdünk. Mindenekelőtt azonban bizonyos elnevezésekben és jelölésekben állapodunk meg.

A *követőkar*; egyik pontja a műszer felépítése által meghatározott kényszerpályán mozog; ez a *követőkar vezetett pont*-ja. Az ebbe a pontba mutató helyvektort (amely természetesen valamely  $\tau$  paraméter függvénye)  $v(\tau)$ -vel jelöljük; rendezőit pedig  $v_1$ -gyel, ill.  $v_2$ -vel. A követőkar egyik végpontján a — grafikusan adott — görbe követését megkönnyítő fonalkeresztes nagyító vagy tű nyer elhelyezést. Ez a *követőpont*, amelynek a helyvektora  $k(\tau)$ , rendezői pedig:  $x$  és  $y$ . A követőkarnak az abszcisszatengellyel bezárt szöge:  $\alpha$ .

A *mérőkar*; ezen helyezzük el a mérőműszert. A mérőkar egyik pontja ismert területet fut körül; ez a *tartópont*. Helyvektora a  $t(\tau)$  vektor; rendezői:  $t_1$  és  $t_2$ . A másik jellemző pont, — amelynek pályagörbéjét a követőpont pályagörbéjével hozzuk kapcsolatba — az ú. n. *futópont*. Ebbe a pontba mutat az  $f(\tau)$  vektor. Rendezői:  $X$  és  $Y$ . A mérőkar az abszcisszatengellyel  $\mu$  szöget zár be.

Meg kell jegyeznünk, hogy a mérőkar gyakran fiktív, vagy legalább is materiálisan nem teljesen kiképzett. A körüljáró-planimétereknél pedig azonos a követőkarral.

## 1. 2. Az alapegyenlet

A planiméteren elhelyezett mérőműszer bizonyos vonalintegrál értékét méri. Ez kapcsolatban áll a futópont által meghatározott területtel. (Körüljáró és funkciós planimétereknél a futópont körülfutja a kérdéses területet, integriméter-típusú műszereknél viszont a futópont pályagörbéje és az abszcissza-tengely megfelelő szakasza — valamint a határoló ordináták — közé eső területről van szó.)

Az előzőekben rögzített jelölések mellett még az alábbiakat használjuk :

$\mathbf{l}(\tau) = \mathbf{k}(\tau) - \mathbf{v}(\tau)$  a követőkart jellemző vektor ;  $|\mathbf{l}| = l$ .

$\mathbf{m}(\tau) = \mathbf{f}(\tau) - \mathbf{t}(\tau)$  a mérőkart jellemző vektor ;  $|\mathbf{m}| = m$ .

A futópontba mutató  $\mathbf{f}$  helyvektor által — valamely  $\tau_0$  paraméterértékű kezdőhelyezettől  $\tau_v$  paraméterértékű véghelyzetig — súrolt szektorszerű terület kétszeres területvektora :

$$2S_f = \int_{\tau_0}^{\tau_v} (\mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}}) d\tau.$$

Ugyanezen paraméter-intervallumban a tartópontba mutató helyvektor által súrolt szektorszerű terület kétszeres területvektora :

$$2S_t = \int_{\tau_0}^{\tau_v} (\mathbf{t} \times \dot{\mathbf{t}}) d\tau.$$

(A pont  $\tau$ -szerinti differenciálást jelent).

Felhasználjuk az  $\mathbf{m} = \mathbf{f} - \mathbf{t}$  összefüggést :

$$\mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}} = (\mathbf{t} + \mathbf{m}) \times (\dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{m}}) = \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{t}} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{m}} + \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{t}} + \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}.$$

$$\text{De : } \frac{d}{d\tau} [\mathbf{m} \times \mathbf{t}] = \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{t} + \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{t}} = \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{t}} - \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{m}}.$$

Ezt az előző egyenlet jobboldalán a második tagban felhasználva :

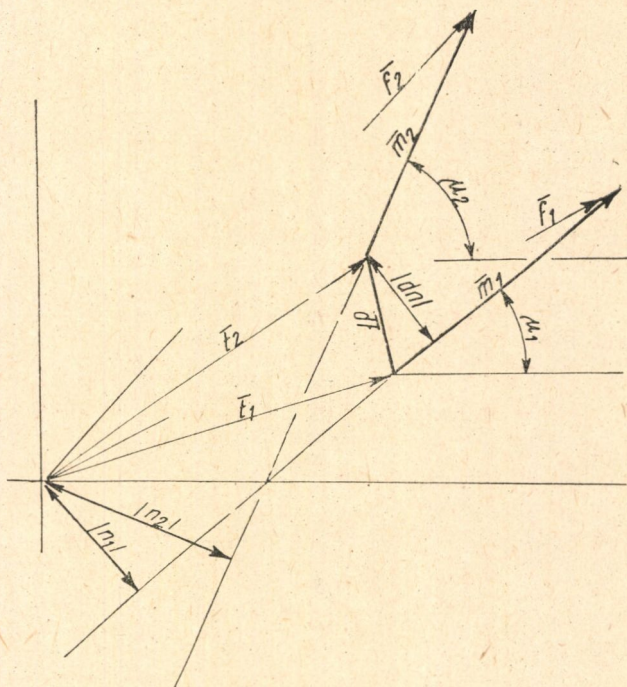
$$\mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{t}} + 2(\mathbf{m} \times \dot{\mathbf{t}}) - \frac{d}{d\tau} [\mathbf{m} \times \mathbf{t}] + \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}.$$

Az ábrán a  $\tau_1$  paraméterértékhez tartozó mennyiségeket egyszerűen az 1 index-szel jelöltük ; hasonlóképp a  $\tau_2$  paraméterértékre vonatkozó mennyiségeknél a 2. indexet használtuk.

Egyenletünk jobboldalán valamennyi tagban egymással párhuzamos vektorok szerepelnek ;  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{m}$ , továbbá  $\dot{\mathbf{f}}$ ,  $\dot{\mathbf{t}}$  és  $\dot{\mathbf{m}}$  vektorok ugyanis konplanárisak, vektoriális szorzataik tehát az őket tartalmazó síkállás normálisába esnek. Jelöljük a normálisba eső — a szögek pozitív irányához jobbcsavarnak megfelelően irányított egységvektort  $\mathbf{e}$ -vel. Használjuk fel a  $\tau_2 - \tau_1 = d\tau$ , továbbá az 1. ábra  $n$  és  $dn$  jelöléseit ( $n$  jelenti a  $\mathbf{t}$ ,  $dn$  pedig  $d\mathbf{t}$ -nek  $\mathbf{m}$ -re merőleges *előjeles vetületét* ; ha  $\mathbf{m}$  és  $\mathbf{t}$ , ill.  $\mathbf{m}$  és  $d\mathbf{t}$  egymással bezárt szöge  $\pi$ -nél kisebb, a vetületnek



pozitív<sup>7</sup> mértékszámot tulajdonítunk, ellenkező esetben negatívot.) Jelentse továbbá  $S_f$  az  $\mathbf{f}$ ,  $S_t$  pedig a  $\mathbf{t}$  vektor által sűrolt szektorszerű terület előjeles



1. ábra

mértékét (pozitívnek tekintjük a területet, ha a kérdéses vektor azt pozitív irányban forogva sűrolja, negatív, ha negatív a forgás iránya). Legutolsó egyenletünket  $\tau_0$ -tól  $\tau_v$ -ig integrálva, a következőt kapjuk :

$$\int_{\tau_0}^{\tau_v} (\mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}}) d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_v} (\mathbf{t} \times \dot{\mathbf{t}}) d\tau + 2 \int_{\tau_0}^{\tau_v} (\mathbf{m} \times \dot{\mathbf{t}}) d\tau - [\mathbf{m} \times \mathbf{t}]_{\tau_0}^{\tau_v} + \int_{\tau_0}^{\tau_v} (\mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}) d\tau ;$$

felhasználva az  $(\mathbf{m} \times \dot{\mathbf{t}}) d\tau = \mathbf{m} \times d\mathbf{t} = m \cdot dn$  összefüggést :

$$e 2S_f = e \left[ 2S_t + 2 \int_{(g)} m dn + [m_0 n_0 - m_v n_v] + 2 \int_{(g)} \frac{1}{2} m^2 d\mu \right].$$

Tekintettel arra, hogy ezen egyenlet alapján csak olyan planiméterekkel foglalkozunk, amelyek mérőkarja állandó hosszúságú, alapegyenletünk az alábbi — végleges — formát ölti :

$$S_f = S_t + m \int_{(g)} dn + \frac{1}{2} (n_0 - n_v) m + \frac{m^2}{2} (\mu_v - \mu_0).$$



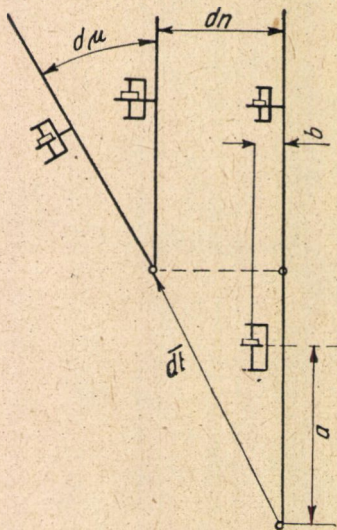
### 1. 3. A planiméterek mérőműszerei

Az alapegyenletben szereplő  $S_i$  értékét (általában) ismerjük,  $n_0$ ,  $n_v$ ,  $\mu_0$  és  $\mu_v$  értékét pedig — viszonylag egyszerű eszközökkel — szükség esetén mérni tudjuk. Mérőműszerre tehát az  $\int \underset{(g)}{dn}$  integrál meghatározása céljából van szükségünk. A következőkben ezek felépítését és működését ismertetjük.

1. 3. 1. *Az integrálkerék.* Jól csapágyazott, megfelelő recézéssel ellátott, nonius-leolvasású kerék, amelyet tetszés szerinti irányban eltolva, a síkjába eső elmozdulásösszetevőt gördülve, a rá merőleges csúszva követi. Tengelye általában párhuzamos a mérőkarral — attól technikai okok következtében bizonyos távolságra csapágyazva. Felfekvési pontja egybeeshet — különleges planimétereknél — a tartóponttal, de általában attól különbözik. (Előbbi esetben közvetlenül a keresett  $\int \underset{(g)}{dn}$  értéket méri a műszer, utóbbi esetben azonban — a mérőkar elfordulásával arányos taggal — bővül a mért érték).

A 2. ábrából látható, hogy a tartópont  $dt$  elmozdulásának az integrálkerék tengelyével (tehát a mérőkarral) párhuzamos komponense hatástalan — t. i. csak csúszást okoz. A merőleges,  $dn$  nagyságú komponens viszont tiszta gördülést létesít a

$$dn = 2\pi \varrho d\gamma_1$$



2. ábra

egyenletnek megfelelően ; itt  $\varrho$  az integrálkerék sugarát,  $\gamma$  pedig a szögelfordulását jelzi.

A kerék síkja a tartóponttól  $a$  (merőleges) távolságra van ; így a mérőkar  $d\mu$  szögelfordulása következtében az

$$a \cdot d\mu = 2\pi \varrho d\gamma_2$$



egyenletnek megfelelő  $d\gamma_2$  szöggel fordul el az integrálkerék. A teljes szögelfordulás :

$$d\gamma = d\gamma_1 + d\gamma_2 = \frac{1}{2\pi Q} [dn + ad\mu].$$

(A mért érték tehát nem függ  $b$ -től).

Ha tehát a tartópont  $t_0$ -ból  $t_v$ -be jut, az integrálkerék teljes szögelfordulása :

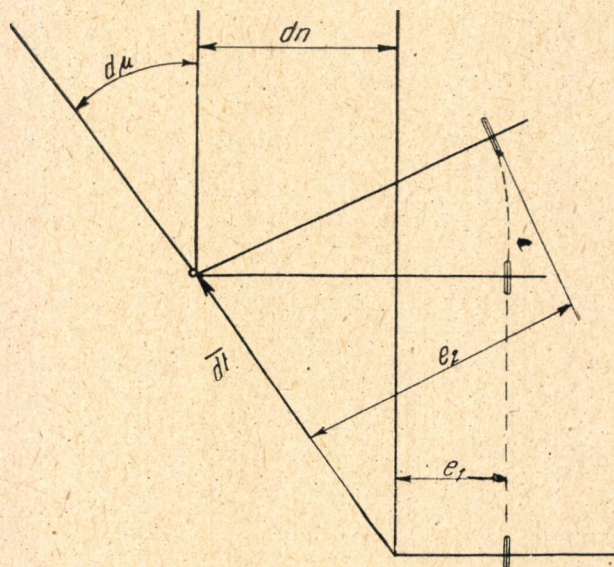
$$\gamma_v - \gamma_0 = \gamma = \frac{1}{2\pi Q} \left[ \int_{(g)} dn + \int_{(g)} a d\mu \right] = \frac{1}{2\pi Q} \left[ \int_{(g)} dn + a(\mu_v - \mu_0) \right].$$

Ezt az általános egyenletben az  $\int_{(g)} dn$  integrál kiküszöbölésére használjuk fel :

$$S_f = S_t + \left( \frac{m^2}{2} - ma \right) (\mu_v - \mu_0) + \frac{1}{2} m(n_0 - n_v) + 2\pi Q \gamma m.$$

Alapegyenletünket ebben a formában használjuk fel az integrálkerékkel felszerelt planimétereknél.

1.3.2. *Az eltolható vágókerék* éles szélű tárcsa, amely saját síkja irányában gördülhet, de erre merőleges csúszásra képtelen. Csapágyazása viszont olyan, hogy az elmozdulás tárcsára merőleges összetevője a tengelyen eltolja a kereket. Az eltolás nagyságát a tengellyel párhuzamosan elhelyezett mércén olvashatjuk le. (L. a 3. ábra jelöléseit). A kerék tengelyét a tartópontban, a mérőkarra



3. ábra



merőlegesen szerelik fel.  $e_1$ -el jelölve a  $\tau_1$  paraméterértékhez tartozó leolvasást,  $e_2$ -vel a  $\tau_2$ -höz tartozót :

$$dn = e_2 - e_1, \quad \text{azaz :} \quad m \int_{\tau_0}^{\tau_v} dn = m(e_v - e_0)$$

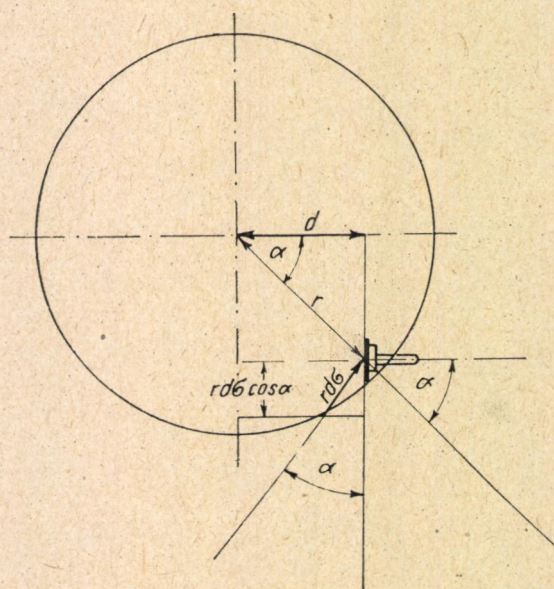
Ezt az alapegyenletben felhasználva :

$$S_f = S_t + \frac{m^2}{2} (\mu_v - \mu_0) + \frac{1}{2} m(n_0 - n_v) + m(e_v - e_0).$$

Vágókerékkel felszerelt planiméterek esetében az alapegyenlet itt megadott alakját használjuk.

1.3.3. *A késtárcsa* — ugyanúgy, mint a vágókerék — éles szélű (forgó) tárcsa, amely síkja irányában gördülhet ; az erre merőleges elmozdulást azonban megakadályozza, mert csapágyazása merev, nem csúsztatható. Ennek következtében a mérőkar csak önmagával párhuzamosan mozdulhat el (differenciális elmozdulásra gondolunk), azaz az alapegyenletben szereplő  $\int dn$  tag azonosan 0. A késtárcsa tehát a tartópont elmozdulására vonatkozó kényszert jelent ; arra újabb kényszert már nem gyakorolhatunk. Így az alapegyenlet  $S_t$ -vel jelölt tagjának számítása jelenti a komoly nehézséget a késtárcsával felszerelt planimétereknél. Ezekre az u. n. »vágóplaniméterek«-re vagy »uszályplaniméterek«-re vonatkozóan az alapegyenlet az alábbi alakot ölti :

$$S_f = S_t + \frac{m^2}{2} (\mu_v - \mu_0) + \frac{1}{2} m(n_0 - n_v).$$



4. ábra



1. 3. 4. *A tárcsás kerék, vagy Gonella-kerék* lényegében — egy fix tengely körül forgó síktárcsán gördülő — integrálkerék. Az integrálkerék szögelfordulását a tárcsa szögelfordulása és a kerék síkjának a tárcsa tengelyétől mért merőleges távolságának szorzata adja. (L. 4. ábrát).  $r$ -rel jelölve az integrálkerék felfekvési pontjának a tárcsa tengelyétől mért távolságát,  $\alpha$ -val az integrálkerék tengelye és a felfekvési pontot a tárcsa középpontjával összekötő egyenes által bezárt szöget,  $d$ -vel a kerék síkjának a tárcsa tengelyétől mért merőleges távolságát, végül  $d\sigma$ -val a tárcsa (differenciális) szögelfordulását, a következő egyenlet adja az integrálkerék szögelfordulását :

$$2\pi r d\gamma = r \cdot \cos \alpha \cdot d\sigma = d \cdot d\sigma, \quad \text{mert } d = r \cos \alpha.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

1. 3. 5. Az integrálkerék, mint láttuk, csúszik és gördül egyszerre. A gördülésnek feltétele azonban bizonyos nagyságú súrlódóerő ébredése ; a mechanika szerint viszont a csúszásra merőleges irányban súrlódóerő nem ébredhet. Ez az oka annak, hogy — ha az integrálkerék tengelye kicsiny szöget zár be a tartópont elmozdulásának irányával — megbízhatatlanná válik a műszer. Ezen olyan gördülőelemek beiktatásával próbáltak segíteni, ahol  $dt$ -nek mindkét komponense gördülést létesít. A nagyszámú gömb, henger, tárcsa, félgömb stb. kombinációról nincs helyünk beszámolni, csak annyit kívánunk megjegyezni, hogy valamennyinek közös hibája : a megfelelő tapadást biztosító és ugyanakkor az elmozdulásokat megengedő csapágyazások bizonytalanok és rövid élettartamúak.

#### 1. 4. *A planiméterek osztályozása*

A tartópontba mutató helyvektor,  $t$  által súrolt szektorszerű terület,  $S_t$  számításával kapcsolatban a következőképp osztályozzuk a planimétereket :

- a) Körpályán mozgó tartóponttal készülnek a *polárplaniméterek*.
- b) Egyenesen mozog a *lineár-planiméterek* tartópontja. Ezeknél  $S_t$  mindig zérus.
- c) Késtárcsával kényszerített — egyébként szabadon mozgó tartópontú konstrukciók a *vágó-planiméterek*.
- d) Csappal vezetett — általában görbevonalú — mérőkarral rendelkeznek a *radiál-planiméterek*.

Ezen felosztáson belül — a mérendő integrál és a futópont pályagörbéje közötti kapcsolatnak megfelelően — beszélünk *körüljáró*, *funkciós planiméterekről*, *integríméterekről* és *funkciós integríméterekről*.

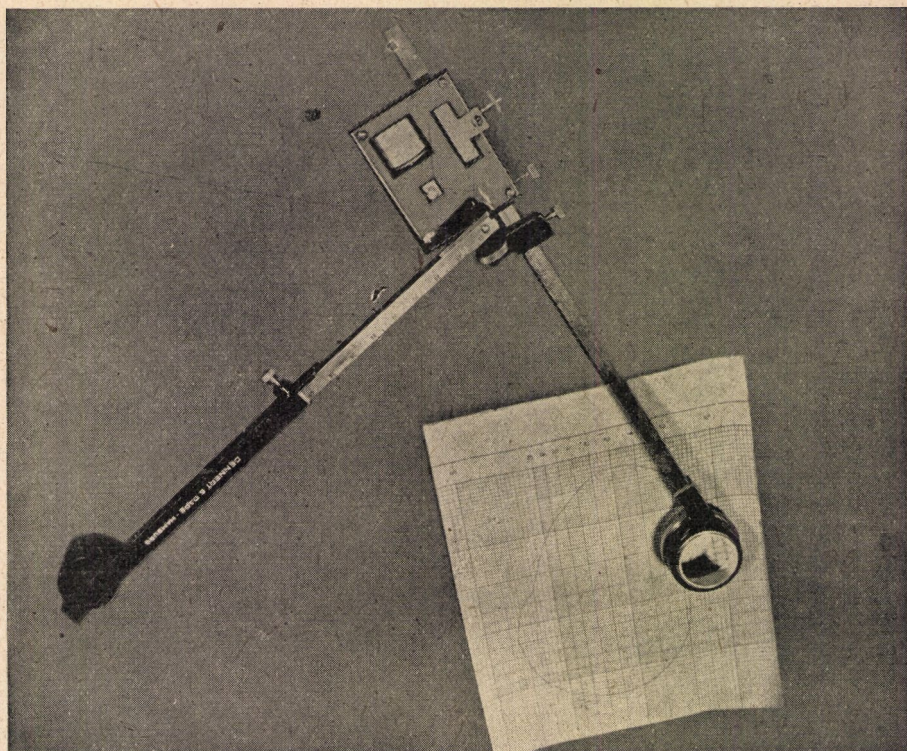
Az egyes típusok elvi kérdéseiről ezen felosztásnak megfelelően számolunk be ; a megismert kapcsolatokat konkrét műszer típusokkal illusztráljuk.

## 2. §. Részletes ismertetés

### 2. 1. *Polárplaniméterek*

Körpályán mozgó tartóponttal csak körüljáró planimétereket készítenek. A gyakorlatban a körüljáró típusok között viszont ezek a legelterjedtebbek, azért kezdtük ezzel a felsorolást. A követő és mérőkar ezeknél a műszereknél — és általában minden körüljáró planiméternél — azonos.

2. 1. 1. *Csuklós polár-planiméter*nél a vezetett (tartó) pont körpályára kényszerítéséről a vezetőkar gondoskodik, amely fix pont körül elfordulhat. A vezetőkar gömbcsuklóban illeszkedik a követőkarhoz. A követő (futó) ponttal a mérendő területet, ill. — ha  $\int_a^b y(x)dx$ -ről van szó — a határoló ordinátákat, az  $y = y(x)$  görbét és az abszcisszatengely megfelelő szakaszát teljesen körüljárjuk.



I. fénykép

A planiméternél használt műszer lehet integrálkerék vagy vágókerék. A vezetőkar fix pontját pólusnak nevezzük; ez súlyos alapon elhelyezett tűtengely, amely körül a kar forog. A pólus lehet a területet határoló zárt görbe belsejében vagy azon kívül. Az alapegyszerlet egyes tagjaira eszerint más-más értéket kapunk — függetlenül attól, hogy az alkalmazott műszer integrálkerék vagy vágókerék. Amennyiben ugyanis a pólus belül van, — teljesen körüljárva a határgörbét —

$$S_t = v^2\pi; \quad \mu_2 - \mu_1 = 2\pi; \quad n_2 = n_1.$$

( $v$  jelenti a vezetőkar hosszát).

Ha viszont a pólus a határgörbén kívül van :

$$S_t = 0; \quad \mu_2 = \mu_1; \quad n_2 = n_1.$$



Négy egyenletet írunk fel ; az első pár esetében a pólus belül, a második párnál a pólus kívül van a határoló görbén. Mindkét párban az előálló egyenlet integrálkerék használata, a második egyenlet pedig vágókerék használata esetén érvényes :

$$S_f = v^2\pi + 2\pi\left(\frac{m^2}{2} - ma\right) + 2\pi\varrho\gamma m = \pi(v^2 + m^2 - 2ma) + 2\pi\varrho\gamma m$$

$$= \pi y^2 + 2\pi\varrho\gamma m.$$

$$S_f = v^2\pi + m^2\pi + m(e_2 - e_1) = \pi(v^2 + m^2) + m(e_2 - e_1).$$

$$S_f = 2\pi\varrho\gamma m.$$

$$S_f = m(e_2 - e_1).$$

Meg kell jegyeznünk a következőket :

Az  $y = \sqrt{v^2 + m^2 - 2ma}$  sugarú kört — amelyet a követőpont akkor ír le, ha a követőkart olyan helyzetben forgatjuk körül, hogy az integrálkerék síkja állandóan tartalmazza a pólust (ekkor u. i.  $d\gamma = 0$ ) — alapkörnek hívjuk ;

A mérési tapasztalatok szerint pontosabb a mérés, ha a pólus kívül van (a területet széttörölve vagy többszörösen összefüggővé alakítva mindig elérhetjük ezt a helyzetet) ;

A gyártott típusokon az integrálkerék sugara, a mérőkar hossza, ill. a vágókerék mércéjének beosztása olyan, hogy a leolvasott érték közvetlenül, négyzetcentiméterekben adja a mérendő terület mértékszámát. Néha azonban a mérőkar hossza változtatható, ilyenkor a beállításnak megfelelő faktort is figyelembe kell vennünk ;

Az alapkör sugarát,  $y$ -t a gyár négy tizedesjegy pontossággal megadja.

2. 1. 2. *A körgyűű ű-planiméter* elvileg nem különbözik a csuklós polárplanimétértől. Felépítése azonban eltér : A vezetett (tartó) pont körbenvezetésére köralakú sínrendszer szolgál. A követő (futó) pont olyan kiképzésű, hogy idomok (hengeres testek) körültapogatására alkalmas. A vonatkozó egyenletek természetesen ugyanazok, mint amelyeket a csuklós-polárplanimétereknél felírtunk ; a pólus azonban most szükségképpen belül van.

2. 1. 3. *Precíziós tárcsás-polárplaniméter*-t használunk nagyobb pontosság elérése céljából. Eltekintve ugyanis a legelemibb szubjektív hibáktól (a követőpont pontatlan irányítása stb.) az eddig ismertetett planimétereknél a leolvasás pontatlansága szabja meg nagyságrendben a hibát (különösen a noniusbeosztással sem rendelkező vágókerék használata, de még integrálkerék használata esetén is). A leolvasás pontosságának fokozásával csökkentjük a hibát precíziós tárcsás planiméter használata esetén. A műszer felépítésének alapja az *A*-val jelzett nagytömegű, rögzített fogaskerék ; ennek *O* középpontja a fix pólus. Ehhez kapcsolódik a *B*-jelű fogaskerék, amely a *C* tárcsával közös tengelyre van felékelve. A *B*-jelű fogaskerék és a *C* tárcsa működés közben a közös tengely körül együttesen elfordulhatnak, tengelyük pedig az *O* pólus körül körpályán elmozdulhat. (L. az 5. ábrát.) A mérőeszköz Gonella-kerék. Az ábrán látható, hogy az integrálkerék elhelyezése következtében a követőkar forgásának nincs gördülést okozó komponense (az integrálkerék síkja a *T* tartópontot tartalmazza, azaz  $a = 0$ ). A planiméter-egyenlet egyes tagjai :





vagy a  $v^2 + m^2 = y^2$  jelölést bevezetve :

$$S_f = \pi \left[ y^2 + \frac{2\pi\varrho\gamma m}{1 - \frac{R+r}{v}} \cdot \frac{r}{R} \right].$$

Ha viszont a pólus kívül van :

$$S_f = \frac{2\pi\varrho\gamma m}{1 - \frac{R+r}{v}} \cdot \frac{r}{R}.$$

A formulákból látható, hogy  $\gamma$  mért értéke és ezzel a számított  $S_f$  pontossága nő az  $\frac{R+r}{v}$  és az  $\frac{r}{R}$  viszony csökkenésével. A leolvasás pontossága végeredményben

$$\frac{R}{r} \left( 1 - \frac{R+r}{v} \right)$$

arányban nőtt a csuklós polár-planiméterhez viszonyítva.

## 2. 2. Lineárlaniméterek

Lineárlaniméterek esetében a vezetett (és a tartó) pont egyenesen mozog ; ezt az egyenest az abszcisszatengellyel párhuzamosan helyezzük el. Egyenesbevezetésre vagy sínrendszer, vagy pedig súlyos, gördülés közben síkjukat tartó kerékpárok szolgálnak ; esetleg azonban a tartópont helyben marad és az  $y = y(x)$  görbét mozgatják úgy, hogy az abszcisszatengely állandóan fedje a tartópontot.

Tekintettel arra, hogy a tartópont egyenesen mozog, teljes körüljárásnál  $S_t = O$  (ha a fix egyenes maga az abszcisszatengely, akkor  $S_t \equiv O$ ); emellett (teljes körüljárásnál)

$$\mu_2 = \mu_1 \quad \text{és} \quad n_2 = n_1.$$

általános egyenletünk tehát az

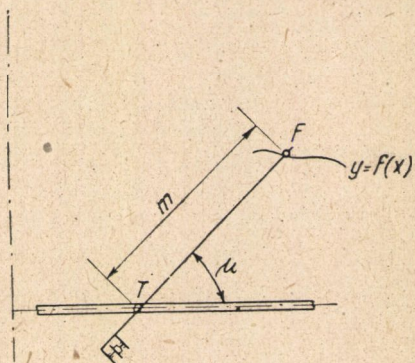
$$S_t = m \int_{(g)} dn$$

egyenletre redukálódik.

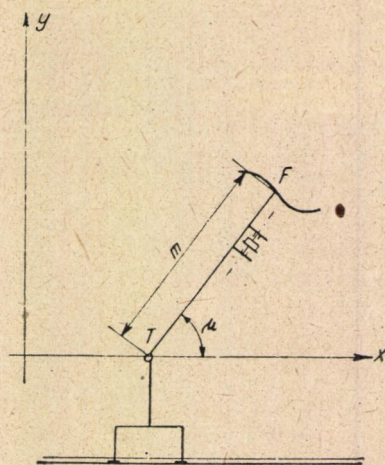
A következőkben külön tárgyaljuk a körüljáró planimétereket, a funkciós planimétereket, az integrimétereket és funkciós integrimétereket.

2.2.1 A körüljáró lineárlanimétereket egy-egy vázlat és néhány szó segítségével ismertetjük, hiszen a működési elv az eddig elmondottak alapján könnyen megérthető.

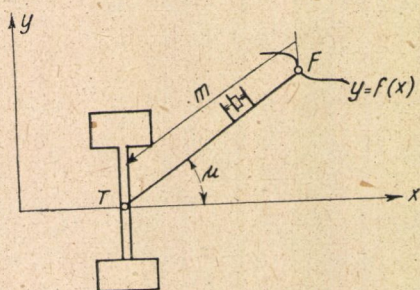
A 6. ábra a csapos sínvezetésű planimétert mutatja be. Ennél lényegesen könnyebben kezelhető a 7. ábrában bemutatott planiméter, mert itt a tartópont vezetésére egy kar szolgál, amely kerékpáron illeszkedik a sínhez ; a tartópont alatt görgő van.



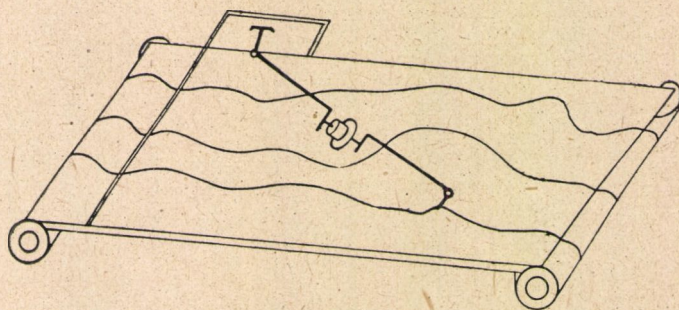
6. ábra



7. ábra



8. ábra



9. ábra



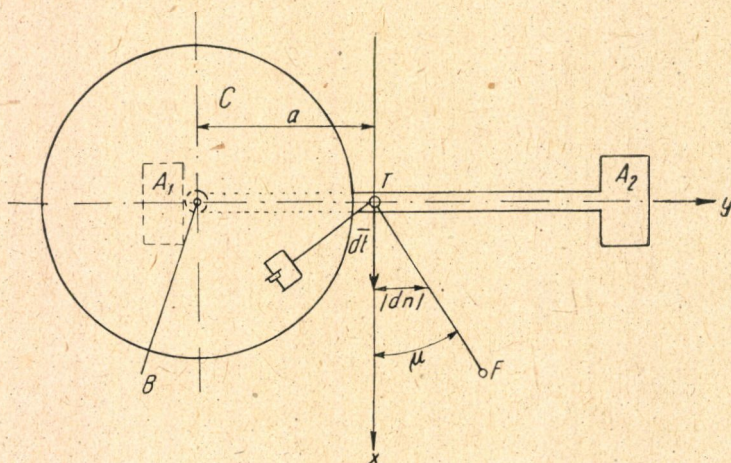
A 8. ábrán ismertetett planiméternél a tartópont egyenesbenvezetésére a súlyos, nagytömegű dobpár szolgál. A 6., 7. és 8. ábrán látható planiméterek csak a tartópont vezetésének módjában különböznek egymástól. A 9. ábrán viszont olyan planimétert mutatunk be, amelynél a tartópont helybenmarad, ehhez képest azonban az  $y = y(x)$  görbét kell elmozgatnunk.

A 10. ábrán dobos vezetésű precíziós tárcsás lineár-planimétert ismertetünk. A mérés pontosságát itt ugyanazon elv alapján növeljük, mint a tárcsás polár-planiméter esetében. Az A—A dobpár itt nemcsak az egyenesbenvezetés feladatát látja el; az  $A_1$  jelű dob ugyanis belső lapján fogazást hord: vagy homlokfogaskerékszerűen, vagy pedig kúposra csiszolva kúpfogaskerékszerűen. Ebben a fogazásba kapcsolódik a  $B$  jelű fogaskerék, amely a  $C$  tárcsával közös tengelyre van felékelve. Ezt a tengelyt — sem pedig a tengely csapágyazását a csapágyak tartószerkezetével — az ábrába nem rajzoltuk be.

A  $T$  tartópont  $dt$  elemi elmozdulásához az  $r$  sugarú,  $B$  jelzésű fogaskerék és a vele együtt felékelte  $C$  tárcsa

$$d\sigma = \mathbf{i} \cdot dt \cdot \frac{1}{r}.$$

nagyságú szögelfordulása tartozik. (A következőkben az  $x$ -tengely pozitív irányába mutató egységvektort mindig  $\mathbf{i}$ -vel, hasonlóképp az  $y$ -tengely irányába mutató egységvektort  $\mathbf{j}$ -vel jelöljük.)



10. ábra

Az integrálkerék síkja  $a \sin \mu$  távolságra van a tárcsa középpontjától. Az integrálkerék elemi szögelfordulását tehát a

$$2\pi Q d\gamma = \frac{\mathbf{i} \cdot dt}{r} a \sin \mu$$

egyenlettel jellemezhetjük. Mivel pedig

$$\mathbf{i} dt \sin \mu = dn$$

azért :

$$d\gamma = \frac{1}{2\pi\varrho} \frac{a}{r} dn.$$

Alapegyenletünk tehát az

$$S_f = m \frac{r}{a} 2\pi\varrho\gamma$$

alakot ölti. A leolvasás pontossága  $\frac{a}{r}$ -szeresre nőtt az egyszerű körüljáró-típusú planiméterekhez viszonyítva.

### 2. 2. 2. Funkciós lineár-planiméterek

Feladatuk, hogy a grafikusán adott  $y = y(x)$  egyenletű görbét (továbbá a két határolóordinátát és az abszcisszatengely megfelelő szakaszát) követve a követőponttal, az  $\int_a^b f[y(x)] dx$ , az  $\int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) dx$  ill. legáltalánosabban az  $\int_a^b f[x, y(x)] dx$  integrál értékét meg tudjuk határozni.

Ezeknél a planimétereknél már elvi jelentőségű különbség van a követő és a mérőkar között. Működési elvüket vázolva — eredeti megállapodásainknak megfelelően —  $m$ -el a mérő,  $l$ -el a követőkar hosszát jelöljük,  $\mu$ -vel, ill.  $\kappa$ -val pedig a megfelelő irányszögeket; a többi jelölést is megtartjuk. Továbbra is úgy választjuk meg a tartó és vezetett pont pályaegyenését — hacsak külön ki nem kötünk ettől eltérő feltételt — hogy az az abszcisszatengelybe esik.

A működés elvét elsősorban az  $\int_a^b f[y(x)] dx$  integrál számítására alkalmas planiméterekre ismertetjük. Ennek alapján könnyen megértjük az ennél általánosabb  $\int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) dx$  ill.  $\int_a^b f[x, y(x)] dx$  integrálok számítására alkalmas készülékek működését is.

Az említett funkciós planimétereknél — megfelelő mechanikai kényszerek segítségével — gondoskodunk arról, hogy a futópont  $Y$ -al jelölt és a követőpont  $y$ -al jelölt ordinátája között az  $Y = f[y]$  kapcsolat álljon fenn. Mivel pedig  $Y = m \cdot \sin \mu$  és  $y = l \cdot \sin \kappa$ , azért az  $Y = f[y]$  egyenletet

$$m \sin \mu = f[l \cdot \sin \kappa]$$

alakban írhatjuk. Utóbbi egyenlet a követőkar minden helyzetéhez a mérőkar meghatározott irányát rendeli ( $l$  t. i. állandó); az említett mechanikai eszközökkel éppen arról gondoskodunk, hogy a mérőkar irányszöge a fenti egyenletnek megfelelő  $\mu$  szög legyen.



Megjegyzendő, hogy a futó- és a követőpont  $X$ , ill.  $x$  abszcisszái között semmiféle — levezetésünk szempontjából hasznosítható — kapcsolat nincs.\*

A funkciós planiméterek legtöbbjénél gondoskodunk a tartó és a vezetett pont együttfutásáról — mechanikailag összekapcsolva őket. Ennek következtében fennáll a

$$t = v + ci$$

( $c$  a két pont állandó távolságát jelöli), továbbá a

$$dt \equiv dv$$

egyenlőség.

Járjuk körül a követőponttal az  $y(x)$  görbe, a szélső ordináták és az abszcisszatengely megfelelő szakasza által kijelölt zárt görbét. A körülutazást befejezve a követőkar és a mérőkar is eredeti helyzetébe kerül vissza, tehát  $S_t = 0$ ;  $n_2 = n_1$ ;  $\mu_2 = \mu_1$  és így

$$S_f = m \int_{(g)} dn.$$

Igazolni fogjuk, hogy

$$S_f = m \oint_{(g)} dn = \int_a^b f[y(x)] dx - (b-a) F,$$

ahol

$$F = f[0].$$

E célból térjünk egy pillanatra vissza a körüljáró-lineárpplaniméterek elméletéhez. Láttuk ott, hogy az

$$S_f = \int_a^b y(x) dx (= l \oint dn = l \oint \sin \kappa \cdot i \cdot dv)$$

egyenlőség fennáll, annak ellenére, hogy

$$y(x) dx \neq l dn (= l \sin \kappa \cdot i \cdot dv). \quad **$$

Ezt megmagyarázandó, határozzuk meg a követőpont elemi elmozdulásának vízszintes (abszcisszatengellyel párhuzamos) vetülete és a vezetett pont elemi elmozdulása közti kapcsolatot! (L. a 11. ábrát.) A másodrendű kicsinyek elhanyagolásával adódik, hogy

$$dx = dv \cdot i + l \cos(\kappa + d\kappa) - l \cos \kappa \approx$$

\* Képet alkothatunk magunknak a futópont pályájáról, ha az

$$Y = Y(x) = f[y(x)]$$

görbét gumihártyára felrajzolva képzeljük; nyújtsuk meg a hártyát az abszcisszatengely irányában — különböző helyeken más-más arányban. Ezen transzformációt elvégezve kaphatjuk meg a futópont pályáját.

\*\*) Az eredeti levezetésekben mérőkarról volt szó, tehát  $l$  helyett  $m$ ,  $\kappa$  helyett  $\mu$ , stb. szerepelt; ott szintén használhattunk volna fenti jelölést, mert körüljáró-planimétereknél a követő és mérőkar azonosak. Itt lényeges fenti jelölésünk, hiszen az eredményeket funkciós planiméterrel akarjuk alkalmazni.

$$\begin{aligned} &\approx d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} + l [\cos \kappa + (-\sin \kappa) d\kappa] - l \cos \kappa = \\ &= d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} - l \sin \kappa d\kappa. \end{aligned}$$

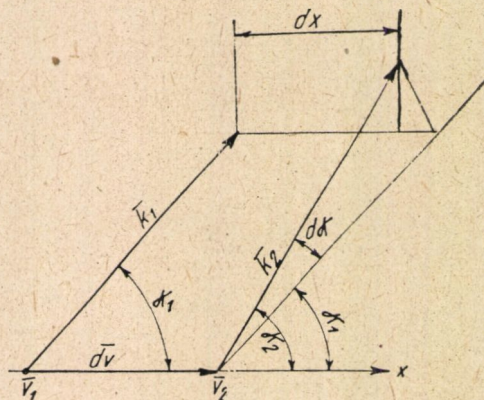
Ennek alapján :

$$y(x) \cdot dx = l \sin \kappa dx = l \sin \kappa \cdot d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} - l^2 \sin^2 \kappa d\kappa,$$

azaz valóban:

$$l dn = l \sin \kappa \cdot d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} \neq y dx.$$

Az integrálok egyenlősége viszont könnyen adódik, mert  $\oint l^2 \sin^2 \kappa d\kappa = 0$ .



11. ábra

Hasonló eredményre jutunk akkor is, ha az  $y(x)$  függvény helyett valamely  $f[y(x)]$  függvénnyel kapcsolatban végezzük el az előző vizsgálatot. Tegyük fel eközben, hogy létezik egy bizonyos  $m$  hosszúságú és  $\mu$  irányszögű mérőkar ( $m \sin \mu = f[y]$ ); ekkor tehát :

$$d\mathbf{t} \cdot \mathbf{i} \cdot \sin \mu = d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} \cdot \sin \mu = dn$$

(ha a  $d\mathbf{t} = d\mathbf{v}$  feltétel teljesül!);

emellett legyen  $f[0] = F$  és teljesüljön az a feltétel, hogy az  $y = y(x)$  görbét, a két határoló-ordinátát és az abszcisszatengely megfelelő darabját körüljárva a követőponttal a mérő és követőkar is eredeti helyzetébe kerül vissza. Így

$$f[y] dx = f[y] (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} - l \sin \kappa d\kappa) = m \cdot \sin \mu (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} - l \sin \kappa d\kappa).$$

Tehát :

$$(m dn = m \sin \mu d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} =) f[y(x)] d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} \neq f[y(x)] dx$$

azaz

$$f[y(x)] dx \neq m dn,$$

$$\begin{aligned}
\text{viszont} \quad & \int_a^b f[y(x)] dx = \int_a^b f[y(x)] dx + \int_b^a f[0] dx - (a-b) F = \\
& = \oint f[y] dx + (b-a) F = \\
& = \oint f[y] dv \cdot i - \oint f[y] l \sin \kappa d\kappa + (b-a) F = \\
& = \oint m \cdot \sin \mu dv \cdot i + (b-a) F - \oint m \cdot l \sin \mu \sin \kappa d\kappa = \\
& = \oint m \cdot dn + (b-a) F = \\
& = S_f + (b-a) F,
\end{aligned}$$

mert  $m \cdot l \oint \sin \mu \cdot \sin \kappa d\kappa = 0$ . \*

Eddigi kikötéseink értelmében funkciós planimétereknél a  $dt = dv$  és  $m \sin \mu = f[y] = f[l \sin \kappa]$  egyenlőségek fennállanak és a megfelelő zárt görbét körüljárva, a mérő és követőkar is eredeti helyzetébe kerül vissza.

Így tehát, előbbi levezetésünk alapján :

$$S_f = m \cdot 2\pi g = \int_a^b f[y(x)] dx - (b-a) F.$$

Épp ezt kellett azonban bizonyítanunk.

Az általánosabb  $\int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) dx$  ill.  $\int_a^b f[x, y(x)] dx$  integrálok számítására szolgáló funkciós planimétereknél — az eddig elmondottaknak megfelelően — az

$$Y = f[y] \cdot g(x) \quad \text{ill.} \quad Y = f[x, y(x)]$$

egyenletnek megfelelő kapcsolatot hozunk létre a követő és a futó pont ordinátája között. Ennek megfelelően kapjuk, hogy a mérőkar irányszöge az

$$m \sin \mu = f[y] \cdot g(x) \quad \text{ill.} \quad m \sin \mu = f[x, y(x)]$$

egyenletnek kell, hogy eleget tegyen. Emellett — itt is — gondoskodunk arról, hogy a tartó és a vezetett pont együtt fussanak, azaz a  $dt = dv$  egyenlőség fennálljon. Ezek alapján pedig — a fenti levezetés gondolatmenetét szóról-szóra megismételve — ismét könnyen igazolhatjuk, hogy

$$S_f = \int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) dx - F \int_a^b g(x) dx$$

ill.

$$S_f = \int_a^b f[x, y(x)] dx - \int_a^b f[x, 0] dx.$$

\* Ez csak akkor igaz, ha a követőkar planimetrálás közben nem fordul teljesen körbe, azaz  $\kappa_1 = \kappa_0$  és nem következik be, hogy pl.  $\kappa_1 = \kappa_0 + 2\pi$ . Ezt azonban az  $y(x)$  görbe pozitív és negatív ordinátájú szakaszainak külön-külön történő planimetrálásával könnyen elérjük.

Az eddig elmondottakat kissé még ki kell egészítenünk. Lehetséges ugyanis, hogy az  $f[y]$  függvény előállítható ilyen alakban :

$$f[y] = f[l \cdot \sin \kappa] = A_1(l) \sin [a_1 \kappa + \alpha_1] + \dots + A_p(l) \sin [a_p \kappa + \alpha_p].$$

Akkor azonban

$$\int f[y] dx = \oint f[l \sin \kappa] i dv = \oint A_1(l) \sin [a_1 \kappa + \alpha_1] i dv + \dots \\ \dots + \oint A_p(l) \sin [a_p \kappa + \alpha_p] \cdot i dv.$$

Lehetőség van tehát olyan műszer alkalmazására, amely több mérőkart (és természetesen mindegyiken egy-egy mérőműszert) tartalmaz, amelyeket a következő adatokkal jellemezhetünk :

$$m_1 = A_1(l); \quad m_2 = A_2(l); \dots; \quad m_p = A_p(l)$$

$$\mu_1 = a_1 \kappa + \alpha_1; \quad \mu_2 = a_2 \kappa + \alpha_2; \dots; \quad \mu_p = a_p \kappa + \alpha_p.$$

Ilyen funkciós planiméternél az egyes műszerek által mért értékeket az

$$\int f[y(x)] dx = A_1(l) \oint \sin [a_1 \kappa + \alpha_1] i dv + \dots + A_p(l) \oint \sin [a_p \kappa + \alpha_p] i dv$$

egyenletnek megfelelően összesítve, kapjuk a keresett integrál értékét. Ennek az átalakításnak az az előnye, hogy az  $m \sin \mu = f[l \sin \kappa]$  egyenlet által meghatározott  $\mu = \mu(\kappa)$  függvényt mechanikai eszközökkel nagyon egyszerűen meg tudjuk valósítani, ha  $\mu$  a  $\kappa$ -nak többszöröse, ill. ha  $\mu = a\kappa + \alpha$ .

Hasonló átalakításra az  $\int_a^b f[y(x)] g(x) \cdot dx$  meghatározásával kapcsolatban is lehetőségünk nyílik, ahogy azt a 2.2.2.3. pontban látni fogjuk.

2.2.2.1. Funkciós planiméterek  $\int dx, y^n$  alakú integrálok mérésére (momentum-planiméterek).

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor  $n$  pozitív egész szám. Ekkor  $f[y] = y^n = l^n \cdot \sin^n \kappa$ . Ez a függvény pedig, paritásának megfelelően, vagy  $\sum_{k=n}^n c_k \sin k\kappa$  vagy pedig  $\sum_k d_k \cos k\kappa$  alakú sorba fejthető. Több mérőkart használva, az egyes karokat a következő adatok jellemzik :

$$m_1 = l^n \cdot c_1; \dots; m_n = l^n c_n,$$

és

$$\mu_1 = (2 - \xi) \kappa; \quad \mu_2 = (4 - \xi) \kappa; \dots; \quad \mu_n = (n - \xi) \kappa,$$

vagy pedig

$$\mu_1 = \frac{\pi}{2} - (2 - \xi) \kappa; \quad \mu_2 = \frac{\pi}{2} - (4 - \xi) \kappa; \dots; \quad \mu_n = \frac{\pi}{2} - (n - \xi) \kappa.$$

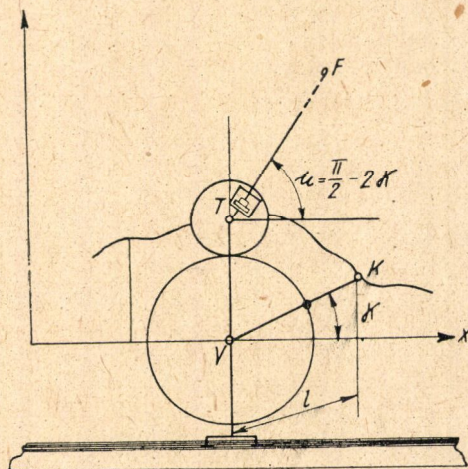
ahol  $\xi$  az  $n$  paritásának megfelelően 0 vagy 1.

A  $\kappa$  szög egészszámu sokszorosait mechanikai eszközökkel igen egyszerűen elő tudjuk állítani; pl. megfelelő fogaskerékátvittelekkel, vagy pedig a kerületi és középponti szögek közötti egyszerű összefüggést felhasználva.

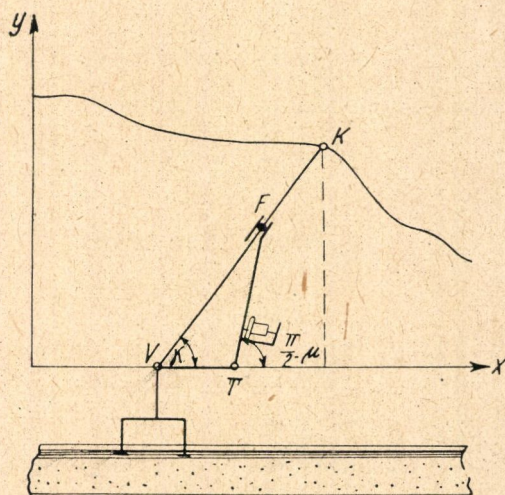


A viszonyok annyira egyszerűek, hogy a közölt vázlatokhoz részletes magyarázatot nem kell fűznünk.

A 12. és 13. ábrában pl. az  $\int_a^b y^2 dx$  integrál számítására alkalmas két funkciós planimétert vázoltunk, azaz  $n = 2$ . Így :



12. ábra

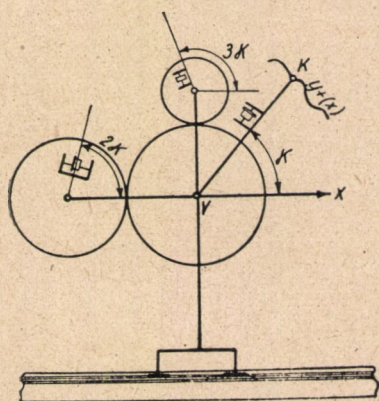


13. ábra

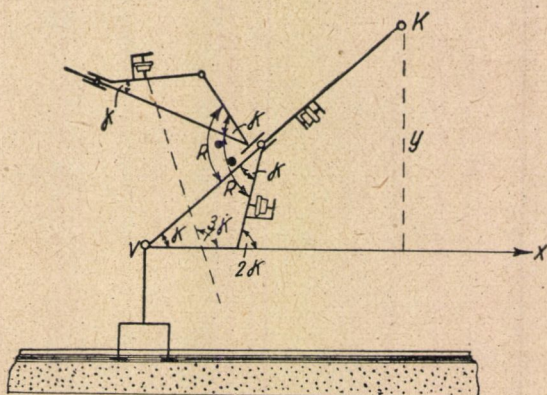


$$\int_a^b l^2 \sin^2 \kappa dx = \oint \frac{l^2(1 - \cos 2\kappa)}{2} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{t} = \oint \frac{l^2}{2} \mathbf{i} d\mathbf{v} - \frac{l^2}{2} \oint \cos 2\kappa \mathbf{i} d\mathbf{v}.$$

Tekintettel pedig arra, hogy  $\oint \frac{l^2}{2} \mathbf{i} d\mathbf{v} = 0$  és  $f[0] = F = 0$ , nyilván csak egy mérőkarra van szükségünk, amelynek irányszöge a követőkar-szög pót-szögének kétszerese. A szögekészszeresést a 12. ábrán azzal érjük el, hogy a fog-áttétel 2 : 1, a 13. ábrán pedig azzal, hogy  $\overline{VT} = \overline{TF}$ , az  $F$  pont tehát olyan köríven mozog, melynek középpontja  $T$  és amely  $V$ -t is tartalmazza; ebből pedig már következik, hogy  $TVF \sphericalangle = \frac{1}{2} xTF \sphericalangle$ . Ami pedig  $\kappa$  pótösszegének előállítását illeti, a fogaskerékhajtás automatikusan létesíti ezt, a 13. ábrán bemutatott készüléknél viszont az integrálkerék tengelye — a szokásostól eltérően nem párhuzamos, hanem — merőleges a mérőkarra.



14. ábra



15. ábra

A 14. és 15. ábrán kombinált planimétereket mutatunk be, amelyek alkalmasak

$\int_a^b y(x) dx$ ;  $\int_a^b y^2(x) dx$  és  $\int_a^b y^3(x) dx$  egyszerre történő mérésére.  $n = 1$  esetében

pl. egyszerűen a követőkarra szerelt planimétert kell leolvasni,  $n = 2$  esetében

$$\int_a^b y^2 dx = -\frac{l^2}{2} \oint \cos 2\kappa \mathbf{i} d\mathbf{v}, \quad n = 3 \text{ esetében pedig}$$

$$\int_a^b y^3(x) dx = \frac{3l^3}{4} \oint \sin \kappa \mathbf{i} d\mathbf{v} - \frac{l^3}{4} \oint \sin 3\kappa \mathbf{i} d\mathbf{v}.$$

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor  $n = g + \frac{1}{2}$ ;  $g$  nemnegatív egész szám.

A vezetett pont pályájául ekkor az abszcisszatengely helyett az  $y = l$  egyenest választjuk. Jelölje  $\kappa^*$ , ill.  $\mu^*$  a követő, ill. mérőkar irányszögének pót-szögét ( $\kappa^* = \frac{\pi}{2} - \kappa$ ;  $\mu^* = \frac{\pi}{2} - \mu$ ). Ezeknél tehát  $m \cos \mu^* = f[l - l \cos \kappa^*]$  alakban írhatjuk fel az  $Y = f[y]$  kapcsolatot.

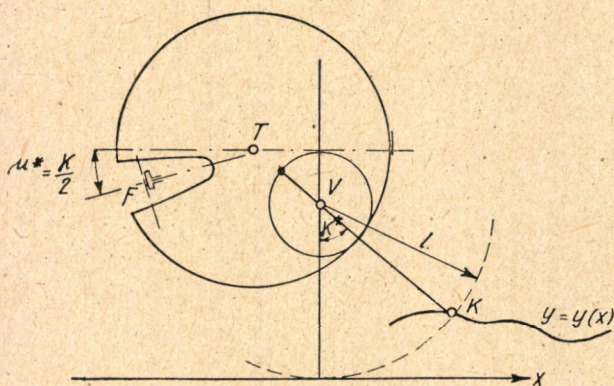


Tehát :

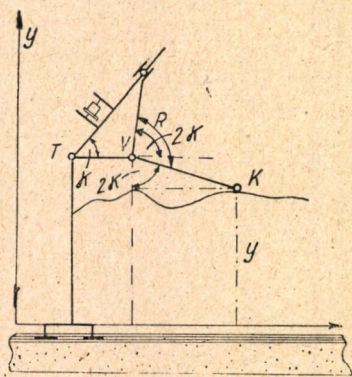
$$m \cdot \cos \mu^* = [l - l \cos \kappa^*]^{g+1/2} = \left[ 2l \sin^2 \frac{\kappa^*}{2} \right]^{g+1/2} =$$

$$= \left[ \sqrt{2l} \sin \frac{\kappa^*}{2} \right]^{2g+1}.$$

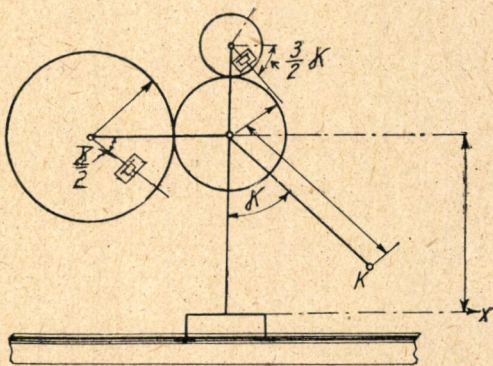
Eszerint több mérőkart használva, lényegében az előbb tárgyalt planiméterekhez hasonló gondolatmenettel és konstrukciók segítségével építhetjük fel a funkciós planimétereket, csak hogy jelen esetben  $\frac{\kappa^*}{2}$ -nek többszöröseit kell előállítanunk. Az alábbi vázlatok részletesebb magyarázat nélkül is érthetőek :



16. ábra



17. ábra

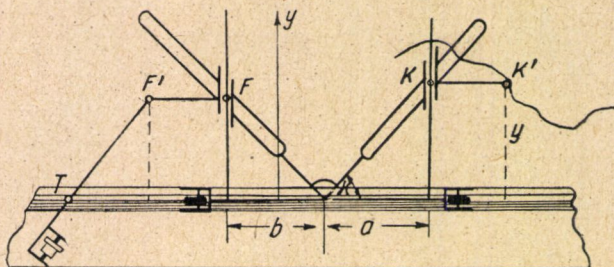


18. ábra

Az  $\int_a^b \frac{1}{y(x)} dx$  integrál számítására olyan eszköz áll rendelkezésünkre, amelynek megértéséhez nincs szükségünk a funkciós planiméterekkel kapcsos-



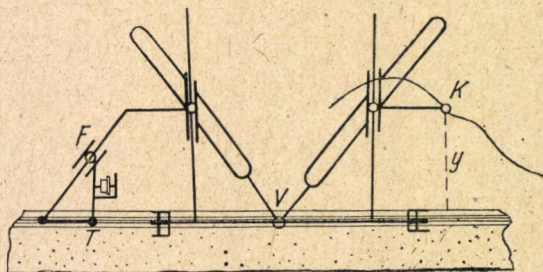
latban elmondottakra. Mechanikai úton el tudjuk érni ugyanis, hogy mialatt a követőpont az  $y = y(x)$  görbén halad végig, a futópont az  $Y(X) = \frac{d}{y(x)}$  görbevonalú pályát írja le (ahol  $x = X + c$ ;  $c$  és  $d$  állandók). A 19. ábrán bemutatott egyszerű szerkezetet használjuk; az ábrából azonnal kiolvashatjuk, hogy  $x = X + a + b$ , azaz  $c = a + b$ , továbbá  $\frac{y}{b} = \frac{a}{Y}$ , azaz  $d = a \cdot b$



19. ábra

(az is látható egyébként, hogy  $dt \neq dv$ . A fent elmondottakból következik, hogy erre most nincs is szükség).

$n = -g$  ill.  $n = -g + \frac{1}{2}$  esetén ( $g$  pozitív egész) az eddig ismertetett szerkezetek megfelelő kombinációjával azonnal célhoz jutunk. Az elv ismét annyira kézenfekvő, hogy csak ábrát mutatunk be.



20. ábra

Tetszésszerinti kitevő esetében ugyanazokat a konstrukciókat használjuk, amit az általánosabb  $\int_a^b f[y] dx$  alakú integrálok megállapításánál, így ezekre itt most nem térünk ki.

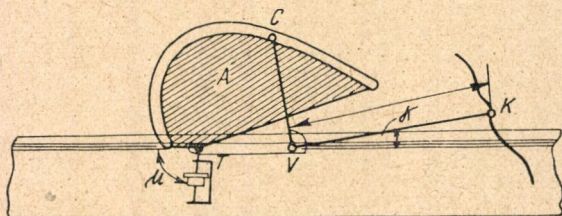
2.2.2.2.

Az  $\int_a^b f[y(x)] dx$  alakú integrálok mérésére alkalmas planiméterek-



kel kapcsolatban csak az  $Y = f[y]$  egyenletből következő összefüggések mechanikai megvalósításának módját kell megbeszelnünk; az alapelveket ugyanis már az előbbiekből megismertük. Két konstrukciót fogunk a következőkben ismertetni.

A 21. ábrán bemutatott planiméter mérőkarja csak részben kiképzett, a futópontot a mérőkar meghosszabbításán — a tartóponttól  $m$  távolságra — kell elképzelnünk. A  $V$  és  $T$  csapokat (előbbi a vezetett, utóbbi a tartópontot jelenti) egy kis lemez kapcsolja mereven össze, amelyet az  $x$ -tengelyt fedő sínen vezetünk. A  $T$  csap körül fordulhat el a  $TF$  mérőkar és az ezzel mereven összekötött  $A$  vályú. A  $V$  csapon a követőkar forog, amelyhez merőlegesen az  $u$  hosszúságú  $VC$  kar van rögzítve. Utóbbi a  $C$  pontban egy csapot hord, amely az  $A$  vályúban csúszik.



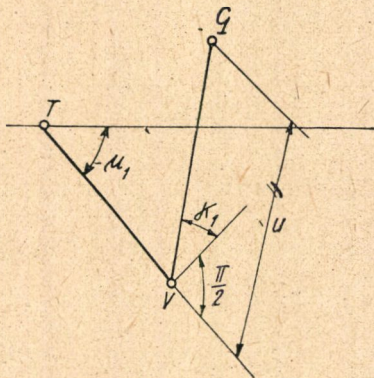
21. ábra

A vályúgörbe paraméteres egyenletrendszerét a

$$Y = f[y]$$

egyenlet alapján számítani tudjuk. Igen egyszerű azonban a görbe alábbi szerkesztése:

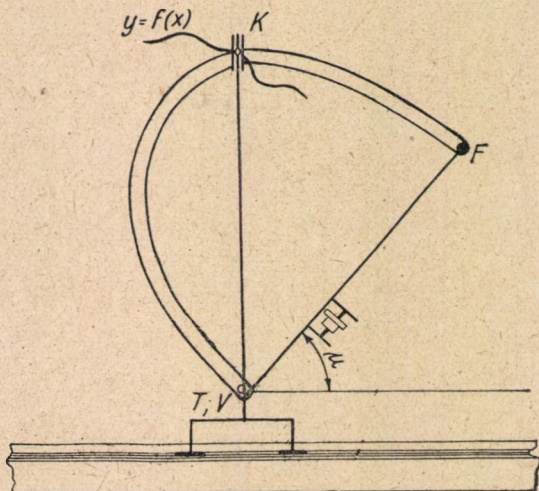
Az  $m \cdot \sin \mu = f[l \sin \kappa]$  egyenletből meghatározzuk a  $\mu = \mu(\kappa)$  függvényt. Választva egy  $\kappa = \kappa_1$  értéket, számítjuk a  $\mu_1 = \mu(\kappa_1)$ -et. A  $T$  pontból egy fix irányhoz (a mérőkar irányához) —  $\mu_1$  szög alatt felmérjük a



22. ábra



A másik, Lorenz-féle konstrukció a 23. ábrán látható. A követő és egyben tartópontot a 23. ábrán  $T$ -vel jelöltük. A  $TK$  követőkar az  $x$  tengelyre merőleges; az abszcisszatengely irányában önmagával párhuzamos helyzetben maradva mozdulhat el. A  $K$  követőpontban egy csappal felszerelt hüvely csúsztható el a követőkar mentén. A csap az  $A$  vályúban csúszik. A vályúhoz az  $F$  pontban mereven van rögzítve az  $FT$  mérőkar amely a  $T$  pont körül



fordulhat el. Figyelemreméltó, hogy a  $T$  tartópont ugyanarra az ordinátavonalra esik, mint a  $K$  követőpont. Ez annyit jelent, hogy ennél a konstrukciónál nemcsak a  $d\mathbf{t} = d\mathbf{v}$ , hanem a  $d\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = d\mathbf{x}$  egyenlet is fennáll. Erre egy későbbi pontban (2.2.3.) támaszkodni fogunk. Megjegyzendő még, hogy itt a követőkar nem forog  $\left(\kappa \approx \frac{\pi}{2}\right)$ , de nem is állandó hosszúságú.

$$m \cdot \sin \mu = f[y]$$
$$\overline{KT} = y = R \text{ és } \mu = \frac{\pi}{2} - \Phi.$$



Ennek alapján :

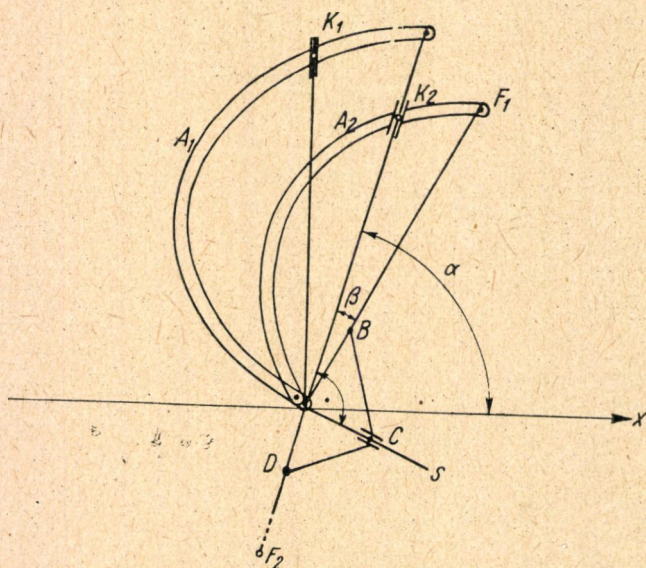
$$m \cdot \cos \Phi = f[R]$$

a vályúgörbe egyenlete.

2.2.2.3. Áttérünk olyan, még általánosabb funkciós planiméterek konstrukciós elképzelésének ismertetésére, amelyek az irodalomban még nem szerepeltek.

Az  $\int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) \cdot dx$  alakú integrálok számítására a Lorenz-planiméter megfelelő átalakításával alkalmas műszert konstruálhatunk.

A 24. ábrán láthatjuk a készülék vázlatát. Az eredeti (23.) ábra  $K$ -val jelölt pontja (most  $K_1$  jelű) az adott  $y = y(x)$  görbe követésére szolgál. A 23. ábra  $TF$  mérőkarja a 24. ábrán követőkar jellegű,  $K_2$ -jelű (követő) pontjának távolsága  $T$ -től arányos  $T$  abszcisszájával :  $x = X$ -szel. A  $K_2$ -jelű pont egy a  $K_2T$  karon csúszó hüvely csapját jelzi, amely az  $A_2$ -jelű második vályúban csúszik.  $A_2$ -höz kapcsolódik most — merev kapcsolattal — az  $F_1$  (futó) pontban az  $F_1T$  mérőkar, amely a  $T$  pontban csapágyazva van. A  $K_2T$  kar egy merőleges  $ST$ -jelű toldatot hord, közös forgáspontjuk a  $T$  tartópont. Ezen toldaton csúszik a  $C$  hüvely, amelyhez a  $BC$ - és a  $CD$ -jelű kar — mindkét kar  $C$ -ben és



24. ábra

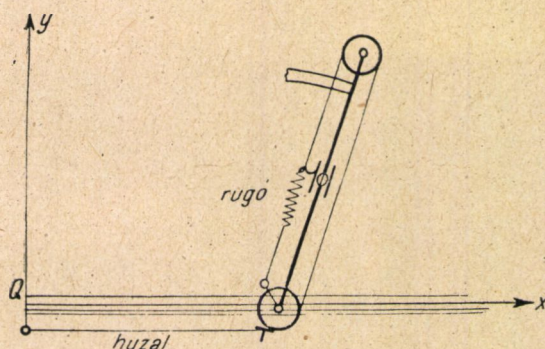
$B$ -s, ill.  $D$ -ben csuklósan — csatlakozik. A  $TDF_2$ -jelű kar (második mérőkar) ugyanakkora szöget zár be a  $TC$ -karral, mint utóbbi a  $TB$ -vel. Ezt a

$$\overline{TB} = \overline{TD} \quad \text{és} \quad \overline{BC} = \overline{CD}$$

választás biztosítja.



A  $K_2$ -jelű csap vezérlése pl. a rögzített 0-ponthoz erősített, dobokon átvett huzal, vagy pedig kettős fogasléc-fogaskerék rendszer segítségével történhet, pl. a 25. ábrán látható módon.



25. ábra

A 2.2.2. pont bevezetésében elmondottak szerint a

$$Y = f[y] \cdot g(x) \quad \text{azaz} \quad m \sin \mu = f[y] \cdot g(x)$$

egyenlőséget kell biztosítanunk a planiméter működése közben. Jelöljük a  $TK_1$  és  $TK_2$  karok egymással bezárt szögét  $\beta$ -val, a  $TK_2$ -kar irányszögét pedig  $\alpha$ -val. Mivel  $\beta$  értékét az  $A_2$ -jelű vályú közvetítésével a  $K_2$  pont,  $\alpha$  értékét pedig az  $A_1$ -jelű vályú közvetítésével a  $K_1$  pont  $T$ -től mért távolsága határozza meg,  $\beta$  csak  $x$  értékétől,  $\alpha$  pedig csak  $y$  értékétől függ:

$$\alpha = \alpha(y); \quad \beta = \beta(x).$$

A  $TF_1$  mérőkar irányszöge:  $\mu_1 = \alpha - \beta$ .

A  $TF_2$  mérőkar irányszöge:  $\mu_2 = \pi + (\alpha + \beta)$ .

Az  $A_1$  és  $A_2$  vályúkat képezzük ki úgy, hogy az

$$\frac{f[y] \cdot g(x)}{m} = \sin \mu_1 - \sin \mu_2$$

egyenlőség fennálljon. Így:

$$\begin{aligned} \int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) \cdot dx &= m \oint \sin \mu_1 dt \cdot i - \\ &- m \oint \sin \mu_2 dt \cdot i - F \int_a^b g(x) dx = \\ &= m \oint dn_1 - m \oint dn_2 - F \int_a^b g(x) dx, \end{aligned}$$



mert a  $TF_1$  mérőkar irányszöge épp  $\mu_1$ , a  $TF_2$ -é pedig  $\mu_2$ . Ha tehát — a körüljárást befejezve — a  $TF_1$  karon elhelyezett műszeren a  $\gamma_1$ , a  $TF_2$  karon elhelyezett műszeren pedig a  $\gamma_2$  értéket olvassuk le, akkor

$$\begin{aligned} F \int_a^b g(x) dx + \int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) \cdot dx &= m \oint dn_1 - m \oint dn_2 = \\ &= m [2\pi\varrho\gamma_1 - 2\pi\varrho\gamma_2] = 2\pi m [\gamma_1 - \gamma_2] \end{aligned}$$

Az  $A_1$  és  $A_2$  vályúgörbék egyenletének meghatározása céljából a

$$Y = m \sin \mu = f[y] \cdot g(x)$$

egyenletből kiindulva :

$$\begin{aligned} \frac{f[y] \cdot g(x)}{m} &= (\sin \mu =) \sin \mu_1 - \sin \mu_2 = \sin (\alpha - \beta) - \sin [\pi + (\alpha + \beta)] = \\ &= \sin (\alpha - \beta) - \sin (\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta, \end{aligned}$$

azaz

$$\frac{f[y] \cdot g(x)}{m} = 2 \sin \alpha(y) \cdot \cos \beta(x).$$

Az  $A_1$ - és  $A_2$ -vályú polárkoordinátás egyenlete tehát :

$$f[R] = a \cdot \cos \Phi ; g(R) = b \cdot \sin \Phi ,$$

ahol  $a, b$  tetszőleges olyan számok, amelyekre  $a \cdot b = 2m$ .

Az  $\int_a^b f[x, y(x)] dx$  alakú integrálok planimétrálására alkalmas funkciós planiméterek gondolatát csak felvetjük, mert a konstrukció igen nagy nehézségekbe ütközik. Ezek onnan származnak, hogy a mérőkar irányszögét már nem tudjuk síkbeli kényszerek segítségével megszabni, kénytelenek vagyunk térbeli kényszert alkalmazni. A 2.2.2. pont bevezetésében elmondottak alapján ugyanis a futópont ordinátája a

$$Y = f[x, y] ; \text{ azaz az } m \sin \mu = f[x, y]$$

egyenletnek kell, hogy eleget tegyen. Ha az  $f[x, y]$  függvény két egyváltozós függvény szorzatára bontható, az előbb ismertetett módosított Lorenz-planiméter alkalmas a planimétrálásra, ha viszont az  $f[x, y]$  ennél általánosabb kétváltozós függvény, az  $m \sin \mu = f[x, y]$  összefüggést általában nyilván csak 3 dimenzióban mozgó mechanikai elemekkel tudjuk megvalósítani. Ilyen szerkezetek tervezése elvileg nem jelent különösebb nehézséget, a gyakorlati megoldás viszont nyilván sok nehézséggel jár.

### 2.2.3. Lineár integriméterek és lineár funkciós integriméterek.

Céljuk, hogy az  $\int_a^x y(x) dx$  ill. általánosabban az  $\int_a^x f[x, y(x)] dx$  integrál

értékét az  $y = y(x)$  görbe követésekor bármely  $x = x$  felső határnál közvet-

lenül — tehát a határoló ordináták és abszcisszatengely-szakasz körülfutása nélkül — leolvashassuk. Ezt pedig igen egyszerűen elérhetjük, egyes eddig tárgyalt planiméterek kis módosításával. A 2.2.2. pont bevezetésében láttuk, hogy a határolóordinátákat és az abszcisszatengely megfelelő darabját azért kell általában befutnunk lineárlaniméterek használata esetén a követőponttal, mert a  $dx = i dt$ , ill.  $dx = i dv$  egyenlőséget nem biztosítottuk. Ennek biztosítása után azonban elég a követőponttal az  $y = y(x)$  görbe  $x = a$  és  $x = x$  abszcisszájú pontjai közötti szakaszát befutnunk. A  $dx = i dt$  egyenlőséget pedig legegyszerűbben az biztosítja, hogy a követő és a tartó pont abszcisszája egymással megegyezik.

Integrálkeréket használva mérőeszközként biztosítanunk kell azt is, hogy a kerék síkja tartalmazza a vezetett pontot; egyébként ugyanis a mérőkar irányszögét is minden leolvasásnál figyelemmel kellene kísérnünk.

$$(Ugyanis \quad 2\pi \rho \gamma = \int_{(g)} dn + a \cdot [\mu_2 - \mu_1].)$$

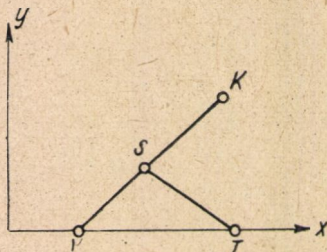
Integrimétereknél ezért az integrálkerék megfelelő elhelyezésével az  $a = 0$  feltételt is biztosítjuk. (L. 1.3.1.)

Első (fontosabb és nehezebben teljesíthető)  $dx = i dt$  feltételünk pl. a Lorenz-planiméternél és ennek  $\int_a^b f[y(x)] \cdot g(x) dx$  alakú integrálok planimétrálására alkalmazott változatánál teljesül. Ezeket egyszersmind integriméterként is használhatjuk tehát, ha az integrálkerék elhelyezésével az  $a = 0$  feltételt is biztosítjuk. Az  $\int_a^x y dx$  számítására szolgáló ú. n. alapintegrimétereknél pl. a vályúgörbe egyenlete:

$$R = m \cdot \cos \Phi$$

amely egy  $\frac{m}{2}$  sugarú, a tartóponton átmenő kör egyenlete.

A Lorenz-planiméternek hibája, hogy az abszcisszatengelyre merőleges követőkart a követőpontban erővel támadva, az egyenesbenvezetésre szolgáló kerék-pár vagy csap-pár könnyen megszorulhat. Ezért a követőkart a 26/a ábrán látható szerkezettel pótolhatjuk. A  $V$  vezetett és  $T$  tartópontban csap vagy kerék kapcsolódik a sínbe,  $S$ -nél csukló van. Ezen szerkezetnél a  $dx = i dv$



26/a. ábra

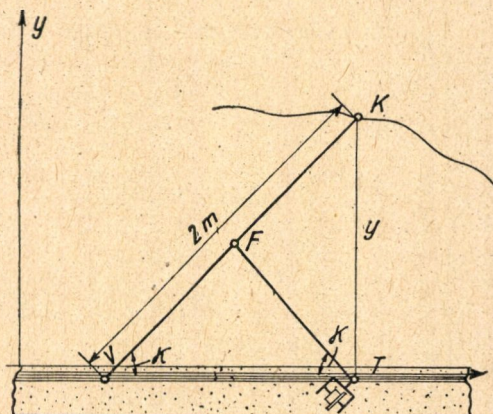


egyenlőség nem áll fenn (erre nincs is szükség) a  $dx = i dt$  egyenlőséget viszont a

$$\overline{VS} = \overline{ST} = \overline{SK}$$

méretezéssel biztosítjuk.

A 26/b ábrán az ezen az elven alapuló alapintegrímért mutatjuk be. Itt az előbbiek alapján köralakú vályút kellene alkalmaznunk a Lorenz-planiméter használata esetén. Ha azonban a Lorenz-planiméter követőkarját a 26. ábrán látható szerkezettel pótoljuk, nincs szükség a vályúra. Az  $S$  csukló



26/b. ábra

ugyanis futópontnak tekinthető ebben az esetben, mert így az  $Y = \frac{y}{2}$  egyenlőség fennáll. Az  $ST$  kar ennek következtében mérőkar lehet; az integrálkereket az ábrán látható módon hozzáerősítve  $ST$ -hez ( $a = 0$ ):

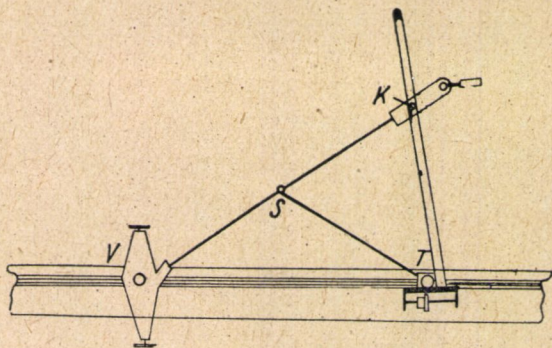
$$\begin{aligned} \int_a^x y dx &= \int_a^x l \sin \alpha i dt = 2m \int_a^x \sin(\pi - \mu) i dt = \\ &= 2m \int_a^x \sin \mu i dt = 2m 2\pi \varrho \gamma = 4\pi \varrho \gamma m. \end{aligned}$$

A 27. ábrán az  $\int_a^x \frac{1}{y} dx$  alakú integrálok mérésére alkalmas funkció linearplanimétert mutatunk be. A vályú egyenlete

$$\frac{1}{R} = m \cdot \cos \Phi ;$$

az tehát a tengelyre merőleges, az origótól  $\frac{1}{m}$  távolságra lévő egyenes.





27. ábra

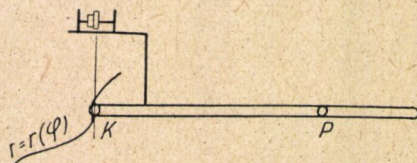
### 2.3. Radiálplaniméterek

Segítségükkel  $\int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi} r(\varphi) d\varphi$  ill.  $\int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi} \Phi[r(\varphi)] d\varphi$  alakú integrálokat tudunk

— a grafikusán adott  $r = r(\varphi)$  görbét követve — meghatározni. Vályúszerűen kiképzett a követőkarjuk (amely egyszersmind mérőkar is), ennek egyik végpontja a görbe követésére használt követőpont, koordinátái:  $r$  és  $\varphi$ . A követőkar az origóban rögzített csapon csúszik és körülötte elfordulhat. (Az  $\int r(\varphi) d\varphi$  integrálok mérésére alkalmas ú. n. alappplaniméter tulajdonképpen nem is planiméter, hiszen nem területdimenziójú mennyiséget mér. Ezért (1.2.) alapegyenletünk ezen a területen már nem használható.) Tárgyalni fogjuk az alap és funkciós radiálplanimétereket. Mindkettőt — esetleg kis módosítással — integriméterként is használjuk. A módosítást a megfelelő planiméterek tárgyalásánál ismertetjük. Valamennyi radiálplaniméter integrálkerékkel van felszerelve.

#### 2.3.1. Az alapradiálplaniméter.

Az alapradiálplaniméter követőkarja vályúszerűen kiképzett egyenes; az integrálkerék tengelye párhuzamos a követőkaréval. (L. 28. ábra.) A követőpont a követőkar végén van. A követőpont elemi elmozdulása fel-



28. ábra

bontható radiális,  $dr$  nagyságú és erre mérőleges,  $r d\varphi$  nagyságú összetevőre. Az integrálkerék az alapsíkra úgy fekszik fel, hogy a kerék síkja a követőpontot tartalmazza; az origótól (a csaptól) mért mérőleges távolsága eszerint:  $r$ .

Így tehát fennáll a következő egyenlőség (l. 1.3.4.):

$$2\pi \varrho d\gamma = r d\varphi ;$$



a  $dr$  nagyságú elmozduláskomponensnek nincs hatásos összetevője. Ezért

$$\int d\gamma = \frac{1}{2\pi Q} \int r d\varphi,$$

azaz :

$$\gamma = \frac{1}{2\pi Q} \int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi} r d\varphi.$$

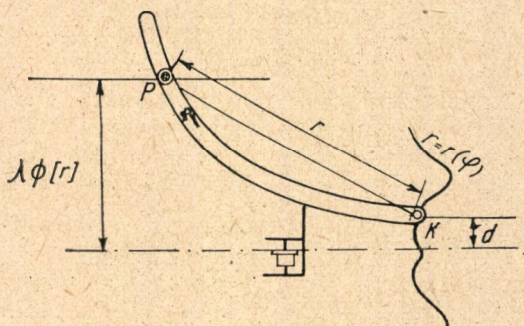
Ebből az egyenletből látható, hogy az alap-»planiméter« egyszerismind alap-integriméterként is használható.

### 2.3.2. Radiál funkciós-planiméterek

Feladatuk, hogy  $\int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi} \Phi[r(\varphi)] d\varphi$  alakú integrálok értékét mérjük segít-

ségükkel. Ez a dolgozat csak az általánosabb típussal foglalkozik, azaz azokkal a gépekkel, amelyek vályúszerű kiképzésű, csapon esüsző, görbevonalú követőkarral rendelkeznek ; nem tesz említést azokról a konstrukciókról, amelyek — egészen speciális  $\Phi[r]$  függvények esetében — a lineárlaniméternél megismert szögszorzóhoz hasonló elven alapulnak.

A 29. ábrán láthatjuk, hogy az említett általános típusnál, az integrálkerék mereven a követőkarhoz van rögzítve ; a kerék síkjának merőleges távolságát a követőponttól  $d$ -vel jelöltük. Legtöbb konstrukciónál  $d = 0$ .



29. ábra

A követőkar olyan kiképzésű, hogy az integrálkerék síkjának az origótól mért távolsága :

$$\lambda \cdot \Phi[r]$$

( $r, \varphi$  a követőpont koordinátái,  $\lambda$  a felépítés megszabta állandó).

A követőpont elemi elmozdulását [az  $(r; \varphi)$  kezdőhelyzettől  $(r + dr; \varphi + d\varphi)$  véghelyzetig] bontsuk fel egy radiális,  $dr$  nagyságú elmozdulásra és



egy, erre merőleges,  $r d\varphi$  nagyságú forgásra. Utóbbi elmozdulás-komponens hatásaképpen az integrálkerék szögelfordulása :

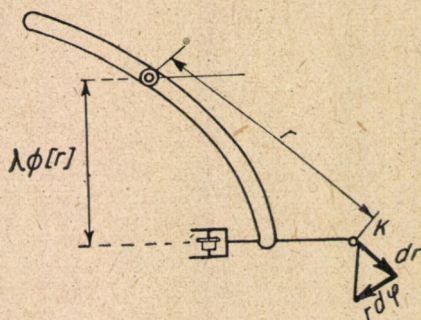
$$d\gamma_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varrho} \Phi[r] d\varphi$$

hiszen a kerék síkja a forgás középpontjától, az origótól  $\lambda\Phi[r]$  távolságra van.

Tehát

$$\gamma_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varrho} \int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi} \Phi[r(\varphi)] d\varphi.$$

A 30. ábra alapján könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a radiális komponens hatása a  $\varphi$  szög értékétől független. (Forgassuk el a csap körül a követőkart; az integrálkerék vele fordul s az új helyzetben megtéve a  $dr$  nagyságú radiális elmozdulást, az integrálkerék szögelfordulása változatlan.) Az is látható, hogy  $r$  értékétől függ a kerék szögelfordulása, mert változó  $r$ -rel változik a komponens és a műszer tengelye által bezárt szög.



30. ábra

Világos tovább, hogy a szögelfordulás  $dr$ -rel egyenesen arányos (a másod rendű kicsinyeket nem tekintve); bizonyosan előállítható tehát, mint egy  $f(r)$  függvény és a  $dr$  szorzata :

$$d\gamma_2 = \frac{1}{2\pi\varrho} f(r) dr$$

azaz

$$\gamma_2 = \frac{1}{2\pi\varrho} \int_{r=r_0}^r f(r) dr = F(r) - F(r_0)$$

$$\left[ F(r) = \int_{r=0}^r \frac{f(r)}{2\pi\varrho} dr \right]$$



Maga az  $F(r)$  függvény kísérletileg mérhető vagy számítással meghatározható.

Az eddigiek alapján az integrálkerék teljes szögelfordulása, mialatt a követőponttal az adott  $r = r(\varphi)$  egyenletű görbén az  $(r_0; \varphi_0)$  pontból az  $(r_v; \varphi_v)$  pontba jutunk :

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{1}{2\pi\varrho} \left[ \lambda \int_{\varphi_0}^{\varphi_v} \Phi[r(\varphi)] d\varphi + \int_{r_0}^{r_v} f(r) dr \right]$$

Amennyiben »planiméterként« akarjuk alkalmazni műszerünket, az adott  $(g)$  görbét kiegészítjük a radiális, az  $(r_v, \varphi_v)$  ponttól az  $(r_0, \varphi_v)$  pontig tartó  $(g_1)$  egyenesdarabbal. Így ugyanis az integrálkerék szögelfordulása :

$$\gamma = \frac{1}{2\pi\varrho} \left[ \lambda \int_{\varphi_0}^{\varphi_v} \Phi[r(\varphi)] d\varphi + \int_{r_0}^{r_v} f(r) dr + \int_{r_v}^{r_0} f(r) dr \right] = \frac{\lambda}{2\pi\varrho} \int_{\varphi_0}^{\varphi_v} \Phi[r(\varphi)] d\varphi ;$$

azaz a keresett integrál értékével arányos.

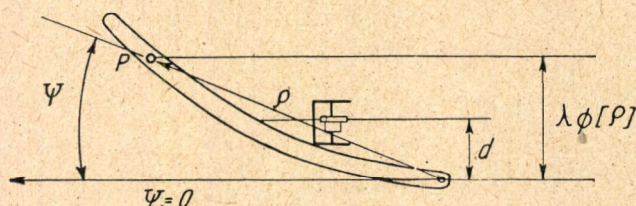
Ha viszont integriméterként akarjuk a műszert használni, fel kell azt szerelnünk egy további eszközzel (pl. egy fonalas nóniuszmércével), amelyről leolvashatjuk a követőpont  $r$ -koordinátáját. Rendelkeznünk kell ezenkívül a műszerhez »tartozó«  $F(r)$  függvény grafikonjával. Ebben az esetben leolvassa a kezdőpontban az  $r_0$ , egy tetszőszerinti pontban a  $\gamma$  és  $r$  értékét :

$$\gamma = \frac{\lambda}{2\pi\varrho} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \Phi[r(\varphi)] d\varphi + F(r) - F(r_0) ;$$

amiből

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \Phi[r(\varphi)] d\varphi = 2\pi\varrho \frac{\gamma - F(r) + F(r_0)}{\lambda} .$$

Ami mármost a követőkar alakját illeti, rögzítsük a leíráshoz szolgáló  $\varrho, \psi$  polárkoordinátarendszer kezdőpontját a követőpontban, a  $\psi = 0$  egyenest pedig válasszuk úgy, hogy az parallel legyen az integrálkerék síkjával (l. 31. ábrán!). A (karon »végigfutó«)  $C$  csap koordinátáit  $\varrho$ - és  $\psi$ -vel jelöljük.



31. ábra

Mivel a  $C$  pont az integrálkerék síkjától  $\lambda \Phi[\varrho]$ , a  $K$  pont pedig  $d$  távolságban van, azért a  $C$  pont ordinátája:

$$\varrho \sin \psi = \lambda \Phi[\varrho] + d.$$

Ezzel rendelkezésünkre áll a követőkar egyenlete.

Meg kell említenünk, hogy fenti elven felépíthetőek olyan funkciós radiál-»planiméterek« is, amelyek alkalmasak az  $\int \Phi[r(\varphi)] d\varphi$  integrál számítására, abban az esetben, amikor az  $r = r(\varphi)$  görbe általánosított polárkoordinátarendszerben van ábrázolva (pl. az  $r = \text{const.}$  vonalak koncentrikus körök, de nem lineáris a paraméterezésük, a  $\varphi = \text{const.}$  vonalak pedig origón átmenő, egymást megfelelő forgatással fedő görbék). Előbbi gondolatmenetünk változtatlanul érvényes, csak a kar egyenletének felírásakor kell figyelembe vennünk a koordinátarendszer jellegzetességeit.

#### 2.4. A Stieltjes-planiméterek

Feladatuk, hogy segítségükkel  $\int_{H(a)}^{H(b)} y(x) \cdot dH(x)$  alakú Stieltjes-inte-

grálok értékét gépi úton mérhessük. Három típusa ismeretes. Az első típus gépei tulajdonképpen szorzat-planiméterek. Ha t. i. a  $H(x)$  függvény véges számú ( $x_1; x_2; \dots; x_n$ ) hely kivételével differenciálható és a differenciáhányadost  $h(x)$ -szel jelöljük, akkor a számítandó integrál

$$\int_{H(a)}^{H(b)} y(x) dH(x) = \int_a^{x_1} y(x) h(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} y(x) \cdot h(x) dx + \dots + \int_{x_n}^b y(x) \cdot h(x) dx.$$

alakban írható.

Mármost az első csoport gépei, a  $h = h(x) = \frac{dH}{dx}$  görbe követése révén — mechanikus úton — előállítják az  $y(x) \cdot h(x)$  szorzatot, melyet (legtöbb esetben Gonella-kerék segítségével) planimetrálunk.

A második csoportba tartozó gépek, a  $H = H(x)$  görbe követése révén — mechanikus úton — az  $y(x) \cdot dH(x)$ -szel arányos szorzat értékét állítják elő ívelemről-ívelemre egy integrálkerék tengelyén (legtöbb esetben itt is a Gonella-kereket használjuk).

Végül a harmadik csoportba tartozó gépeknél mechanikus eszközökkel úgy szabjuk meg a gép valamely mozgó pontjának pályáját, hogy az »lényegében« olyan görbét követ, amelynél bármely pont ordinátája  $y(x)$ -szel, abszcisszája  $H(x)$ -szel arányos. Ehhez a ponthoz planimétert kapcsolva — »lényegében« a keresett Stieltjes-integrál értékét mérhetjük.

A gépeken két követőpontot találunk; egyikkel az  $y(x)$ , másikkal a  $H(x)$  (illetve a  $h(x)$ ) görbét kell követnünk. Legtöbb konstrukciónál a két követőpont mechanikailag egymáshoz-kötött, azaz abszcisszáik csak együttesen változtathatók. Ennek komoly hátránya van: az  $y(x)$  és  $H(x)$  görbék felrajzolásánál szigorúan ügyelnünk kell arra, hogy az  $x$ -tengelyeken ugyanazt a léptéket használjuk.



2.4.1. Intézetünk egy *Nyström-féle Stieltjes-planiméterrel* rendelkezik, amely a harmadik típusúhoz tartozik. Ennél a két grafikon abszcisszatengelyén a léptékek — bizonyos határon belül — egymástól függetlenül állapíthatók meg. Mi itt csak ennek ismertetésével foglalkozunk.

Az ábrán  $K_1$ -el jelöltük azt a követőpontot, amely az  $y = y(x)$  görbén fut végig,  $K_2$ -vel pedig a  $H = H(x)$ -et követő pontot. Az  $S_1$  szánkó a  $V_1$  sínen elgördülhet, az  $S_2$  szánkó pedig a sínhez és az  $S_1$  szánkóhoz képest is változtathatja helyét. Mindkét szánkót vezeti azonban a sín, mindegyik csak a sínnel paralel mozoghat.

Az  $R$  pont körül fordulhat el a mereven derékszögű,  $a$  és  $b$  karokkal rendelkező emelő. Az  $F$  pont az  $S_3$  szánon van, amelyet a  $V_2$  sínrendszer vezet; utóbbi mereven az  $S_1$  szánohoz van kötve.

A  $K_1$  pont pályáját az  $x$ ;  $y$ , a  $K_2$  pontot az  $x^*$ ;  $H$ , végül az  $F$  pontot a  $H^*$ ;  $y^*$  koordináta-rendszerben vizsgáljuk.

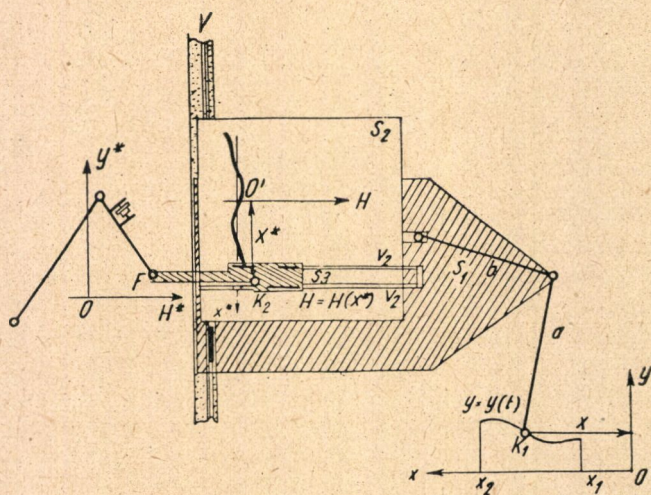
Mindhárom koordinátarendszer a  $V_1$  sínhez rögzített. Az  $F$  pont szolgál a planiméter vezetésére.

Először az emelő rendeltetését vizsgáljuk meg. Az emelő biztosítja a  $K_1$  pont  $x$  — és a  $K_2$  pont  $x^*$  abszcisszájának egyenlőségét; ezenkívül a  $K_1$  pont  $y$  ordinátájának megfelelően változtatja az  $F$  pont  $y^*$  ordinátáját.

Jelöljük az  $a$  kar irányszögét  $\alpha$ -val. Így az  $F$  pont  $y^*$  ordinátája :

$$y^* = y + a \sin \alpha + C$$

értékűnek adódik;  $C$  itt a készülék méreteitől függő állandó, amelyet az  $x$



32. ábra

és a  $H^*$  tengelyek távolsága, továbbá az  $F$  és  $R$  pontok  $y$  koordinátáinak különbsége szab meg.  $\alpha$  értéke csakis  $x$ -től függ, az  $a \sin \alpha + C$  összeget tehát egy  $s(x)$  függvénynek tekinthetjük.

Így :

$$y^* = y(x) + s(x).$$

Az  $F$  pont  $H^*$  koordinátáját a  $K_2$  pont  $H$  koordinátája határozza meg egyértelműen :

$$H^* = H(x) + G_1,$$

amiből :

$$dH^* = dH.$$

Vigyünk most végig a  $K_1$  pontot az  $x$ -tengelyen és kövessük  $K_2$ -vel eközben az adott  $H(x)$  görbét. Jelöljük eközben  $F$  ordinátáját  $y_0^*$ -al, akkor az előző egyenlet alapján :

$$y_0^* = 0 + s(x) = s(x)$$

Az  $\int_{H(a)}^{H(b)} y dH$  integrált kiszámítandó, járjunk el a következőkép : állítsuk  $K_1$ -et az  $x = a$ ,  $y = 0$  pontra,  $K_2$ -t az  $x^* = a$ ,  $H = H(a)$  pontra. Fussuk be  $K_1$ -el az  $x = a$  ordinátavonal, az  $y = y(x)$  görbe, az  $x = b$  ordinátavonal és az  $x$ -tengely megfelelő darabja által meghatározott zárt utat. Az első és harmadik útszakaszon  $K_2$  a  $V_2$  sínhez képest helybenmarad, a második és negyedik útszakaszon pedig a  $H = H(x)$  görbét követi. Így az  $F$  pont is zárt görbét ír le, amelynek területe :

$$\begin{aligned} T &= \oint y^* dH^* = \int_{H^*(a)}^{H^*(b)} (y^* - y_0^*) dH^* = \\ &= \int_{H(a)}^{H(b)} [y(x) + s(x) - s(x)] dH(x) = \int_{H(a)}^{H(b)} y dH ; \end{aligned}$$

az  $F$  ponthoz kapcsolt planiméter, tehát a keresett integrál értékét méri.

Gyakran szükségünk van arra, hogy a Stieltjes-planimétert integriméterként használjuk. Az első és második típus gépei — szinte kivétel nélkül — közvetlenül használhatók integriméterként is, a Nyström-planimétert azonban kissé módosítanunk kell. Egy kulissza beiktatásával elérjük, hogy  $F$  ordinátája

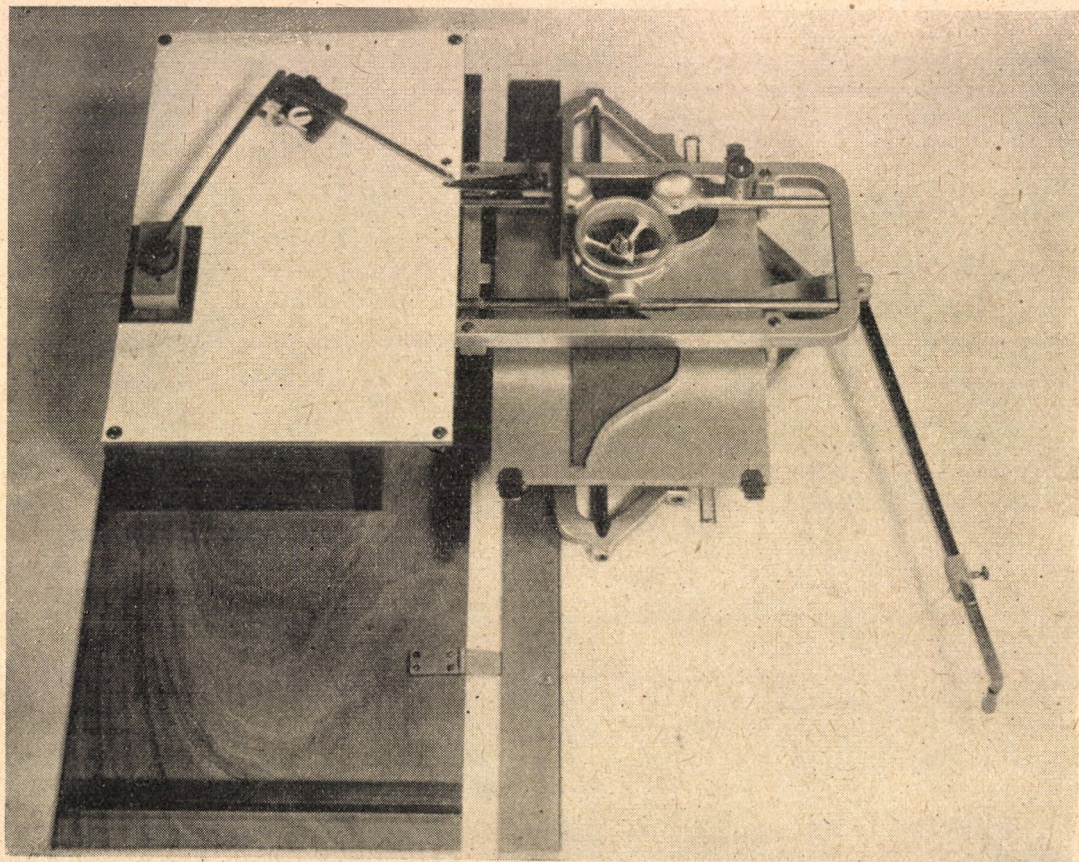
$$y^* = y(x) + C$$

legyen (azaz a kulisszát abból a célból használjuk, hogy  $F$  ne akkor legyen nyugalomban, ha  $K_1$  köríven mozog, hanem amikor az abszcisszatengellyel párhuzamosan fut be). Ha még planiméter helyett integrimétert kapcsolunk  $F$ -hez, teljesen megszüntettük a körüljárást kikényszerítő okokat.

2.4.2.

Megemlíjtük, hogy mikor  $\int_a^b f(x; \lambda, \mu) dx = \varphi(\lambda, \mu)$  alakú, határozott in-





II. fénykép



tegrállal definiált kétváltozós függvény értékét sok  $\lambda$  és  $\mu$  esetre kell számítani és a függvény

$$\alpha(\lambda, \mu) \int_{H(\mu a)}^{H(\mu b)} y(\lambda x) dH(\lambda x); \text{ ill. } \beta(\lambda, \mu) \int_{H(\mu a)}^{H(\mu b)} y(x; \lambda) dH(\lambda x)$$

alakban írható, jól ki lehet használni a Nyström-planiméternek azt a tulajdonságát, hogy az  $x$  és  $x^*$  tengelyek léptéke egymástól független. (Intézetünk a legkülönbözőbb problémák kapcsán jutott a fentihez hasonló kétparaméteres integrálokra, amelyeket a kívánt alakok egyikére tudtunk mindig hozni.) A műszert használva ugyanis, *nem* kell minden  $\lambda, \mu$  értékpárhoz egy-egy külön ábrát készíteni, hanem — ha az integrált fenti alakok közül az elsőnek megfelelően tudtuk alakítani — *csak* egyetlen *egy*hez; ha viszont a második alakról van szó, csak az egyes  $\lambda$ -értékekhez kell külön ábrát készítenünk. Az egyes értékpárokhoz tartozó függvényértékeket, az  $\frac{a}{b}$  viszony megfelelő beállítása után, az értékpár meghatározta határok között planimetrálva kapjuk. Hiszen  $\lambda$  és  $\mu$  értékének változtatása — változatlan grafikonok esetén — az abszcissza-tengelyek léptékviszonyának megváltozását jelenti s épp ezt vettük az  $\frac{a}{b}$  érték és a határok megfelelő választása révén figyelembe.

2.4.3. Az Intézet Mader—Ott-típusú harmonikus analízátora az ismertetett Nyström-planiméternek kissé módosított változata. Ezért — jóllehet a harmonikus analízátorok elméletét általánosságban nem ismertetjük e cikkben — a Mader—Ott típust vázlatosan bemutatjuk. A feladat: grafikusan adott,  $2l$  periódusú  $y = f(x)$  függvény Fourier-együtthatóinak, azaz az

$$\int_{x_0}^{x_0+2l} f(x) d \left[ \cos n \frac{\pi}{l} x \right] \text{ ill. } \int_{x_0}^{x_0+2l} f(x) \cdot d \left[ \sin n \frac{\pi}{l} x \right]$$

integrálokna a megállapítása. Erre a Nyström-planiméter közvetlenül alkalmas a

$$H(x) = \cos n \frac{\pi}{l} x \text{ ill. } H(x) = \sin n \frac{\pi}{l} x$$

egyenletű görbék felhasználásával. A Mader—Ott-konstrukciónál utóbbi függvényeket nem grafikusán követjük, hanem — amint a mellékelt fénykép mutatja — fogasléc-fogaskerék rendszerrel közvetlenül mechanikai úton képezzük. Mindössze annyi az elvi különbség a Nyström-planiméterrel szemben, hogy most a fogaskerék  $F$  (egyszersmind  $K_2$ ) pontjainak  $y^*$  ordinátája:

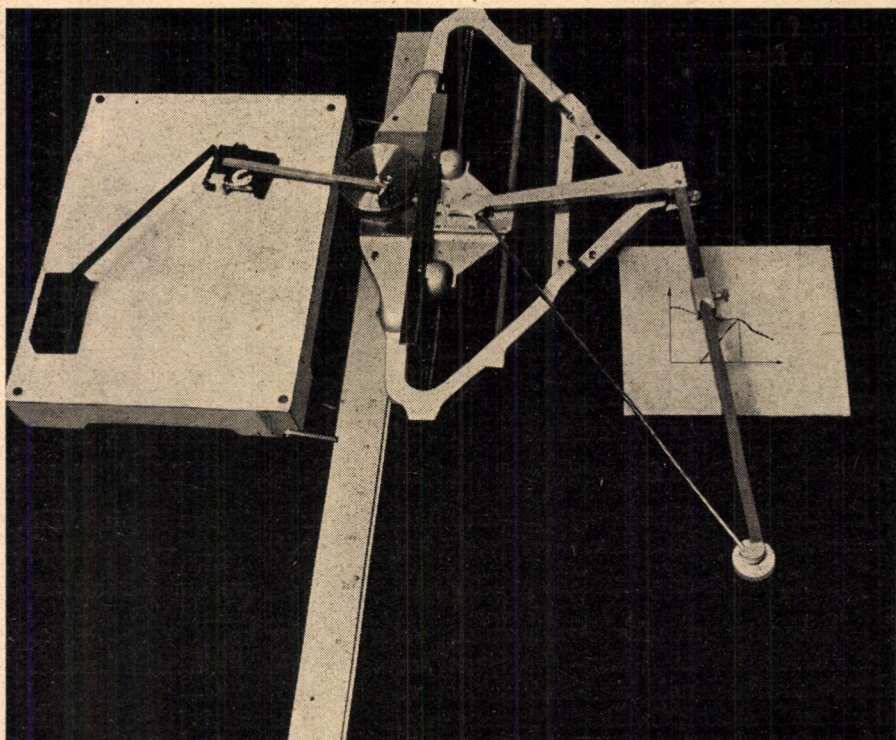
$$y^* = y - a \sin \alpha + C + r \sin \beta$$

(itt  $r$  az  $F$  pontnak a fogaskerék 0 tengelyétől mért távolsága,  $\beta$  pedig az  $\overrightarrow{OF}$ -rádiusvektornak egy fix iránytól mért elfordulása).

Mivel azonban nemcsak  $\alpha$ , hanem  $\beta$  is kizárólag a  $K_1$  pont abszcisszájától függ, így itt is

$$y^* = y(x) + S_1(x);$$





III. fénykép

a zárt görbe  $x$ -tengelybe eső darabját befutva pedig

$$y_0^* = S_1(x).$$

[Jelöléseket illetően l. a 2.5.1.-et.]

Tehát a gép ugyanolyan elv szerint működik, mint a Nyström-planiméter.

A gyakorlatban  $r$ -et úgy választják meg, hogy az integrálkeréken leolvasott érték közvetlenül a megfelelő Fourier-koefficiens értékét adja mm-ben.

### 3. § A planiméterek pontosságáról.

A pontosság kérdését nem exakt matematikai módszerekkel tárgyaljuk, hanem csak megfigyeléseink statisztikáját közöljük; tapasztalataink szerint ugyanis a műszer »objektív« hibáit nagyságrendre messze felülmúlják a kezelő által a görbe megrajzolásánál és követésénél elkövetett szubjektív hibák.

A következőkben a tapasztalat szerint átlagosan elkövetett hibák nagyságát — és pedig relatív hibaszázalékát — közöljük. Utóbbi azonban a kerület és terület arányával együtt nő, ill. csökken. A közölt adatok olyan idomok

planimétrálására vonatkoznak, amelyek területe a követőkar-hossz négyzeténél  $1 \sim 2$  nagyságrenddel kisebbek.

Tapasztalataink és irodalmi adatok szerint gyakorlott kezelő a precíziós tárcsás planiméterrel — nagyon gondos kezelés mellett — cca.  $0,3-0,6\%$ -os hibakorláttal, közönséges planiméterrel  $0,6-1,0\%$ -os hibakorláttal, kevésbé gondos kezelés mellett  $1-1,4\%$ -os hibakorláttal dolgozhat. A precíziós tárcsás planiméter használatánál az említett pontosság elérhető a karhossz négyzeténél mintegy három nagyságrenddel kisebb terület planimetralásánál is. A Nyström-planiméter használatánál jól begyakorolt kezelőpár gondos munkánál  $2,5-3,5$  százalékos (ha  $H(x)$  grafikonján az irányszögek a cca.  $\pm 70^\circ$ -ot nem haladják meg), kevésbé begyakorolt kezelőpár  $4-7\%$ -os hibakorláttal dolgozik (ugyanolyan körülmények között). Ha azonban a  $H(x)$ -görbét fémmodellből állítjuk elő, akkor egyetlen személy cca.  $1,5-2,5\%$ -os hibakorláttal dolgozhat.

## ПРИНЦИП ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТИПОВ ПЛАНИМЕТРОВ

(Аппараты Института Прикладной Математики АНВ.)

Т. ФРЕЙ

### Резюме

Работа подробно познакомит с принципом функционирования и конструкции полярных, линейных и радиальных планиметров, также планиметров Стильтеса. Систематически и подробно исследуется теория функциональных планиметров и интегриметров, подходящих для вычисления интегралов формы

$$\int_b^a f[y(x)] dx \quad \text{и} \quad \int_b^a f[y(x)] \cdot g(x) dx$$

Он дает тоже конкретное предложение для конструкции типов планиметра, пригодящихся для решения последней задачи: после исполнения соответствующих преобразований, планиметр Лоренца, применим для этой цели.

Статья познакомит с возможностью оказавшем практически полезным применением планиметра Стильтеса типа Нистрема при нумерической оценке определенных интегралов нескольких параметров.

## LES PRINCIPES DE FONCTIONNEMENT DES DIVERSES SORTES DE PLANIMÈTRES

(Les machines de l'Institut de Mathématique Appliquée.)

T. FREY

### Résumé

L'article donne une description détaillée du principe de fonctionnement et de la construction des planimètres polaires, linéaires et radiaux, ainsi que des planimètres de Stieltjes. Il discute systématiquement et d'une manière détaillée la théorie des planimètres fonctionnels et intégrimètres fonctionnels convenables pour évaluer les intégrales ayant les formes

$$\int_a^b f[y(x)] dx \quad \text{et} \quad \int_a^b f[y(x)] g(x) dx$$

il donne aussi une proposition concrète concernant la construction des planimètres servant à résoudre ce dernier problème. C'est le planimètre de Lorenz qui, après avoir été soumis à des transformations convenables, peut être employé à ce but.

L'article donne aussi la description d'une possibilité d'emploi qui s'est montrée utile en pratique du planimètre Stieltjes de Nyström dans l'évaluation numérique des intégrales définies à plusieurs paramètres.



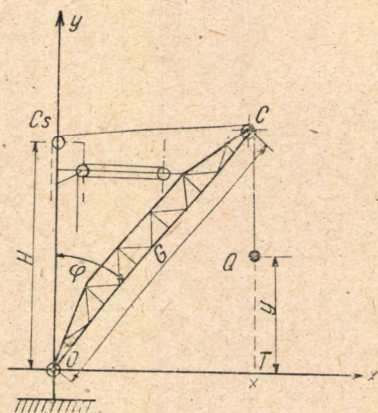
# EGY PÁLYAPROBLÉMA DARUVAL TÖRTÉNŐ TEHEREMELÉSÉNél

BÉDA GYULA

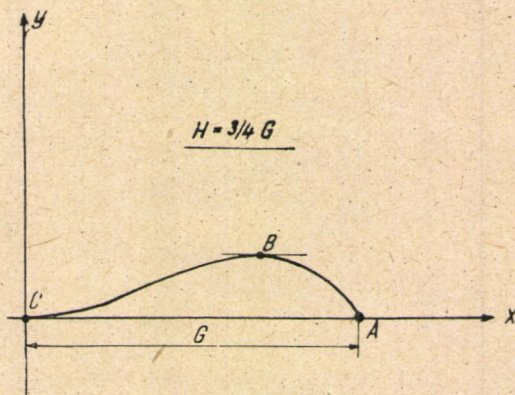
## ÖSSZEFOGLALÁS

Az első ábra szerinti darumozgatásnál a teher útjának megállapítása és ezen a szélsőérték, inflexió, stb. helyek megkeresése a feladat. Az ábrák mutatják a különböző lehetséges pályaalakokat, melyek közül különösen a  $G = H$  (a teherfelfüggesztőcsiga magassága = a gép hossza) görbe szinguláris alakja figyelemre méltó — továbbá mutatják a görbe megszerkesztésére illetve a szélsőérték hely meghatározására vonatkozó szerkesztési eljárásokat.

Az intézet miskolci csoportja az alábbi, emelőgéppel kapcsolatos feladatot oldotta meg, *Esztergályos Gusztáv*, a DIMÁVAG műszaki osztály vezetőjének megbízásából *Aczél János* irányításával. Az 1. ábrán vázolt emelő-



1. ábra



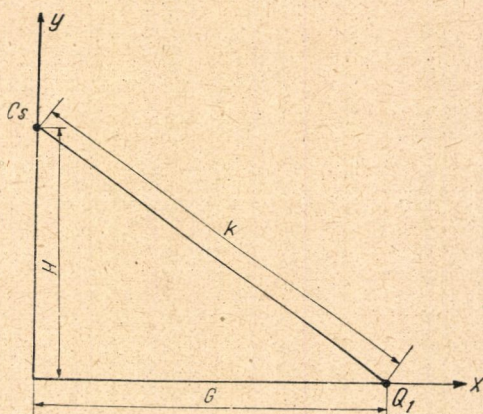
2. ábra

gépnel kellett meghatározni a pontszerűnek tekinthető teher pályáját, ha a gémet billentjük (az  $OC$  gép  $O$  körül forog, a terhet közben külön nem emeljük, a  $Cs$  csiga nem forog). A pálya alakjának ismerete a gép mozgatásához szükséges energia megállapításához szükséges. Ha ugyanis a pálya a 2. ábrán látható görbe, akkor, míg a teher  $A$ -ból  $B$ -be jut, a gép emelése mellett a terhet is emelni kell, viszont a  $\widehat{BC}$  szakaszon a gép emelését a süllyedő teher elősegíti.



Mi itt foglalkozni fogunk : 1. a görbe egyenletével, 2. a görbe alakjával (szélsőértékhelyeivel) az  $OC_s = H$  felfüggesztési magasság és az  $OC = G$  gémhossz viszonyának különböző értékei mellett és 3. a szerkesztési eljárásokkal a görbe és maximumhelye megszerkesztésére.

1. A pályagörbe egyenletének felírásakor nem kellett figyelembe venni a teher tehetetlenségét, a kötel hossza pedig állandó és a 3. ábra szerint



3. ábra

$k = \sqrt{G^2 + H^2}$ -nek volt vehető ; ahol  $H = \overline{OC_s}$ ,  $G$  pedig a gém hossza (1. ábra).

Ha a függőleges ( $y$  tengely) és a gém szögét választjuk paraméternek, a görbe egyenlete (1. ábra)

$$x = \overline{OT} = G \sin \varphi$$

$$y = \overline{CT} - (k - \overline{C_sC}) = G \cos \varphi + \sqrt{G^2 + H^2 - 2GH \cos \varphi} - \sqrt{G^2 + H^2}.$$

Ha  $\varphi$ -t kiküszöböljük, láthatjuk, hogy  $x$  és  $y$  között negyedfokú algebrai összefüggés áll fenn.

A görbe alakját rögzített  $G$  mellett a  $H$  szabja meg.

2. A görbe alakja, szélsőértékhelyei. A görbe tetőpontját keressük.

$$y' = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \operatorname{tg} \varphi \left( \frac{H}{\sqrt{G^2 + H^2 - 2GH \cos \varphi}} - 1 \right).$$

Szélsőérték lehet, ahol

$$y' = 0,$$



tehát vagy

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,$$

azaz

$$\varphi = 0$$

vagy pedig

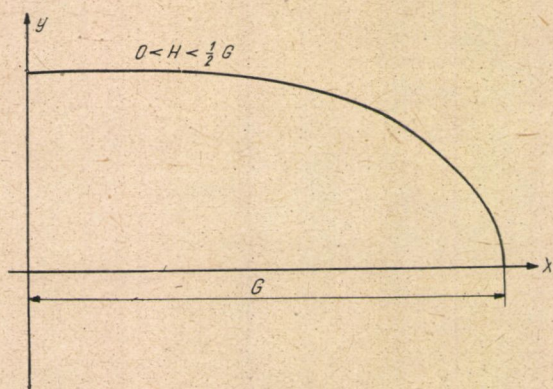
$$\frac{H}{\sqrt{G^2 + H^2 - 2GH \cos \varphi}} = 1,$$

azaz

$$\cos \varphi_m = \frac{G}{2H}.$$

Ez utóbbi csak akkor létezik, ha  $H \geq \frac{G}{2}$ .

a)  $H \leq \frac{G}{2}$  esetén a görbének csak a  $\varphi = 0$  ( $x = 0$ ) helyen van szélsőértéke és pedig mivel  $y''_{\varphi=0} < 0$ , tehát maximuma (4. ábra). A  $H = \frac{G}{2}$  esetén ez a maximum igen lapos és a görbe harmadrendben érintkezik a vízszintessel.



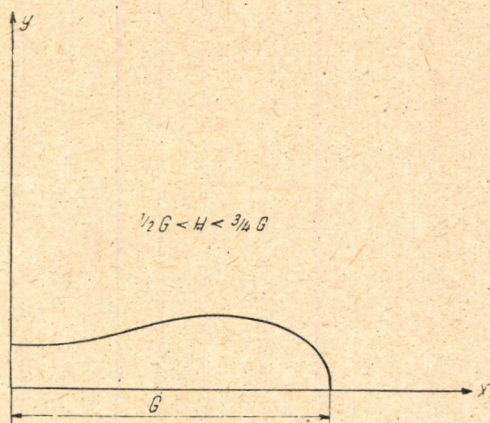
4. ábra

b) A  $H > \frac{G}{2}$  esetén a görbének a  $\varphi = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 2G - H - \sqrt{G^2 + H^2}$  helyen minimuma van. Kivételes a  $H = G$  eset, ahol e minimumhelyen nem vízszintes az érintő (lásd alább). A  $\varphi_m = \arccos \frac{G}{2H}$

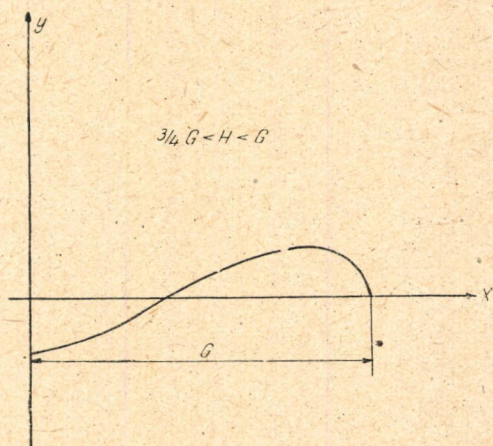
$$\left( x_m = \frac{G}{2H} \sqrt{4H^2 - G^2}, y_m = \frac{G^2}{2H} + H - \sqrt{G^2 + H^2} \right)$$

helyen viszont a görbének maximuma van.





5. ábra



6. ábra

A két szélsőérték hely között a görbének inflexiója van (5. ábra). Helyét az  $y'' = 0$ ,  $\cos \varphi$ -re nézve hatodfokú egyenletből kaphatjuk meg. Megközelítésére alkalmasak például a következő (iterációval nyert) képletek: felülről való közelítéshez

$$\cos \varphi_i \approx 1 - \frac{1}{2GH} (G - H)^{4/3} [H^{2/3} - (G - H)^{2/3}]$$

(mivel itt  $G - H$ -nak  $2/3$ , ill.  $4/3$  kitevős hatványa szerepel, az pozitív, akár  $G > H$ , akár  $G < H$ ), vagy alulról való közelítéshez:

$$\cos \varphi_i \approx \frac{G^2 + H^2 - \left( H^3 - \frac{G^2 H}{2} + \frac{G^4}{8H} \right)^{2/3}}{2GH}$$



c)  $H > \frac{3}{4}G$ . A teher a kezdeti magasságánál alacsonyabbra is kerülhet. A görbe az  $x$  tengely alá is süllyed, ha  $H > \frac{3}{4}G$ . Ugyanis ekkor  $(y)_{\varphi=0} = 2G - H - \sqrt{G^2 + H^2} < 0$ . Ilyenkor a zérushelye a görbének a

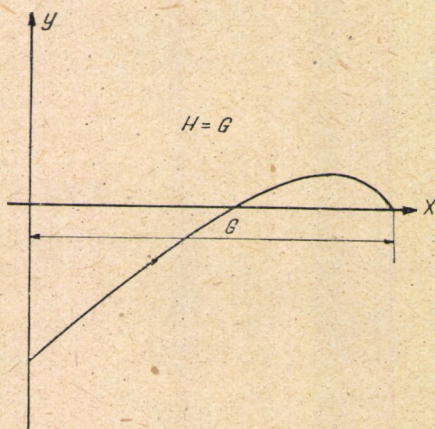
$$\cos \varphi_0 = 2 \frac{\sqrt{G^2 + H^2} - H}{G}$$

szögnek megfelelő  $x = \sqrt{8H\sqrt{G^2 + H^2} - 3G^2 - 8H^2}$  érték.

d)  $H = G$  esetén a  $\varphi_m$  maximumhely marad, a  $\varphi = 0$  helyen is minimum van, ez utóbbi helyen azonban a görbének

$$y' = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi)}} - \operatorname{tg} \varphi \right) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} = 1$$

miatt  $45^\circ$ -os érintője van. (7. ábra.) Az összes többi görbének ezen a helyen



7. ábra

vízszintes érintője van. Az  $(y')_{\varphi=0}$  mint  $H$  függvénye tehát csak ebben az esetben 1, minden más értéknél 0. Ez a görbe a feladat szempontjából azért is említésre méltó, mert a legmagasabb és legmélyebb pont közötti

$$\frac{G^2}{2H} + 2(H - G) \text{ ha } \frac{1}{2} < 4 \leq H \text{ ill. } \frac{G^2}{2H}, \text{ ha } H > G$$

magasságkülönbség itt a legnagyobb és  $\frac{G}{2}$ -vel egyenlő.



e)  $H > G$ . Ha  $H$  tovább növekszik a görbék ismét laposodnak. Ugyanis

$$y_m = \frac{G^4}{(H + \sqrt{G^2 + H^2})^2} \text{ és } |y_0| = \frac{G^2}{H + \sqrt{G^2 + H^2}} \text{ csökken,}$$

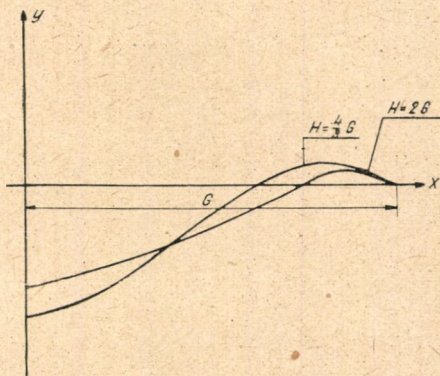
$$\begin{aligned} \lim_{H \rightarrow \infty} y &= \lim_{H \rightarrow \infty} (G \cos \varphi + \sqrt{G^2 + H^2 - 2GH \cos \varphi} - \sqrt{G^2 + H^2}) = \\ &= G \cos \varphi + \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{-2G \cos \varphi}{\sqrt{\frac{G^2}{H^2} + 1} - 2 \frac{G}{H} \cos \varphi + \sqrt{\frac{G^2}{H^2} + 1}} = 0 \end{aligned}$$

és  $\lim_{H \rightarrow \infty} y' = 0$ .

Ugyanekkor a maximumhely

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \varphi_m = \lim_{H \rightarrow \infty} \arccos \frac{G}{2H} = \frac{\pi}{2} \quad (\lim_{H \rightarrow \infty} x_m = G)$$

miatt az  $x = G, y = 0$  hely felé tolódik el (8. ábra). Érdekes megjegyezni, hogy

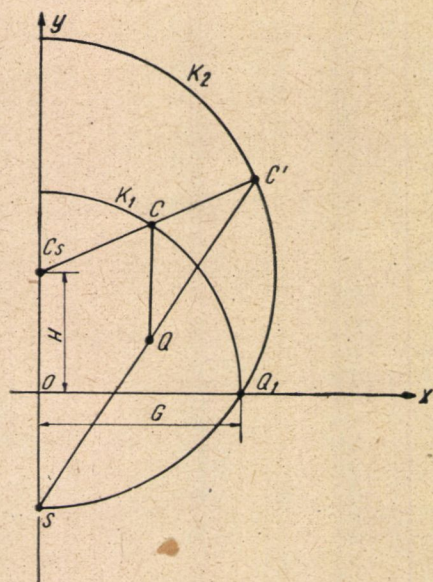


8. ábra

negatív  $\varphi$ -kre a görbe az  $y$  tengelyre tükröződik, míg  $\frac{\pi}{2}$ -nél nagyobb  $|\varphi|$ -kre alulról konvex módon tér vissza a görbe az  $y$  tengelyhez, aholis  $\varphi = \pi$ -nél a  $(0, H - \sqrt{G^2 + H^2})$  minimumot veszi fel, mely  $H \cong G$  esetén megegyezik a  $\varphi = 0$ -nál felvett minimumponttal.

3. Szerkesztési eljárások. A görbét így szerkesztjük meg (9. ábra.): A  $C_s$  pontból a  $CsQ_1$  sugárral  $K_2$  kört rajzolunk. Ez a függőleges egyenest (az  $y$  tengelyt) alul az  $S$  pontban metszi. A  $G$  sugarú  $K_1$  körön felvett tetszőleges  $C$  futópontot a  $Cs$ -ből kivetítjük a  $K_2$ -körre és a kapott  $C'$  pontot  $S$ -sel összekötve az a  $C$ -ből kiinduló függőlegesből kimetszi a görbének a  $C$ -hez tartozó keresett  $Q$  pontját.

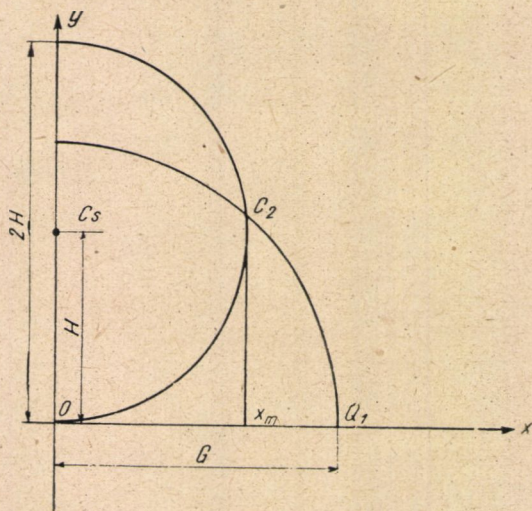




9. ábra

Mivel azonban ez kis  $\varphi$  szögek esetén nem ad elég éles metszést, azért ilyenkor  $C$ -ből az innen húzott függőleges egyenesre a  $CC'$  távolságot körzővel visszamérjük és megkapjuk a keresett  $Q$  pontot.

A maximum helyének megszerkesztése a 10. ábrából leolvasható.



10. ábra

## ПРОБЛЕМА ТРАЕКТОРИИ ПРИ ПОДЪЕМЕ ГРУЗА КРАНОМ

ДЬ. ВЕДА

### Резюме

При движении крана по рис. 1, задача: определить путь груза и найти места инфлексий, экстремумов и т. д. на нём. Рисунки показывают различные возможные формы траектории, между которыми особенно отличается сингулярная форма кривой  $G = H$  (груз высота подвесочного блока = длина укосины), кроме того методы конструкции для конструкции кривой и определения экстремума.

## UN PROBLÈME DE TRAJECTOIRE DANS LE CAS DE SOULÈVEMENT DE CHARGE MOYENNANT UNE GRUE

J. ВЕДА

### Résumé

Le problème à résoudre est d'établir la voie parcourue par la charge dans le cas de mouvement de grue selon la fig. 1, et de trouver sur cette voie les valeurs extrêmes, les inflexions, etc. Les illustrations montrent les diverses formes de trajectoire possibles entre lesquelles c'est particulièrement la forme singulière de la courbe  $G = H$  (hauteur de la poulie de suspension de la charge est égale à la longueur du levier de la grue) qui est digne d'attention, et montrent en outre les méthodes de construction de la courbe, respectivement de la détermination de l'endroit de valeur extrême.



# A GÖMBHÁROMSZÖGTAN LEGENDRE TÉTELÉNEK ÉRVÉNYESSÉGI KÖRE FÖLDI MÉRTEKNÉL

GÁTI JÓZSEF

## ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk a Legendre-tétel érvényességi körének megállapításával foglalkozik. Legendre tétele azt mondja ki, hogy az oldalak negyedik és annál magasabb hatványaitól eltekintve  $\alpha - \alpha' \approx \frac{e}{3}$ ,  $\beta - \beta' \approx \frac{e}{3}$ ,  $\gamma - \gamma' \approx \frac{e}{2}$ , ahol  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  egy gömbháromszög szögeit jelentik radiánban mérve. A gömbháromszög oldalai  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , és területe  $t$ , mely ha a gömb sugarát, a föld esetében a földgömb sugarát vesszük egységnek, a gömbháromszög  $e$  gömbi feleslegével egyenlő,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  pedig az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  oldalakkal rajzolt síkháromszög szögeit,  $t'$  a területet jelenti. Megállapítandó, legfeljebb mekkora lehet a háromszög legnagyobb oldala, hogy a Legendre-féle közelítés az  $\varepsilon$  szögmérési hibánál kisebb hibát adjon. Ehhez a  $H = \left| \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{180} \right| t'$  kifejezés maximumát kellett megkeresni az

$a \leq d$ ;  $b \leq d$ ;  $c \leq d$  egyenlőtlenséget, mint mellékfeltételek mellett. Az eredményképpen kapott  $\alpha(\varepsilon)$  függvényt a 2. ábra felső egyenese tünteti fel logaritmikus papíron. Ha a szögmérés  $0,1''$  pontosságú, úgy 7'-nél (780 km-nél) kisebb oldalhosszakra a Legendre-tétel alkalmazása a szögmérési hibánál kisebb eltérést ad.

Az Alkalmazott Matematikai Intézet Nagymiskolci Csoportja a következő problémát kapta: Megvizsgálandó, hogy  $0,1''$  szögmérési pontosság mellett meddig ad a geodéziában használt Legendre-tétel alkalmazása  $0,1''$ -nél kisebb hibát.

A Legendre-tételnek számos bizonyítása közismert. (L. pl. [1].) Ez a dolgozat, mely Aczél János útmutatásával készült, az alkalmazási kör megállapításával foglalkozik.

Mindenekelőtt fogalmazzuk meg Legendre tételét:

Legyenek  $a$ ,  $b$ ,  $c$  egy gömbháromszög oldalai,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (radiánban mérve) a szögei és  $t$  a területe, mely ha a gömb sugarát (a föld esetében a földgömb sugarát) az egyszerűség kedvéért egységnek vesszük a gömbháromszög  $e$  gömbi feleslegével egyenlő. Rajzoljunk az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  oldalakkal egy síkháromszöget, ennek szögei legyenek  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  (területe  $t'$ ).

Legendre tétele azt mondja ki, hogy az oldalak negyedik és annál magasabb hatványaitól eltekintve

$$\alpha - \alpha' \approx \frac{e}{3}, \quad \beta - \beta' \approx \frac{e}{3}, \quad \gamma - \gamma' \approx \frac{e}{2}.$$

(Földi geodéziai méréseknél a háromszögek oldalai a föld sugarához képest kicsinyek.)

Az alkalmazási kör megállapítása azon a követelményen alapszik, hogy a közelítésnél elkövetett hiba legyen kisebb, mint a mérési pontatlanságból eredő hiba.

1. Először az alkalmazási kör alsó határát állapítjuk meg. Azt keressük, hogy legfeljebb mekkora  $d$  oldalhosszig nem érdemes a Legendre-tételt alkalmazni, mert az egyszerű alsógeodéziai

$$a \approx a'$$

közelítés is elegendő pontos. Ennél az elhanyagolás a Legendre-tétel értelmében közelítően  $H = \frac{t'}{3}$  mal egyenlő. Meg kell keressük tehát a  $H = \frac{t'}{3}$  hiba maximumát az  $a \leq d, b \leq d, c \leq d$  egyenlőtlenségek mellett. Ez is, a felső határ megállapítása is feltételes szélsőérték-számítási feladat, ahol mellékfeltételként nem egyenlet, hanem egyenlőtlenség szerepel.\* Megoldása ebben az esetben igen egyszerű, mert az említett feltételnek elegettevő oldalakból összeállítható legnagyobb területű háromszög a  $d$  oldalhosszú szabályos háromszög, melynek területe :

$$\frac{d^2}{4} \sqrt{3}.$$

A maximális hiba tehát

$$\frac{d^2}{12} \sqrt{3}$$

radián. Ennek kell  $0,1''$ -nél, tehát  $0,1 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{3600}$  radiánnál kisebbnek lennie. Ha a  $d$  távolságot fokokban mérjük ( $d^\circ$ ), akkor

$$d = d^\circ \frac{\pi}{180}.$$

Tehát azt kívánjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d^{\circ 2}}{12} \left( \frac{\pi}{180} \right)^2 \sqrt{3} &< \frac{1}{36000} \cdot \frac{\pi}{180} \\ d^\circ &< \frac{6}{100\pi \sqrt{3}} = 0,105. \end{aligned}$$

Vagyis  $0,1''$ -es pontosságot a Legendre-tétel alkalmazása nélkül is elérhetünk, ha az oldalak nagysága

$$d < 0,105^\circ = 6'18''$$

\* Tudomásunk szerint olyan szélsőértékfeladatokkal, ahol a mellékfeltétel egyenlőtlenség, az irodalomban csak *Lipka I.* egy cikke foglalkozik (Journal für reine u. angewandte Mathematik, 166, 1931.) Jelen esetben nem volt szükség az ő módszereire.

vagy km-ben

$$d < 11.7 \text{ km}$$

(1"-es pontosságot pedig, ha  $d < 0,332'' = 19'5'' = 36,8 \text{ km}$ ).

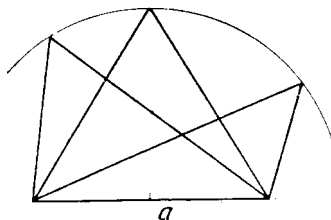
2. Az érvényességi kör felső határának megállapításához a pontosabb Gauss-féle közelítő képletből (lásd pl. [2]) kaphatjuk meg, mekkora hibát követünk el a Legendre-tétel alkalmazásánál:

$$\alpha - \alpha' \approx \frac{e}{3} + \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{180} e \approx \frac{e}{3} + \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{180} t'.$$

Tehát a Legendre-féle közelítésnél elkövetett hiba

$$H = \left| \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{180} \right| t'.$$

Meg kell néznünk legfeljebb mekkora lehet ez az eltérésérték ismét az  $a \leq d, b \leq d, c \leq d$  egyenlőtlenségek fennállása mellett. A vizsgálatot nagymértékben leegyszerűsíti az a megállapítás, hogy maximum csak  $b = c$  mellett, tehát egyenlőszárú háromszögnél lehet, ugyanis az  $a$  és  $b^2 + c^2$  értéket (és így velük  $b^2 + c^2 - 2a^2$ -et is) állandóan tartva,  $b = c$  mellett, egyenlőszárú háromszögnél lesz a  $t'$  területnek legnagyobb értéke (mivel az  $a$  oldalt rögzítve az állandó  $b^2 + c^2$  négyzetösszeget adó háromszögek  $a$ -val szemközti csúcsai egy körön fekszenek, melynek középpontja  $a$  felezőpontja és — mint az az 1. ábrán látszik — mivel a terület állandó alap mellett annál nagyobb, minél nagyobb a magasság, a legnagyobb terület sugárnyi magasságnál,  $b = c$  esetén, tehát egyenlőszárú háromszögnél áll elő).



1. ábra

A legnagyobb hibát tehát olyan egyenlőszárú háromszögnél kapjuk, amelynek valamelyik oldala egyenlő  $d$ -vel.

Ha ugyanis a háromszög legnagyobb oldala kisebb lenne  $d$ -nél, a háromszöget megnagyíthatjuk, míg a legnagyobb oldal éppen  $d$  hosszúságot ér el és ekközben a hiba a

$$H = \left| \frac{b^2 + c^2 - a^2}{180} \right| t'$$

képletnek megfelelően a nagyítás arányának negyedik hatványával nő, mert



mindkét tényezője, a nagyítás arányának négyzetével nő. A továbbiakban két esetet kell megkülönböztetnünk:

$$a) \quad a = d \quad \text{és} \quad b = c < d$$

$$b) \quad b = c = d \quad \text{és} \quad a < d.$$

A szélsőértékszámítást mindkét esetben többféle módon is elvégezhetjük. Választhatjuk a háromszög alakját jellemző változó mennyiségnek az  $a$  szöget, vagy az  $m$  magasságot, vagy akár legkézenfekvőbbben magukat az  $a$ , ill.  $b = c$  oldalakat. Itt csak ezt az utóbbi megfontolást fogjuk ismertetni. Ehhez a  $t'$  területet is az oldalak segítségével kell kifejezni

$$t' = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{a \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{a \sqrt{4b^2 - a^2}}{4}$$

a  $H = \left| \frac{b^2 + c^2 - a^2}{180} \right| \cdot t'$  függvény helyett vizsgálhatjuk a  $(360 H)^2 = (b^2 - a^2)^2 \cdot a^2 (4b^2 - a^2)$  függvényt is, amelynek ugyanakkor van legnagyobb értéke, mint  $H$ -nak; jelöljük ezt a függvényt  $f(a, b)$ -vel.

Az  $a)$  esetben azt keressük, hogy konstans  $a = d$  mellett milyen  $b$  értéknél lesz  $f(a, b)$  értéke legnagyobb, vagyis hol lesz  $f$ -nek  $b$  szerinti differenciálhányadosa 0:

$$\begin{aligned} 2(b^2 - a^2) 2ba^2(4b^2 - a^2) + (b^2 - a^2)^2 a^2 8b &= 0 \\ 4b^2 - a^2 + 2(b^2 - a^2) &= 0 \\ 6b^2 &= 3a^2, \quad b = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Az  $a = d$ ,  $b = c = \frac{d}{\sqrt{2}}$  oldalú egyenlőszárú derékszögű háromszög területe

$$t' = \frac{b^2}{2} = \frac{d^2}{4}$$

és így a maximális hiba abban az esetben, mikor  $a = d$ ,  $b = c < d$

$$H = \left| \frac{\frac{d^2}{2} + \frac{d^2}{2} - 2a^2}{180} \right| \frac{d^2}{4} = \frac{d^4}{180} \approx 0,25.$$

A  $b)$  esetben pedig azt keressük, hogy konstans  $b = d$  mellett milyen  $a$  értéknél lesz  $f(a, b)$ -nek maximuma, hol lesz az  $a$  szerinti derivált 0:

$$\begin{aligned} 2(b^2 - a^2)(-2a)(4a^2b^2 - a^4) + (b^2 - a^2)^2(8ab^2 - 4a^3) &= 0 \\ 4a^2b^2 - a^4 &= (b^2 - a^2)(2b^2 + a^2) \end{aligned}$$

$$2a^4 - 7a^2b^2 + 2b^4 = 0 \quad a^2 = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 16}}{4} b^2 = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{4} b^2.$$

A pozitív előjel  $b = d$ -nél nagyobb  $a$ -t adna, tehát csak a negatív előjel jön tekintetbe

$$a^2 = \frac{7 - \sqrt{33}}{4} d^2 = 0,314 d^2.$$

Tehát  $b = c = d$ ,  $a < d$  esetén a maximális eltérés :

$$H = \frac{2(d^2 - 0,314d^2)}{180} \cdot \frac{\sqrt{0,314 d} \sqrt{4d^2 - 0,314d^2}}{4} = \frac{d^4}{180} \cdot \frac{0,686 \cdot 0,5604 \cdot 1,920}{2} = \frac{d^4}{180} 0,369.$$

Látható, hogy a két esetben kapott maximális eltérés között ez utóbbi a nagyobbik.

Követelményünk tehát az, hogy a  $\frac{d^4}{180} 0,3690 = 0,00205 d^4$  radiánnyi eltérés\*\* legyen kisebb, mint  $0,1'' = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{3600} 0,1$  radián. Ha pedig a  $d$  távolságot fokokban mérjük ( $d^\circ$ ), akkor

$$d = d^\circ \frac{\pi}{180}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^{\circ 4} \pi^4}{180^5} 0,369 < \frac{\pi}{180} \frac{1}{36000}$$

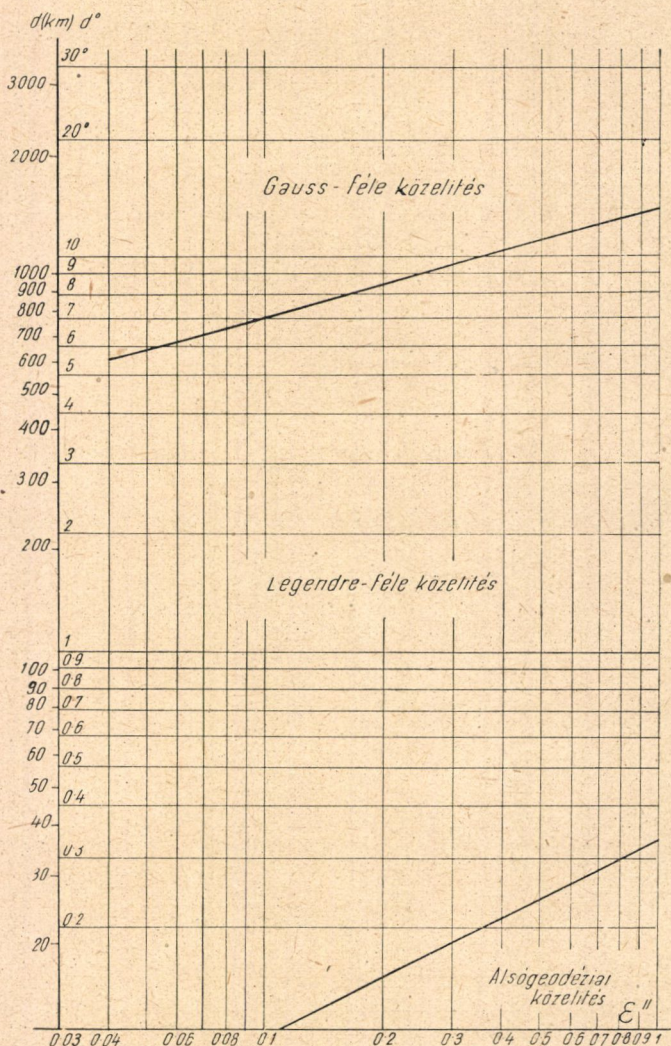
$$d^{\circ 4} < 180^4 \frac{1}{\pi^3 \cdot 0,369 \cdot 36000}$$

$$d^\circ < 180 \sqrt[4]{\frac{1}{\pi^3 \cdot 0,369 \cdot 36000}} = 7,1052^\circ = 7^\circ 6' 19'' = 788,7 \text{ km.}$$

(Ha  $1''$ -es pontossággal megelégszünk, elég ha,  $d < 12,635^\circ = 12^\circ 38' = 1402,5$  km).

Összefoglalva : Ha szögmérésünk  $0,1''$  pontosságú, akkor a Legendre-féle közelítéssel akkor érdemes számolni, ha háromszögünk legnagyobb oldala 11 km-nél (6 percnél) nagyobb és addig ad a mérési hibánál kisebb eltérésű eredményt, míg 790 km-nél ( $7^\circ$ -nál) kisebb a legnagyobb oldal. Ha a szögmérés csak  $1''$ -re pontos, akkor 36 és 1400 km közötti (19 perc és  $12^\circ$  közti) oldalhosszú háromszögek alkotják a Legendre-tétel érvényességi körét. (Szemben azzal az általában használt feltevessel, mely szerint az alsó geodéziai módszerek 30 km-es oldalhosszig,

\*\* Ez a becslés több mint tízszer pontosabb, mint a Mertens által talált  $0,0212 d^4$  eltérés-becslés (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 20, 1875). — Jelen becsléssel egyező eredményre jut, valamivel kényelmetlenebb változóválasztással : Jordan, (Handbuch der Vermessungskunde 1916. III. 266. o.)



2. ábra

a Legendre-tétel viszont csak 300 km-ig — sőt mások szerint csak 100 km-ig adna a mérési hibánál kisebb eltérésű eredményt. Megemlítjük, hogy az a számítás, mely szerint az egyszerű alsó geodéziai közelítés ( $\alpha \approx \alpha'$ ) 30 km oldalhosszúságú háromszögekig használható, nem terepen, hanem stereo-grafikus térképeken mért távolságokra vonatkozik.)

Végül a teljes áttekinthetőség kedvéért ábrázoltuk az alkalmazási kör alsó és felső határát a szögmérés pontosságának függvényében. A szögmérésnél elkövetett hibát  $\varepsilon$ -nal jelölve (másodpercekben mérve), az alsó határra azt kaptuk, hogy



$$\frac{d^{\circ 2}}{12} \left( \frac{\pi}{180} \right)^2 \sqrt{3} > \frac{\varepsilon}{3600} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$d^{\circ 2} > \frac{12 \cdot 180}{\sqrt{3} \cdot \pi \cdot 3600} \cdot \varepsilon = 0,11 \cdot \varepsilon$$

$$d^{\circ} > \sqrt[4]{0,11 \varepsilon} = 0,332 \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

A felső határra pedig

$$d^{\circ} < 180 \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{\pi^3 \cdot 0,369 \cdot 3600}} = 12,6 \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

A Legendre tétel alkalmazási intervalluma

$$0,332 \sqrt[4]{\varepsilon} < d^{\circ} < 12,6 \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Ennek határai  $\varepsilon$ -tól függnnek.

Logaritmizálva :

$$\log 0,332 + \frac{1}{2} \log \varepsilon < \log d^{\circ} < \log 12,6 + \frac{1}{4} \log \varepsilon.$$

Logaritmikus papíron tehát a Legendre-tétel alkalmazási területét egyenesek határolják (2. ábra).

#### IRODALOM

1. *N. Hauer*: Zur Geschichte des Satzes von Legendre, Zeitschrift für Vermessungswesen 77 (1938) 577—595, 641—653. o.
2. *E. Dörrie*: Ebene und sphärische Trigonometrie, 370. o.

#### КРУГ СПРАВЕДЛИВОСТИ ТЕОРЕМЫ ЛЕЖАНДРА СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ ПРИ ЗЕМНЫХ МАСШТАБАХ

И. ГАТИ

#### Резюме

Работа занимается определением круга справедливости теоремы Лежандра. Теорема Лежандра высказывает, что несмотря на четвертую и высшие степени сторон :

$$\alpha - \alpha' \approx \frac{e}{3}, \beta - \beta' \approx \frac{e}{3}, \gamma - \gamma' \approx \frac{e}{3}$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы сферического треугольника в радианах,  $a, b, c$  — стороны сферического треугольника,  $t$  — его поверхность, которая равна сферическим эксцессом  $e$  сферического треугольника, если радиус сферы (в случае земли радиус земного шара) принимается единицей, —  $\alpha', \beta', \gamma'$  — углы плоского треугольника со сторонами  $a, b, c$  и  $t$  его поверхность. Определяем максимальную величину наибольшей стороны треугольника, чтобы приближение Лежандра дало ошибку меньше, чем ошибка измерения углов  $\varepsilon$ . Для этого отыскался максимум выражения  $H = \left| \frac{b^2 - c^2 - 2a^2}{180} \cdot t \right|$  при допол-

нительных условиях  $a \leq d$ ,  $b \leq d$ ,  $c \leq d$ . Результат — функция  $d(\varepsilon)$ , представляется верхней прямой рис. 2. на логарифмической бумаге. Например, если измерение угла обладает точностью  $0,1''$ , то применение теоремы Лежандра дает для длин стороны меньше, чем  $7^\circ$  (780 км) отклонение меньше, чем ошибка измерения угла.

## LA SPHERE DE VALIDITÉ DU THÉOREME DE LEGENDRE DE LA TRIGONOMETRIE SPHÉRIQUE DANS LE CAS DE DIMENSIONS TERRESTRES

J. GÁTI

### Résumé

L'article s'occupe de l'établissement de la sphère de validité du théorème de Legendre. Après le théorème de Legendre si l'on néglige la quatrième puissance et les puissances plus hautes que la quatrième des côtés, on a  $\alpha - \alpha' \approx \frac{e}{3}$ ,  $\beta - \beta' \approx \frac{e}{3}$ ,  $\gamma - \gamma' \approx \frac{e}{3}$ .

Ici,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  signifient les angles d'un triangle sphérique, mesurés en radians, les côtés du triangle sphérique sont  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et son aire est  $t$ , lequel, si nous prenons le rayon de la sphère (dans le cas de la terre le rayon du globe), comme l'unité, est égal à l'excès sphérique  $e$  du triangle sphérique, tandis que  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  signifient les angles du triangle plan dessiné avec les côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $t$  signifie l'aire de ce triangle. Il faut établir la grandeur que le côté le plus grand du triangle ne doit pas dépasser pour assurer que la faute donnée par l'approximation de Legendre reste au-dessous de la faute de la mesure annulaire  $\varepsilon$ . Pour ce but il fallait trouver le maximum de l'expression

$$H = \left| \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{180} \right| t'$$

avec les inégalités  $a \leq d$ ;  $b \leq d$ ;  $c \leq d$ ; comme conditions subsidiaires. La fonction  $a(\varepsilon)$  obtenue comme résultat est représentée sur papier logarithmique par la ligne droite supérieure de la fig. 2. Par exemple si la mesure des angles est d'une exactitude de  $0,1''$ , l'application du théorème de Legendre sur les longueurs de côté ne dépassant pas  $7^\circ$  (780 km) donnera une déviation plus petite que la faute de la mesure des angles.

# TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEGYENLETEK visszavezetése parciális differenciálegyenletek megoldására és alkalmazása a nomográfiában.

ACZÉL JÁNOS

## ÖSSZEFOGLALÁS

E dolgozat néhány függvényegyenlet [(1), (2), (3)] differenciálegyenletekre való visszavezetéssel történő megoldásának tárgyalását adja. Ennek alkalmazásaként kapjuk azon differenciál-egyenletfeltételek különböző alakjait [(10), (9), (20), (24), (26), (27), (16)] amelyek a három egyenes skálás pontsoros nomogrammal ábrázolható függvényeket jellemzik.

1. A jelen cikkben több többváltozós függvényegyenletnek parciális differenciálegyenletekre való visszavezetésére és ennek nomográfiai alkalmazására vonatkozó kutatást szeretnék összefoglalóan ismertetni.

Ez a dolgozat egy régebbi dolgozatban\* felvetett gondolatok folytatásának tekinthető, azonban attól függetlenül is megérthető. E kötetben való közzétételét a 11–14. pontokban található nomográfiai vonatkozású részek indokolják. Előadási módszeréről azt bocsátom előre, hogy igyekeztem mindig azt az utat megmutatni, ahogy az előadottakra rá lehetett jönni.

A következő függvényegyenletekkel fogunk foglalkozni\*\*:

- |     |   |                   |
|-----|---|-------------------|
| (1) | $z[z(x, y), z(u, v)] = z[z(x, u), z(y, v)]$ | (biszimmetria)    |
| (2) | $z[z(x, y), u] = z[x, z(y, u)]$             | (asszociativitás) |
| (3) | $z[z(x, y), u] = z(x, y + u)$               | (tranzláció).     |

A megoldások, ahogy az elemi megoldási módszerek megadják és ahogy itt is a továbbiakban látni fogjuk, sorra:

- |     |  |                 |
|-----|--|-----------------|
| (4) | $z(x, y) = F^{-1} [aF(x) + bF(y) + c]$ | (kvázilineáris) |
| (5) | $z(x, y) = F^{-1} [F(x) + F(y)]$       | (kváziaddíció)  |

\* Többváltozós függvényegyenletek I. Elemi megoldási módszerek többváltozós függvényegyenletekre, *Matematikai Lapok*. 2 (1951) 99–117, (a továbbiakban I).

\*\* Ezeknek elemi megoldási módszereivel foglalkozik az I. dolgozat. Itt az egységes tárgyalás kedvéért valamelyest megváltoztattam az I.-ben használt jelöléseket.



$$(6) \quad z(x, y) = F^{-1} [F(x) + y] \quad (\text{kvázieltolás})$$

ahol  $F(t)$  tetszőleges függvény, melynek  $F^{-1}(\tau)$  az inverze.

A függvényegyenletek elemi megoldási módszereinek elméletében a nehézség az, hogy minden egyes függvényegyenlet megoldásához új módszert kell találni. Ezek a módszerek bizonyos mértékig többé-kevésbé hasonlítanak ugyan egymáshoz, de arról szó sem lehet, hogy egy megoldási módszert egyformán minden külön megdondolás nélkül, mechanikusan tudjunk alkalmazni több függvényegyenletre, amint azt például differenciálegyenletek integrálási módszereinél megszoktuk.

Másrészt a megoldás nehéz voltával szoros összefüggésben az eredmények is gyakran csak elvi jelentőségűek. Például ismeretes, hogy »annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a  $z(x, y)$  függvényhez létezzék olyan folytonos, szigorúan monoton  $F(t)$  függvény, mellyel  $z(x, y) = F^{-1} [F(x) + F(y)]$ , az, hogy  $z(x, y)$  folytonos, növekvő és asszociatív legyen, mely utóbbi azt jelenti, hogy eleget tesz a (2) függvényegyenletnek«. Mármost, ha adva van konkrét  $z$  függvény pl.

$$z = \frac{x + y}{1 - xy},$$

arról megállapíthatjuk, hogy (2)-nek eleget tesz — ez se megy mindig könnyen, itt se. Azonban az  $F(t)$  függvényről, mely az összeadásba transzformálja át  $z(x, y)$ -t, még csak azt tudjuk, hogy »létezik«, de hogy hogyan kell kiszámítani, azt már nem. Van ugyan egy szukszesszív konstrukció  $F^{-1}(\tau)$  ra, ebből azonban gyakran, — így a mi esetünkben is — nem lehet felismerni  $F^{-1}(\tau)$  és vele  $F(t)$  képletét.

Később, a 14. pontban látni fogjuk, ez az  $F(t)$  a fenti  $z(x, y)$  függvény esetében elemi képlettel felírható függvény.

Differenciálegyenletek megoldására — mint tudjuk — sokkal több és kényelmesebb módszer áll rendelkezésünkre, mint függvényegyenleteknél, és ezért jelentős, ha függvényegyenleteket differenciálegyenletekké tudunk átalakítani.

Egy speciális esetben *Fejér Lipót* és *Turán Pál* vetették fel azt a kérdést, hogyan lehetne a (4) függvénytípust függvényegyenlet helyett differenciálegyenlettel jellemezni. — *Fenyő Istvánnal* igyekeztünk e problémát megoldani, és pedig a fenti okokból annak hozzátevésével, hogy egyrészt olyan parciális-differenciálegyenlet feltételt kerestünk, amely az (1) függvényegyenletre illető speciális esetével ekvivalens, — mert ezáltal módszert kaphattunk ezen függvényegyenlet differenciálegyenletekre való visszavezetés útján történő megoldására, — másrészt egyúttal azt is kerestük, hogyan lehet a megfelelő képletben szereplő  $F(t)$  függvényt  $z$ -ből, ill. parciális deriváltjaiból meghatározni.

Az addigi irodalomban egyetlen\* hasonló tartalmú munkát találtunk csak

\* Eltekintünk itt *Veress Pál*: A középérték fogalmáról, *Matematikai és Fizikai Lapok* 44 (1936), 46—60. o. (l. 59. o.) c. cikkének egy mondatából kiolvasható, középértékek kváziaritmetikus voltaához szükséges, de nem elégséges differenciálegyenlet-feltételtől, tekintve, hogy a feltételt se ki nem mondta, se be nem bizonyította és így  $F(x)$ -re adott előállításának indokolása is hiányos.

(utólag): *N. H. Abel* 1826-ban\* úgy bizonyította be, hogy a  $z(x, y)$  függvény (5) alakban írható voltának szükséges és elégséges feltételei a (2) függvényegyenlet és a kommutativitás  $[z(x, y) = z(y, x)]$  teljesülése, — hogy visszavezette őket a

$$\frac{z_x(x, y)}{z_y(x, y)} = \frac{f(x)}{f(y)}$$

differenciálegyenletre. — Mivel *Abel* eszerint egy függvényegyenletpárból vezetett le egy — különben a függvényegyenletpárral nem ekvivalens — differenciálegyenletet, nekünk pedig egyetlen függvényegyenletből kellett differenciálegyenletet levezetni, így az ő gondolatait alig tudtuk felhasználni.

*Fenyő István*nal együtt akkor az (1), (4) egyenlet azon speciális esetét intéztük el, amikor  $z(x, y)$  középérték  $[z(t, t) = t]$ . Ebben a cikkben viszont mindjárt általánosan fogom tárgyalni az (1), (4) egyenletet, majd a (2), (5) és a (3), (6) egyenletet is\*\*.

2. Vizsgáljuk először azt, hogy milyen parciális differenciálegyenletnek tesz eleget a (4)  $z(x, y) = F^{-1} [aF(x) + bF(y) + c]$  függvény? Itt  $F$ -ről és  $z$ -ről nyilván nemcsak folytonosságot, de többszörös (parciális) deriválhatóságot is tételezünk fel — mindig annyszorosat, ahányszorosra szükségünk van — viszont  $z$  növekedése helyett csak szigorú monotonitását követeljük meg itt, úgyhogy valamelyik változóban fogyó is lehet, ha ennek a többi feltétel nem mond ellent; így (4)-ben  $a$  vagy  $b$  negatív szám is lehet.

Deriváljuk az  $F(z) = aF(x) + bF(y) + c$  egyenletet egyrészt  $x$ , másrészt  $y$  szerint parciálisan és osszuk el a kapott két egyenletet\*\*\*:

$$\frac{z_1(x, y)}{z_2(x, y)} = \frac{a F'(x)}{b F'(y)},$$

vagy az

$$F'(t) = f(t), \quad F(t) = \int f(t) dt$$

\* *N. H. Abel*: Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Grössen  $x$  und  $y$ , wie  $f(x, y)$ , welche die Eigenschaft haben, dass  $f[z, f(x, y)]$  eine symmetrische Function von  $x, y$  und  $z$  ist. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1 (1826), 11—15 o. l.-ben mi is az (5) alakra először az asszociativitást és kommutativitást találtuk feltételekként és csak azután mutattuk meg, hogy a kommutativitás feltevése felesleges. *Abel* egyébként nem az asszociativitás és kommutativitás egyenletpárját, hanem egy vele ekvivalens függvényegyenletpárt használ feltételül.

\*\* *Lásd J. Aczél—St. Fenyő*: Über die Theorie der Mittelwerte, *Acta scientiarum mathematicarum* 11 (1948) 239—245. o. és *J. Aczél*: Einige aus Funktionalgleichungen zweier Veränderlichen ableitbare Differentialgleichungen, *Acta scientiarum mathematicarum* 13 (1950).

\*\*\* Mivel a  $z$  függvényben nemcsak  $x, y$  szerepelhetnek változók gyanánt, a parciális deriváltakat következetesen úgy jelöljük, hogy az  $_1$  index az első változó szerinti deriválást jelent, a  $_2$  a második változó szerinti: pl.  $z_2 = z_2(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $z_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,

$$z_1[z(x, y), u] = \frac{\partial}{\partial z(x, y)} z[z(x, y), u], \text{ stb.}$$

jelöléssel :

$$(7) \quad \frac{z_1(x,y)}{z_2(x,y)} = \frac{af(x)}{bf(y)}.$$

Ebbe az  $x = y = t$  értéket helyettesítve látjuk, hogy

$$(8) \quad \frac{z_1(t,t)}{z_2(t,t)} = \frac{a}{b} = \text{konstans.}$$

(7)-ben még benne van a kereset  $f(t) = F(t)$  függvény. Ezt továbbra is annak felhasználásával igyekezünk kiküszöbölni, hogy pl.  $x$  szerinti deriválásnál egy csak  $y$ -től függő függvénynek deriváltja 0 lesz.

Ezért vegyük (7) logaritmusát és deriváljuk pl.  $x$  szerint :

$$\frac{z_{11}(x,y)}{z_1(x,y)} - \frac{z_{12}(x,y)}{z_2(x,y)} = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

vagy a

$$N(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}, \quad f(x) = e^{-\int N(x) dx}$$

jelöléssel :

$$(9) \quad \frac{z_{12}(x,y)}{z_2(x,y)} - \frac{z_{11}(x,y)}{z_1(x,y)} = X(x).$$

Ha ezt még  $y$  szerint deriváljuk, olyan differenciálegyenlet-feltételt kapunk, amelyben  $z$ -n kívül más függvény nem szerepel :

$$\frac{z_2 z_{122} - z_{22} z_{12}}{z_2^2} - \frac{z_1 z_{112} - z_{12} z_{11}}{z_1^2} = 0,$$

vagyis

$$(10) \quad \begin{aligned} & z_1(x,y)^2 [z_{12}(x,y) z_{22}(x,y) - z_{122}(x,y) z_2(x,y)] = \\ & = z_2(x,y)^2 [z_{11}(x,y) z_{12}(x,y) - z_1(x,y) z_{112}(x,y)]. \end{aligned}$$

3. Tehát a (10) differenciálegyenlet az, amire az (1) függvényegyenletet remélhetjük visszavezetni.

Az (1) függvényegyenletből úgy vezethetjük le a (10) differenciálegyenletet, hogy (1)-et addig és úgy próbáljuk a különböző változók szerint differenciálni, hogy végül a (10) differenciálegyenlethez jussunk.

A következő út célszerű : az

$$(1) \quad z[z(x,y), z(u,v)] = z[z(x,u), z(y,v)]$$

függvényegyenletet egyrészt  $x$ , másrészt  $u$  szerint deriváljuk :

$$(11) \quad \begin{aligned} & z_1[z(x,y), z(u,v)] z_1(x,y) = z_1[z(x,u), z(y,v)] z_1(x,u), \\ & z_2[z(x,y), z(u,v)] z_1(u,v) = z_1[z(x,u), z(y,v)] z_2(x,u), \end{aligned}$$



majd a két egyenletet elosztva :

$$\frac{z_1(x,u)}{z_2(x,u)} = \frac{z_1[z(x,y), z(u,v)]}{z_2[z(x,y), z(u,v)]} \cdot \frac{z_1(x,y)}{z_2(u,v)}$$

bennük  $u = x$ ,  $v = y$  helyettesítéssel :

$$\frac{z_1(x,x)}{z_2(x,x)} = \frac{z_1[z(x,y), z(x,y)]}{z_2[z(x,y), z(x,y)]},$$

ez azt mondja ki, hogy  $\frac{z_1(x,x)}{z_2(x,x)}$  értéke nem változik, ha benne  $x$ -et  $z$ -vel cseréljük fel. De (8) szerint annak is ki kellene jönnie, hogy akkor sem szabad változnia, ha bármilyen más értéket helyettesítünk  $x$  helyébe. Ezt  $z(x, y)$  behelyettesíthetősége még nem biztosítja, mert lehet, hogy  $z(x, y)$  nem vesz fel minden értéket, amit  $x$  felvehet. Ha azonban az előbbi egyenlethez még hozzávesszük az (1)-ből  $u$ , ill.  $v$  szerinti deriválással hasonlóan kapott

$$(12) \quad \frac{z_1[z(x,y), z(x,y)]}{z_2[z(x,y), z(x,y)]} = \frac{z_1(y,y)}{z_2(y,y)}$$

egyenletet, akkor már látjuk, hogy bármely  $x$  és  $y$ -ra

$$\frac{z_1(x,x)}{z_2(x,x)} = \frac{z_1(y,y)}{z_2(y,y)},$$

tehát  $\frac{z_1(t,t)}{z_2(t,t)}$  konstans és ez (8). Ahhoz, hogy (9)-et is levezessük, deriváljuk tovább (11)-et egyrészt  $y$ , másrészt  $v$  szerint és osszuk el a kapott egyenleteket :

$$\frac{z_{11}[z(x,y), z(u,v)]}{z_{12}[z(x,y), z(u,v)]} \cdot \frac{z_2(x,y)}{z_2(u,v)} + \frac{z_1[z(x,y), z(u,v)]}{z_{12}[z(x,y), z(u,v)]} = \frac{z_1(y,v)}{z_2(y,v)}.$$

Ha itt megint  $u = x$ ,  $v = y$ , a jobboldalon  $\frac{z_1(y,y)}{z_2(y,y)}$  fog állani, ami (12) szerint egyenlő  $\frac{z_1[z(x,y), z(x,y)]}{z_2[z(x,y), z(x,y)]}$ -vel. Az így kapott egyenlethől kifejezhetjük

$$\frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y), z_2(x,y)}-t :$$

$$(13) \quad \frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y), z_2(x,y)} = \frac{z_{12}[z(x,y), z(x,y)]}{z_2[z(x,y), z(x,y)]} - \frac{z_{11}[z(x,y), z(x,y)]}{z_1[z(x,y), z(x,y)]},$$

ami azt mondja ki, hogy  $\frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y) z_2(x,y)}$  csak  $z(x,y)$ -től függ, azaz egyváltozós függvénye  $z$ -nek. Mármost felhasználhatjuk azt az egyszerű tényt, hogy ha egy  $\Phi(x, y)$  kétváltozós függvény értéke csak  $z(x, y)$ -től függ, akkor

$$\begin{vmatrix} \Phi_1(x,y) & \Phi_2(x,y) \\ z_1(x,y) & z_2(x,y) \end{vmatrix} = \Phi_1(x,y) z_2(x,y) - \Phi_2(x,y) z_1(x,y) = 0,$$

nálunk

$$\Phi(x,y) = \frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y) z_2(x,y)},$$

tehát kell, hogy

$$z_2(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{z_{12}(x, y)}{z_1(x, y) z_2(x, y)} \right] = z_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{z_{12}(x, y)}{z_1(x, y) z_2(x, y)} \right]$$

legyen, azaz :

$$z_1^2 (z_{12} z_{12} - z_{22} z_2) = z_2^2 (z_{11} z_{12} - z_1 z_{112})$$

és ez éppen (10).

Tehát az (1) függvényegyenletből valóban következik a (10) differenciálegyenlet.

Mint láttuk, az volt segítségünkre, hogy a (10) differenciálegyenletben is szereplő  $x$  és  $y$  változókon kívül az (1) függvényegyenletben még az  $u$  és  $v$  változók is szerepeltek, hiszen egy függvényegyenletben természeténél fogva rendszerint több változó szerepel, mint ahány változós a függvény. Így  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$  szerint elég sokszor megfelelően deriválva, végül is kettőt közülük tetszésünk szerint, célunkra legmegfelelőbbben választhattunk meg.

4. Ezzel az (1) függvényegyenlet megoldását sikerült visszavezetni a (10) differenciálegyenlet megoldására. Következő feladatunk a (10) differenciálegyenlet megoldása. Az várható, hogy általános megoldásul a (4) függvényt kapjuk és hogy ezt a 2. pontban követett okoskodásnak visszafelé való elvégzésével nyerjük, mert hisz ott éppen (1)-ből vezettük le (10)-et. Próbáljuk ezt meg :

$$(10) \quad z_1^2 (z_{12} z_{22} - z_{122} z_2) = z_2^2 (z_{11} z_{12} - z_1 z_{112})$$

-ből  $z_1^2 z_2^2$ -tel osztva lesz :

$$(14) \quad \left( \frac{z_{122}}{z_2} - \frac{z_{12} z_{22}}{z_2^2} \right) - \left( \frac{z_{112}}{z_1} - \frac{z_{11} z_{12}}{z_1^2} \right) = 0,$$

vagyis

$$0 = \left[ \frac{1}{z_2} \frac{\partial}{\partial y} z_{12} + z_{12} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{z_2} \right) \right] - \left[ \frac{1}{z_1} \frac{\partial}{\partial y} z_{11} + z_{11} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{z_1} \right) \right]$$

és  $y$  szerint integrálva :

$$(9) \quad X(x) = \frac{z_{12}(x, y)}{z_2(x, y)} - \frac{z_{11}(x, y)}{z_1(x, y)} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\log \frac{z_1(x, y)}{z_2(x, y)} \right].$$

Ha ezt most  $x$  szerint integráljuk, az

$$\log \frac{z_1}{z_2} = - \int X(x) dx + \psi(y)$$

összefüggést kapjuk, ahonnan az

$$\int e^{-\psi(y)} = g(y)$$

és

$$(15) \quad e^{-\int X(x) dx} = f(x)$$

jelöléssel :

$$(16) \quad \frac{z_1(x,y)}{z_2(x,y)} = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

(16)-ot ilyen alakba írhatjuk :

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(y) \\ z_1(x,y) & z_2(x,y) \end{vmatrix} = f(x) z_2(x,y) - g(y) z_1(x,y) = 0,$$

Ez az előbb megismert

$$\begin{vmatrix} \Phi_1(x,y) & \Phi_2(x,y) \\ z_1(x,y) & z_2(x,y) \end{vmatrix} = \Phi_1 z_2 - \Phi_2 z_1 = 0$$

egyenlet (l. a 3. pontban) speciális esete :

$$\Phi(x,y) = \int f(x) dx + \int g(y) dy$$

$$\Phi_1(x,y) = f(x), \quad \Phi_2(x,y) = g(y)$$

Tehát a

$$(17) \quad F(x) = \int f(x) dx = \int e^{-\int x(x) dx} dx = \int e^{\int \left( \frac{z_{12}(x,y)}{z_2(x,y)} - \frac{z_{11}(x,y)}{z_1(x,y)} \right) dx} dx$$

[(9) és (15) miatt] és

$$(18) \quad G(y) = \int g(y) dy$$

jelöléssel :

$$(19) \quad H[z(x,y)] = F(x) + G(y), \quad z(x,y) = H^{-1}[F(x) + G(y)]$$

adódik a (10) differenciálegyenlet általános megoldásának, mert könnyen látható — lényegében a 2. pontbeli eljárás megismétlésével — hogy a (19) függvény tényleg eleget is tesz a (10) differenciálegyenletnek.

Ez nem az, amit vártunk. A (10) differenciálegyenlet általános megoldása nem (4), hanem (19) alakú, benne nem egy, hanem három tetszőleges függvény szerepel.

Viszont kaptuk azt, hogy *azok és csakis azok a függvények írhatók a  $z(x,y) = H^{-1}[F(x) + G(y)]$  alakban, amelyek eleget tesznek a (10) differenciálegyenletnek.*

A (19)-ben szereplő  $F(x)$  függvény kifejezése a  $z(x,y)$  függvényből is lehetővé vált :

$$(17) \quad F(x) = \int e^{-\int \left( \frac{z_{12}(x,y)}{z_2(x,y)} - \frac{z_{11}(x,y)}{z_1(x,y)} \right) dx} dx.$$

Mint láttuk, a (10) differenciálegyenlet teljesen ekvivalens a (9) differenciálegyenlettel, vagyis avval, hogy

$$\frac{z_{12}(x,y)}{z_2(x,y)} - \frac{z_{11}(x,y)}{z_1(x,y)}$$

nem függ  $y$ -től, ami azt jelenti, hogy csak látszólag függ  $y$ -től, valójában egyedül  $x$ -nek függvénye. Így a (17) utolsó alakjának kitevőjében szereplő  $x$ -szerinti



integrálás egyváltozós integrál. Tehát tételünket úgy is kimondhatjuk, hogy  $z(x, y)$  akkor és csak akkor írható a (19) alakban, ha

$$\frac{z_{12}(x, y)}{z_2(x, y)} - \frac{z_{11}(x, y)}{z_1(x, y)}$$

csak  $x$ -től függ és akkor  $F(x)$  értékét (17) adja.

Hasonlóan

$$(20) \quad \frac{z_{12}(x, y)}{z_1(x, y)} - \frac{z_{22}(x, y)}{z_2(x, y)} = Y(y)$$

és

$$(21) \quad G(y) = \int e^{-\int Y(y) dy} dy = \int e^{-\int \left( \frac{z_{12}(x, y)}{z_1(x, y)} - \frac{z_{22}(x, y)}{z_2(x, y)} \right) dy} dy$$

(17)-ből és (21)-ből látszik, hogy mind  $F(x)$ -ben, mind  $G(y)$ -ban szerepel két tetszőleges — egy multiplikatív és egy additív — konstans: a két integrációs konstans.

Másrészt a (16) egyenlet, mely szintén ekvivalens (10)-zel, azt jelenti, hogy a  $\frac{z_1(x, y)}{z_2(x, y)}$  függvény szétválasztható  $x$  egy függvényének  $y$  egy függvényével való szorzatává, vagy, ami egyre megy, hányadosává. Az ilyen függvényeket szétválasztható függvényeknek nevezik. (16), (17), (18)-ből:

$$(22) \quad F(x) = \int f(x) dx = C \int \frac{z_1(x, c)}{z_2(x, c)} dx,$$

$$(23) \quad G(y) = \int g(y) dy = K \int \frac{z_2(k, y)}{z_1(k, y)} dy,$$

tehát tételünk úgy is kimondható, hogy  $z$  akkor és csak akkor (19) alakú, ha  $\frac{z_1(x, y)}{z_2(x, y)}$  szétválasztható függvény és akkor  $F(x)$ -et és  $G(y)$ -t (22) és (23) adja meg.

Végül (10) így is írható:

$$z_1 \frac{z_1 z_2 z_{122} - z_{12}(z_{12} z_2 + z_1 z_{22})}{z_1^2 z^2} - z_2 \frac{z_1 z_2 z_{112} - z_{12}(z_{11} z_2 + z_1 z_{12})}{z_1^2 z_2^2} = 0,$$

ami a

$$\Phi(x, y) = \frac{z_{12}(x, y)}{z_1(x, y) z_2(x, y)}$$

jelöléssel megint csak a

$$\begin{vmatrix} z_1(x, y) & z_2(x, y) \\ \Phi_1(x, y) & \Phi_2(x, y) \end{vmatrix} = 0$$

egyenletet adja, tehát (10) azzal is ekvivalens, hogy

$$\frac{z_{12}(x, y)}{z_1(x, y) z_2(x, y)}$$

egyváltozós függvénye  $z(x, y)$ -nak :

$$(24) \quad \frac{z_{12}(x, y)}{z_1(x, y) z_2(x, y)} = Z(z)$$

Ebből egyszerűen következik :

$$(25) \quad h(z) = e^{-\int Z(z) dz}$$

jelöléssel :

$$(26) \quad z_1(x, y) = \frac{f(x)}{h[z(x, y)]},$$

$$(27) \quad z_2(x, y) = \frac{g(y)}{h[z(x, y)]},$$

ezek tehát szintén ekvivalensek (10)-zel.

$H(z) = F(x) + G(y)$ -ban (24) és (25) miatt

$$(28) \quad H(z) = \int h(z) dz = \int e^{-\int Z(z) dz} dz = \int e^{-\int \frac{z_{12}(x, y)}{z_1(x, y) z_2(x, y)} dz} dz.$$

Így tételünk azzal is ekvivalens, hogy  $z(x, y)$  akkor és csak akkor (19) alakú, ha (24); ill. (26) vagy (27) teljesül és akkor (28) adja meg  $H(z)$ -t.

Összefoglalva :

$$z = H^{-1}[F(x) + G(y)],$$

akkor és csak akkor, ha (10), (9), (20), (24), (26), (27), (16) közül valamelyik teljesül és akkor  $F(x)$ -et (17) vagy (22),  $G(y)$ -t (21) vagy (23),  $H(z)$ -t (28) adja meg.

5. A (4) alakú függvények jellemzéséhez tehát (10)-en kívül még további feltételekre van szükség. Ha összevetjük a következő két képletet egymással :

$$(19) \quad H[z(x, y)] = F(x) + G(y),$$

$$(4) \quad H[z(x, y)] = aH(x) + bH(y) + c,$$

akkor látjuk, hogy azt kell  $z(x, y)$ -ra vonatkozó feltétel alakjában önteni, hogy

$$F(t) = a H(t) + c_1 \quad \text{és} \quad G(t) = b H(t) + c_2 \quad (c_1 + c_2 = c).$$

Ezek az egyenletek így alakíthatók át :

$$F'(t) = aH'(t), \quad f(t) = ah(t),$$

$$G'(t) = bH'(t), \quad g(t) = bh(t),$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{h'(t)}{h(t)}, \quad Z(t) = X(t),$$

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{h'(t)}{h(t)}, \quad Z(t) = Y(t),$$

ami  $t$  helyébe  $z$ -t írva (9), (20) és (24) értelmében így írható :

$$(13) \quad \frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y) z_2(x,y)} = \frac{z_{12}(z,z)}{z_2(z,z)} - \frac{z_{11}(z,z)}{z_1(z,z)},$$

$$(29) \quad \frac{z_{12}(x,y)}{z_1(x,y) z_2(x,y)} = \frac{z_{12}(z,z)}{z_1(z,z)} - \frac{z_{12}(z,z)}{z_1(z,z)}.$$

Az ilyen feltételeket, melyek összefüggést adnak  $z$ , ill. deriváltjainak speciális értékekre felvett értékei között, tágabb értelemben vett kezdeti feltételeknek nevezzük. (Ha önállóan szerepelnek, mint olyan egyenletek, melyekből  $z(x, y)$  meghatározandó, funkcionál-differenciálegyenlet a nevük.)

Igy azt kaptuk, hogy  $z$  akkor és csakis akkor (4) alakú, ha eleget tesz a (10) differenciálegyenletnek (vagy a vele ekvivalens valamelyik egyenletnek) és a (13), (29) tágabb értelemben vett kezdeti feltételeknek, vagy másképp a (10) differenciálegyenlet általános megoldása a (13), (29) (tágabb értelemben vett) kezdeti feltételek mellett a (4) függvény.

Mivel azonban (13)-ból (és ugyanúgy (29)-ből) következett (10) a 3. pontban, tehát elég azt mondanunk, hogy (4)-nek szükséges és elégséges feltétele (13) és (29) teljesülése.

Tekintve, hogy egyrészt (4) kielégíti az (1) függvényegyenletet, másrészt (1)-ből a 3. pontban nemcsak (10) következett, hanem (13) — és ugyanúgy (29) — is, tehát differenciálegyenletre való visszavezetéssel is megkaptuk, hogy (1) általános megoldása a (4) függvény.

6. Amikor az eddig részletezett úton eljutunk odáig, hogy (10) mellé (1)-ből levezetett megszorító feltételeket keresünk, alighanem előbb akadunk rá a

$$(8) \quad \frac{z_1(t,t)}{z_2(t,t)} = \text{konstans}$$

feltételre (hisz ez előbb következik (1)-ből), mintsem (13)-ra vagy (29)-re. Az ilyen egyenleteket, melyek egy  $z$ -ből, ill. deriváltjaiból összetett kifejezés értékét adják meg az  $XY$ -sík valamely görbéjén — jelen esetben a koordinátatengelyekhez  $45^\circ$ -os szög alatt hajló  $y = x$  egyenesen — (szűkebb értelemben vett) kezdeti feltételeknek nevezzük.

Nézzük meg, nem elég-e már (8) feltevése a (10) differenciálegyenlet mellé ahhoz, hogy a (4) alakot kapjuk általános megoldásnak? Ha a (8)-ban szereplő konstansnak  $\frac{a}{b}$ -t vesszük és visszaemlékezünk a

$$(16) \quad \frac{z_1(x,y)}{z_2(x,y)} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

egyenletre, amely (10)-zel ekvivalens volt, látjuk, hogy (8) azt mondja, hogy

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{a}{b}, \quad g(t) = \frac{b}{a} f(t),$$

és így

$$(30) \quad H(z) = a F(x) + b F(y), \quad z(x,y) = H^{-1}[a F(x) + b F(y)].$$



Mivel ez a függvény (10)-et és (8)-at is kielégíti, ezért a (30) függvény a (10) differenciálegyenlet általános megoldása a (8) kezdeti feltétellel — és nem a (4) függvény. Mivel (7)-ből következik (8) is és (10) is, azt is kimondhatjuk, hogy annak, hogy  $z$  (30) alakú legyen, szükséges és elégséges feltétele (7) fennállása. — Másrészt (13) és (8) együtt nyilván elég ahhoz, hogy a (4) függvényeket jellemezze.

Különben (30) is figyelemreméltó függvény. Képezzük ugyanis a (30) függvény átlagát (ahogyan azt I.-ben több ízben tettük):

$$a F(m) + b F(m) = a F(x) + b F(y), \quad m(x, y) = F^{-1} \left[ \frac{a}{a+b} F(x) + \frac{b}{a+b} F(y) \right].$$

Mivel  $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$ , ezért  $m$  éppen az (I.-ben megismert) ú. n. kvázilineáris közép. Így a (30) függvénytípusnak — és, mint könnyű látni, csak ennek — van meg az a tulajdonsága, hogy belőle átlagolással kvázilineáris közepeket kapunk.

Van azonban eset, amikor elég a (8)-as feltétel (10) mellé a kvázilinearitás biztosítására: amikor közepekről van szó, vagyis (8)-hoz hozzájön az ú. n. reflexivitásnak (szűkebb értelemben vett) kezdeti feltétele:

$$(31) \quad z(t, t) = t,$$

mely  $z$  értékét adja meg az  $y = x$  egyenesen. Ha ugyanis a (8), (10) egyenletpár megoldását, a (30) függvényt, ebbe a (31)-be helyettesítjük,

$$H(t) = (a+b)F(t) + c$$

-t kapunk, amit (30)-ba visszahelyettesítve

$$(a+b)F(z) + c = aF(x) + bF(y) + c,$$

vagyis

$$\frac{a}{a+b} = p, \quad \frac{b}{a+b} = q$$

jelöléssel ( $p+q=1$ ):

$$(32) \quad F(z) = pF(x) + qF(y), \quad F(z) = F^{-1}[pF(x) + qF(y)].$$

Az ilyen alakú  $z(x, y)$  függvényeket neveztük kvázilineáris közepeknek.

Így (32)-höz szükséges és elégséges (10), (8) és (31) teljesülése, vagy, ami ugyanaz, (7) és (31) teljesülése.

Hamar rá lehet jönni, hogy ebben az esetben, tekintve, hogy (31) is fennáll, (8) helyettesíthető az egyszerűbb

$$(33) \quad z_1(t, t) = \text{konstans}$$

kezdeti feltétellel, mert ha  $z_1(t, t) = p$ , akkor (31)-et deriválva

$$z_1(t, t) + z_2(t, t) = 1, \quad z_2(t, t) = 1 - p = q = \text{konstans},$$

$$\frac{z_1(t, t)}{z_2(t, t)} = \frac{p}{q} = \text{konstans}$$

és ez éppen (8); ugyanígy (8)-ból és (31)-ből is következik (33).

Így a (10) differenciálegyenlet a (31) és (33) kezdeti feltételekkel szükséges és elégséges ahhoz, hogy  $z$  kvázilineáris közép legyen.

Egyúttal így differenciálegyenletre való visszavezetés útján azt találtuk, hogy a (31) reflexivitás és az (1) biszimmetria szükséges és elégséges ahhoz, hogy  $z$  kvázilineáris közép legyen.

Ha a (33)-ban szereplő konstans épp  $\frac{1}{2}$ , vagy a (8)-beli éppen 1:

$$(33') \quad z_1(t, t) = \frac{1}{2}, \quad (8') \quad z_1(t, t) = z_2(t, t),$$

akkor  $p = q = \frac{1}{2}$  és a (32) függvény így specializálódik:

$$(32') \quad 2F(z) = F(x) + F(y), \quad z = F^{-1} \left( \frac{F(x) + F(y)}{2} \right);$$

ezeket a függvényeket nevezzük *kváziaritmetikus közepeknek*.

(33') ill. (8') helyett követelhetjük a szimetriát is:

$$(34) \quad z(x, y) = z(y, x),$$

mert hisz ebből (8') nyilván következik és másrészt (32') szimmetrikus.

Tehát látjuk, hogy (10) a (31) kezdeti feltétellel és a (33'), (8'), (34), kezdeti feltételek bármelyikével együtt éppen a kváziaritmetikus közepeket és csak azokat adja: egyúttal differenciálegyenletek segítségével új bizonyítását kaptuk annak, hogy  $z(x, y)$  akkor és csak akkor kváziaritmetikus közép, ha biszimmetrikus, [(1)] reflexív [(31)] és szimmetrikus [(34)].

Szükséges és elégséges feltételnek különben ezúttal is vehető

$$\frac{z_1(x, y)}{z_2(x, y)} = \frac{f(x)}{f(y)}$$

és (31), mert belőlük (10) is, (8') is következik.

7. Egészen hasonlóan történhetik meg a (2) asszociativitás- és a (3) tranzitív-függvényegyenlet megoldása is differenciálegyenletre való visszavezetéssel. Hogy milyen differenciálegyenletet fogunk tudni ezekből levezetni, azt megint sejtethetjük előre, mert hisz az I.-ben felsorolt (már I.-ben megismert) (5), (6) megoldások mind (19) alakúak megfelelő specializálással és így (2)-nek (5) megoldása is, (3)-nak (6) megoldása is ki kell hogy elégítse a (10) differenciálegyenletet. Tehát azt várjuk, hogy (10)-et, vagy valamelyik vele ekvivalens egyenletet lehet majd a függvényegyenletekből levezetni, valamint oly kiegészítő feltételeket, melyek az (5) és (6) függvényalakok specializálódottságát (19)-hez képest előidézik.

Először

$$(2) \quad z[z(x, y), u] = z[x, z(y, u)]$$

-ből akarunk differenciálegyenletet kapni. Deriváljuk ehhez (2)-t az  $y$ , ill.  $x$  szerint:

$$z_1[z(x, y), u] z_2(x, y) = z_2[x, z(y, u)] z_1(y, u), \\ z_1[z(x, y), u] z_1(x, y) = z_1[x, z(y, u)],$$

és osszuk el a két egyenletet :

$$\frac{z_2[x, z(y, u)]}{z_1[x, z(y, u)]} \cdot z_1(y, u) = \frac{z_2(x, y)}{z_1(x, y)},$$

vagy  $x$  helyébe a  $c$  konstans,  $y$  helyébe  $x$ -et,  $u$  helyébe  $y$ -t téve

$$(35) \quad z_1(x, y) = \frac{\frac{z_2(c, x)}{z_1(c, x)}}{\frac{z_2[c, z(x, y)]}{z_1[c, z(x, y)]}},$$

amiből a

$$\frac{z_2(c, x)}{z_1(c, x)} = f(x), \quad \frac{z_2(c, z)}{z_1(c, z)} = f(z)$$

jelöléssel a

$$z_1 = \frac{f(x)}{f(z)}$$

egyenletet kapjuk. Ez

$$(26) \quad z_1 = \frac{f(x)}{h(z)}$$

alakú és így, mint a 4. pontban láttuk, ekvivalens (10)-zel.

Mivel pedig (35)-ből most

$$f(t) = h(t)$$

következett, így (35) mindjárt megadja (10)-hez az első megszorító (tágabb értelemben vett) kezdeti feltételt. A másik hasonlóan :

$$(36) \quad z_2(x, y) = \frac{\frac{z_1(y, k)}{z_2(y, k)}}{\frac{z_1[z(x, y), k]}{z_2[z(x, y), k]}},$$

azaz

$$(27) \quad z_2(x, y) = \frac{g(y)}{h(z)},$$

ahol

$$f(t) = g(t) = h(t).$$

Így a (10) differenciálegyenlet a (35) és (36) tágabb értelemben vett kezdeti feltételekkel szükséges és elégséges (5) fennállásához. Mert hiszen  $f(t) = g(t) = h(t)$ -ből

$$F(t) = H(t) + c_1$$

$$G(t) = H(t) + c_2,$$



így ha

$$H(z) = H(x) + H(y) + c_1 + c_2,$$

vagy

$$H(t) = F^*(t) - c_1 - c_2$$

úgy

$$F^*(z) = F^*(x) + F^*(y)$$

vagyis éppen (5).

Ha azt akarjuk, hogy legalább az egyik feltétel szűkebb értelemben vett kezdeti feltétel legyen, akkor (10) mellé (35)-öt és

$$(8') \quad z_1(t, t) = z_2(t, t)$$

vehető fel (5) jellemzésére.

(35) vagy (36)-ból (10) következik, ezért szükséges és elégséges feltételnek (5) fennállásához elég (36) és (8'), vagy ami ugyanaz,

$$z_1(x, y) = \frac{f(x)}{f(z)}$$

és (8') vagy

$$z_1(x, y) = \frac{f(x)}{f(z)} \quad \text{és} \quad z_2(x, y) = \frac{f(y)}{f(z)}$$

fennállását megkövetelnünk.

Mivel mindezen feltételek következnek (2)-ből és (5) kielégíti (2)-t, tehát differenciálegyenletre való visszavezetéssel bebizonyítottuk, hogy a (2) függvényegyenlet általános megoldása az (5) függvény.

8. Végül a

$$(3) \quad z[z(x, y), u] = z(x, y + u)$$

függvényegyenletből  $x$ , ill.  $y$  szerinti deriválás és osztás után  $u = c - y$ -t téve :

$$\frac{z_1(x, y)}{z_2(x, y)} = \frac{z_1(x, c)}{z_2(x, c)},$$

vagyis

$$(37) \quad \frac{z_1(x, y)}{z_2(x, y)} = f(x).$$

Ezt  $y$  szerint deriválva már differenciálegyenletet kapunk :

$$(38) \quad z_1 z_{22} = z_{12} z_2.$$

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet : (38)-ból  $z_2^2$ -tel való osztással és  $y$  szerinti integrálással lesz

$$(37) \quad \frac{z_1}{z_2} = f(x),$$

azaz

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = z_2 f(x) - z_1 = 0,$$

ahol

$$\Phi(x, y) = \int f(x) dx + y,$$

tehát

$$(39) \quad H[z(x, y)] = F(x) + y, \quad z(x, y) = H^{-1}[F(x) + y].$$

Ez (38) általános megoldása!

Ahhoz, hogy ebből a (6) függvényalakot kapjuk,  $H(t) = F(t)$ -re kell feltételt levezetnünk (3)-ból. (3)-ban tegyük  $y = 0$ -t, az így kapott

$$z[z(x, 0), u] = z(x, u)$$

egyenletből  $z$  szigorú monotonitása miatt

$$(40) \quad z(x, 0) = x.$$

Ez szűkebb értelemben vett kezdeti feltétel, mert  $z(x, y)$  értékét megadja az  $y = 0$  egyenesen. Ezt (39)-be téve ( $y = 0, z(x, 0) = x$ -el), tényleg megkapjuk  $H(t) = F(t)$ -t és így azt, hogy  $z(6)$  alakú.

(6)-nak szükséges és elégséges feltétele a (40) kezdeti feltétel mellett a (38) differenciálegyenlet — vagy a vele ekvivalens (37) egyenlet — teljesülése. Mivel pedig ezek következnek a (3) függvényegyenletből, melyet (6) kielégít, differenciálegyenletre visszavezetéssel való bizonyítást kaptuk annak, hogy a (3) függvényegyenlet általános megoldása (6) alakú.

9. Megjegyzem még azt a gyakorlatilag fontos tényt, hogy mivel a (4), (5), (6), (30) függvényalakok annyiban speciális esetei (19)-nek, hogy az  $F(t)$ ,  $G(t)$ ,  $H(t)$  függvényekből kettő vagy három megegyezik, ezért itt ezekben az esetekben többféle módon is előállíthatjuk a bennük szereplő függvényeket. Így (6)-ban

$$F(t) = \begin{cases} \int f(t) dt = C \int \frac{z_1(x, c)}{z_2(x, c)} dx = \int e^{-\int x(t) dt} dt = \int e^{-\int \left( \frac{z_{12}}{z_2} - \frac{z_{11}}{z_1} \right) dx} dt \\ \int h(t) dt = \int e^{-\int z(t) dt} dt = \int e^{-\int \frac{z_{12}}{z_1 z_2} dz} dt. \end{cases}$$

(30)-ban

$$F(t) = \begin{cases} \int f(t) dt = C \int \frac{z_1(x, c)}{z_2(x, c)} dx = \int e^{-\int x(t) dt} dt = \int e^{-\int \left( \frac{z_{12}}{z_2} - \frac{z_{11}}{z_1} \right) dx} dt \\ \int g(t) dt = K \int \frac{z_2(k, y)}{z_1(k, y)} dy = \int e^{-\int y(t) dt} dt = \int e^{-\int \left( \frac{z_{12}}{z_1} - \frac{z_{22}}{z_2} \right) dy} dt \\ H(t) = \int h(t) dt = \int e^{-\int z(t) dt} dt = \int e^{-\int \frac{z_{12}}{z_1 z_2} dz} dt \end{cases}$$

(4)-ben és (5)-ben :

$$F(t) = \begin{cases} = \int f(t) dt = C \int \frac{z_1(z, c)}{z_2(z, c)} dx = \int e^{-\int X(t) dt} dt = \int e^{-\int \left( \frac{z_{12}}{z_2} - \frac{z_{11}}{z_1} \right) dx} dt \\ = \int g(t) dt = K \int \frac{z_2(k, y)}{z_1(k, y)} dy = \int e^{-\int Y(t) dt} dt = \int e^{-\int \left( \frac{z_{12}}{z_1} - \frac{z_{22}}{z_2} \right) dy} dt \\ = \int h(t) dt = \int e^{-\int Z(t) dt} dt = \int e^{-\int \frac{z_{12}}{z_1 z_2} dz} dt \end{cases}$$

(a ki nem írt alsó határok mindenütt tetszőleges konstansok). E képletek közül azt használhatjuk  $F(t)$  kiszámítására, amelyik nekünk legkényelmesebb.

10. Észrevehetjük, hogy jelentős minőségi különbség van szűkebb értelemben vett kezdeti feltételek között, melyek (6) és (30) jellemzésénél szerepeltek, és a (4)-et és (5)-öt jellemző tágabb értelemben vett kezdeti feltételek között. Ez nemcsak abban mutatkozik meg, hogy a tágabb értelemben vett kezdeti feltételek bonyolultabbak, összetett függvényeket tartalmaznak, hanem abban is, hogy egyenesen következményként tartalmazzák a függvény-egyenletből levezethető differenciálegyenletet, ellentétben a szűkebb értelemben vett kezdeti feltételekkel, amelyek valóban csak megszorítást jelentenek a differenciálegyenletekhez, de nem teszik azokat fölöslegessé.

Ezért merül fel az a probléma, hogy a (4)-et és (5)-öt is jellemezni kellene a (10) differenciálegyenlethez csatolt, szűkebb értelemben vett kezdeti feltételekkel.

Érdekes, hogy ezt bizonyos speciális eseteknél meg lehet tenni. Mint láttuk, ilyen volt (4)-nél a (32) és a (32') speciális eset. A (2) függvényegyenlet esetében pedig, ha létezik egységelem, azaz olyan  $e$  szám, hogy  $z(x, e) = x$ , akkor ezt a valódi (szűkebb értelemben vett) kezdeti feltételt használhatjuk (35) helyett. Feladat lenne az általános esetben is a valódi kezdeti feltételekkel való jellemzést megcsinálni.

További problémák : (30) jellemezhető volt egyedül a

$$(7) \quad \frac{z_1(x, y)}{z_2(x, y)} = \frac{a f(x)}{b f(y)};$$

(5a)

$$z_1(x, y) = \frac{f(x)}{f(z)} \quad \text{és} \quad z_2(x, y) = \frac{f(y)}{f(z)}$$

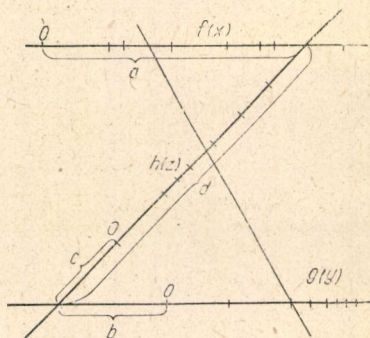
specializált differenciálegyenletekkel. Nem lehetne hasonlóan csinálni (4)-gyel és (6)-tal is? Másrészt a (30) és a (19) alakú függvényeket nem tudtuk függvényegyenlettel jellemezni. Talán ez is menne általánosabb szerkezetű függvényegyenletekkel.

11. A megoldásfüggvények között, mint láttuk, éppen egyedül a központi jelentőségű (19) függvénynek, mely a (10) differenciálegyenletnek és a vele ekvivalens egyenleteknek általános megoldása, nem volt semmilyen

gyakorlati értelmezése vagy felhasználása. Erre a nomográfiában van lehetőség.\*

Itt most kétváltozós függvények nomogrammjaira szorítkozunk, bár az itt elmondandó gondolatok felhasználhatók többváltozós függvények esetében is.

12. Azt keressük, melyek azok a függvények, melyek három egyenesskalás (pontosor) nomogrammal ábrázolhatók. Tekintve, hogy nyilván a pontosor nomogramm érvényes marad projektív leképezés után, projektív leképezéssel pedig a három skálaegyenes közül kettőnek, pl. az  $x$ - és  $y$ -skálának metszéspontja mindig kivihető a végtelenbe, azaz ezek párhuzamossá tehetők, — ezért lényegében kétféle egyenes (pontosor) nomogramm van; az egyiknél két párhuzamos egyenes skálát metsz egy harmadik egyenes skála (1. ábra), a másiknál mindhárom skála párhuzamos (2. ábra). Mint az 1. és 2. ábrán



1. ábra

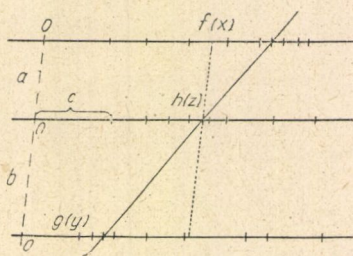
$$\frac{a - f(x)}{g(y) + b} = \frac{d - h(z) - c}{h(z) + c}$$

$$F(x) = \log [a - f(x)]$$

$$G(y) = -\log [g(y) + b]$$

$$H(z) = \log \left[ \frac{d}{h(z) + c} - 1 \right]$$

$$F(x) + G(y) = H(z)$$



2. ábra

$$\frac{f(x) - h(z) - c}{a} = \frac{h(z) - g(y) + c}{b}$$

$$F(x) = b \cdot f(x)$$

$$G(y) = a \cdot g(y)$$

$$H(z) = (a + b) \cdot h(z) + (a + b) \cdot c$$

$$F(x) + G(y) = H(z)$$

látjuk, mindkét fajta nomogramm olyan  $z(x, y)$  függvényt ábrázol, melyhez van olyan  $F(x)$ ,  $G(y)$ ,  $G(z)$  függvényhármass, hogy

$$H(z) = F(x) + G(y) \quad **.$$

\* A következőkre nézve lásd Hajós György: A munka- és időelemzés matematikai segédeszközei, Budapest, 1948. e. könyvét.

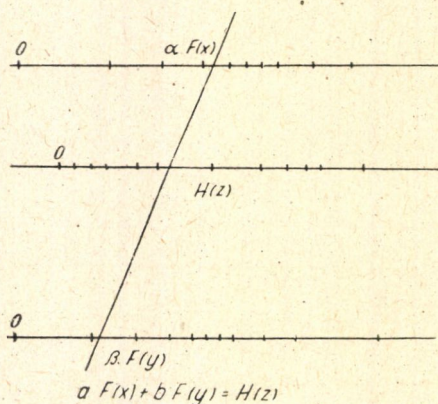
\*\* Lásd pl. M. d'Ocagne: Traité de Nomographie, Paris 1921, Ch. IV. 67. §, 71. §, 74. §, 57. §. — A fentebb elmondottakból következik, hogy a legáltalánosabb egyenes pontosor nomogrammal ábrázolható függvények ábrázolhatók párhuzamos nomogrammal is. Különb az, hogy az egyenes nomogrammok mind párhuzamos nomogramokkal helyettesíthetők, nem jelenti azt, hogy a gyakorlatban nem fordulnak elő metsző egyenesű nomogrammok. Ugyanis a skálák párhuzamossá tételét gyakran a skálák túlbonyolódásával kellene megfizetni és így az eredeti nomogramm könnyebben rajzolható és kezelhető.



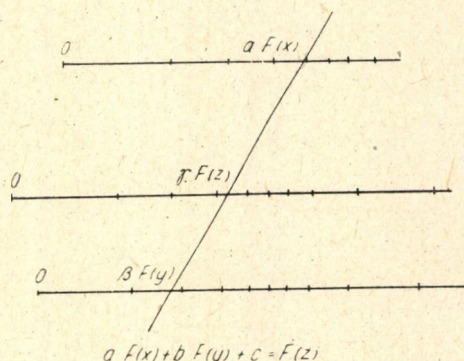
Ez éppen (19) és így látjuk, hogy a (10) differenciálegyenlet általános megoldását éppen azok a függvények adják, amelyek egyenes nomogrammal ábrázolhatók, vagyis annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy kétváltozós függvényt egyenes nomogrammal lehessen ábrázolni, az, hogy eleget tegyen a (10) differenciálegyenletnek vagy valamelyik vele ekvivalens egyenletnek. A párhuzamos skálákon fellépő skálabeosztást megadó  $F(x)$ ,  $G(y)$ ,  $H(z)$  függvényeket pedig a (17), (22), (21), (23), (28) képletek határozzák meg  $z(x, y)$ -ből. \*

13. A (30), (4), (32), (32'), (5), (6) függvényalakoknak is megvan az interpretációjuk a nomografikus ábrázolásnál. Így

a (30) alakú függvények párhuzamos nomogrammján az  $x$ - és  $y$ -skála beosztása egymáshoz hasonló (3. ábra);



3. ábra



4. ábra

a (4) alakú függvényekén mindhárom skála beosztása hasonló egymáshoz (4. ábra);

a (32) alakú függvényekén a három skála egyvonalban kezdődik és egybevágó (5. ábra);

a (32') alakúakén ezenfelül még a  $z$ -skála pontosan középen van az  $x$ - és az  $y$ -skála között (6. ábra);

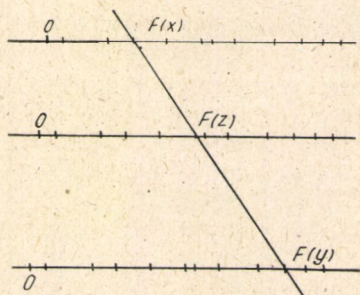
az (5) alakúakén a skálák egyvonalban kezdődnek, az  $x$ - és  $y$ -skála egybevágó, a köztük éppen középen fekvő  $z$ -skála hasonló, fele léptékkel (7. ábra);

a (6) alakú függvények párhuzamos nomogrammján végül, egyvonalban kezdődő skálák vannak, az  $y$ -skála beosztása lineáris (ekvidisztrans), a  $z$ -skála pedig pontosan középen van és beosztása hasonló az  $x$ -skáláéhoz fele léptékkel (8. ábra).

Így azok a feltételek, melyeket az 5., 6., 7., 8. pontokban arra kaptunk, hogy mikor írható egy függvény a (30), ill. (4), ill. (32), ill. (32'), ill. (5), ill. (6) alakokba, egyúttal annak szükséges és elégséges feltételeit is megadják, hogy mikor ábrázolható az illető függvény a fenti szerkezetű nomogramokkal.

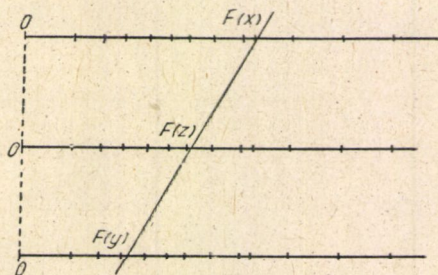
\* Lásd J. Aczél: Zur Charakterisierung nomographisch einfach darstellbarer Funktionen durch Differential- und Funktionalgleichungen, *Acta scientiarum mathematicarum*, 12A (1950), 73–80. o.





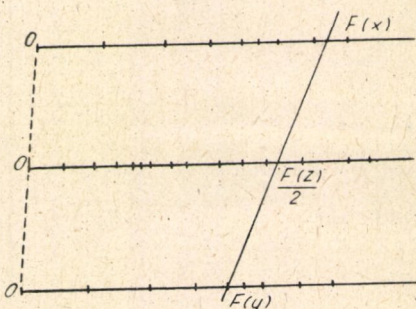
$$(1-q)F(x) + qF(y) = F(z)$$

5. ábra



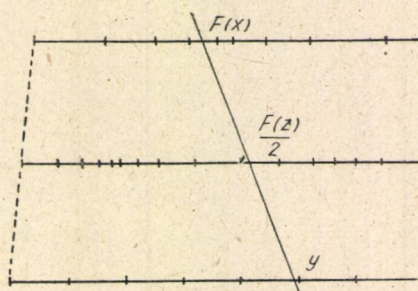
$$\frac{F(x) + F(y)}{2} = F(z)$$

6. ábra



$$F(x) + F(y) = F(z)$$

7. ábra



$$F(x) + y = F(z)$$

8. ábra

A 9. pont képletei pedig a skálafüggvényeket adják meg.

14. Hogy lássuk mint működnek módszereink a gyakorlatban, megnézzük az elmondottak alkalmazását néhány példán.

a) A  $z = \frac{x\sqrt{y^2-1} + \sqrt{1-x^2}}{y}$  függvény beletartozik-e az elmondott

típusok valamelyikébe, és ha igen, milyen nomogrammal ábrázolhatók? Mint a továbbiakban is látni fogjuk, általában a (16) egyenlet fennállása próbálható ki legkönnyebben.

$$z_1 = \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{y^2-1} - x}{y\sqrt{1-x^2}}, \quad z_2 = \frac{x - \sqrt{1-x^2}\sqrt{y^2-1}}{y^2\sqrt{y^2-1}},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{y\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}},$$

ez  $x$ -nek és  $y$ -nak tényleg szétválasztható függvénye, tehát függvényünket feltétlenül a (19) alakban lehet írni. Mivel pedig sem a (7), sem a (37) speciális egyenleteknek nem tesz eleget, tehát nem tartozik az ennél speciálisabb függvénytípusok egyikébe sem. Ábrázolható egyenes nomogrammal és így párhuzamos nomogrammal is.

A skálát is meghatározó  $F(x)$ ,  $G(y)$ ,  $H(z)$  függvényekből  $F(x)$ -et és  $G(y)$ -t a (22) és (23) képletek adják meg:

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

$$G(y) = \int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} = \arcsin \frac{1}{y}.$$

$H(z)$  meghatározásához előbb  $h(z)$ -t kell ismernünk. (26)-ból

$$h(z) = \frac{f(x)}{z_1} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{y^2-1-x}};$$

erről még nem látjuk, hogy csak  $z$ -nek függvénye, még kevésbé, hogy milyen függvénye  $z$ -nek. Hogy ezt megállapítsuk, számítsuk ki az eredeti függvényből  $y$ -t, mint  $x$  és  $z$  függvényét és helyettesítsük be a  $h(z)$ -re imént kapott képletbe. Ki kell jönnie, hogy  $h(z)$  nem függ  $x$ -től, csak  $z$ -től, és akkor azt is meglátjuk, hogy milyen függvénye  $z$ -nek.

$$zy = x\sqrt{y^2-1} + \sqrt{1-x^2}, \quad y = \frac{z\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-z^2}}{z^2-x^2},$$

$$h(z) = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{y^2-1-x}} = \frac{z\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-z^2}}{z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2} + x(1-z^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

$$H(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z.$$

És tényleg:  $z = \frac{x\sqrt{y^2-1} + \sqrt{1-x^2}}{y} = \sin\left(\arcsin x + \arcsin \frac{1}{y}\right).$

A függvény párhuzamos nomogrammján az  $x$ -skála  $\arcsin x$ -skála, az  $y$ -skála  $\arcsin \frac{1}{y}$ -skála, a  $z$ -egyenes pontosan a középen van a kettő között  $\frac{1}{2} \arcsin z$ -skála van rajta. A skálák egyvonalban kezdődnek.

b)  $z = e^{xy^2}$ . Most

$$z_1 = e^{xy^2} \cdot y^2, \quad z_2 = 2xye^{xy^2}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{y^2}{2xy} = \frac{1}{2} \frac{x}{\frac{1}{y}}.$$

Ez éppen (7) alakú, tehát függvényünk legalábbis a (30) típusoz tartozik.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}, \quad F(t) = \int \frac{dt}{t} = \log t, \quad h(z) = \frac{f(x)}{z_1} = \frac{1}{e^{xy^2} xy^2} = \frac{1}{z \log z},$$

$$H(z) = \int \frac{dz}{z \log z} = \log \log z, \quad z = e^{xy^2} = e^{e^{\log x + 2 \log y}}$$

tényleg (30) alakú, de speciálisabb típusokba nem tartozik.

Párhuzamos nomogrammában a skálák egyvonalban kezdődnek, az  $x$ - és  $y$ -skála logaritmikus, a  $z$ -egyenes kétszer olyan közel van  $y$ -hoz, mint  $x$ -hez és  $\log \log z$ -skála van rajta.

$$c) \quad z = x \sqrt[3]{\log y / \log x} \quad z = e \sqrt[3]{\log^2 x / \log y}$$

$$z_1 = e \sqrt[3]{\log^2 x / \log y} \cdot \frac{2 \log x \cdot \log y}{3x \cdot \sqrt[3]{\log^2 x \log y^2}}$$

$$z_2 = e \sqrt[3]{\log^2 x / \log y} \cdot \frac{\log^2 x}{3y \cdot \sqrt[3]{\log^2 x \log y^2}},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 \frac{1}{(x \log x)}}{1/(y \log y)},$$

másrészt  $z(t, t) = t$ , tehát a függvény (32) alakú lesz, biszimmetrikus közép:

$$F(t) = \int \frac{dt}{t \log t} = \log \log t, \quad z = x \sqrt[3]{\log y / \log x} = e^{e^{\frac{2}{3} \log \log x + \frac{1}{3} \log \log y}}$$

Nomogrammja három párhuzamos, egyvonalban kezdődő  $\log \log$ -skála, a középső  $z$ -skála kétszer olyan közel van  $x$ -hez, mint  $y$ -hoz.

$$d) \quad z = x + y - xy, \quad z_1 = 1 - y, \quad z_2 = 1 - x; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-y}},$$

$$\text{ez (7)-alakú; } \frac{a}{b} = 1, \quad F(t) = \int \frac{dt}{1-t} = -\log(1-t),$$

$$h(z) = \frac{f(x)}{z_1} = \frac{1}{(1-x)(1-y)} = \frac{1}{1-z}, \quad H(z) = \log(1-z),$$

$$z = 1 - e^{\log(1-x) + \log(1-y)},$$

tehát az (5) típusoz tartozik, asszociatív függvény; nomogrammja három egyvonalban kezdődő párhuzamos ekvidisztans  $\log(1-t)$ -skála, a középső felényi léptekkel.



$$e) \quad z = \frac{x+y}{1-xy} \quad (\text{v. ö. 1. pont}), \quad z_1 = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}, \quad z_2 = \frac{1+x^2}{(1-xy)^2},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+x^2}{1+y^2},$$

$$\text{ez (7) alakú, } \frac{a}{b} = 1, \quad F(t) = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctg t, \quad h(z) = \frac{f(x)}{z_1} = \frac{1}{1+x^2} \frac{(1-xy)^2}{1+y^2}$$

$$\text{és mivel} \quad x = \frac{z-y}{1+y^2}, \quad h(t) = \frac{1+y^2}{(1+yz) + (z-y)^2} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$H(z) = \arctg z, \quad z = \tg [\arctg x + \arctg y].$$

$z$  az (5) típushoz tartozik, asszociatív. Nomogrammja három egyvonalban induló ekvidisztans  $\arctg$ -skála, a középső felényi léptékkel.

$$f) \quad z = \frac{x}{1+xy}; \quad z_1 = \frac{1}{(1+xy)^2}, \quad z_2 = -\frac{x^2}{(1+xy)^2}, \quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{x^2},$$

ez (37) alakú és  $z(x, 0) = x$ . (40) is fennállván,  $z$ -t a (6) alakban lehet írni és így kielégíti a (3) tranzláció-egyenletet.

$$F(t) = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t}, \quad z = \frac{x}{1+xy} = \frac{1}{\frac{1}{x} + y}.$$

Nomogrammja három egyvonalban kezdődő ekvidisztans egyenes-skála, az  $y$ -egyenesen lineáris, az  $x$ -egyenesen reciprok, a  $z$ -egyenesen felényi léptékű reciprok skálával.

15. E cikkben megismertünk egy módszert, mely lényegesen megkönnyítette a függvényegyenletek megoldását, ha nem is tudta teljesen kiküszöbölni a próbálgatás szükségét és azt, hogy minden egyes függvényegyenlet megoldása új gondolatot igényel. Módszerünk lehetővé tette, hogy meghatározhassuk a függvényegyenletek megoldásfüggvényében és több más fontos függvénytípusban előforduló függvényeket, eldönthessük, hogy egy adott függvény beletartozik-e a függvénytípusok valamelyikébe, valamint, hogy ábrázolható-e egyenes nomogrammal és ha igen, milyennel.

Érdemes összefoglalásul még egyszer áttekinteni e függvényegyenletek történetének főbb fázisait: A gyakorlati életben, elsősorban a matematikai statisztikában szerepet játszó középértékekből matematikai absztrahálással keletkezett a középértékek axiomatikus elmélete, majd ennek analógiájára lehetővé vált néhány fontos — szintén axiomatikai jelentőségű — függvényegyenlet megoldása. Erre vonatkozóan több elvi jelentőségű tételt ad a függvényegyenletek elemi megoldási módszereinek elmélete. Azoknak a nehézségeknek enyhítésére, melyek a tételeknek megadott, konkrét függvényekre, tehát a matematikai gyakorlatra való alkalmazásánál felmerültek, továbbfejlesztettük az elméletet, összefüggést teremtettünk a parciális differenciálegyenletek elméletével és ennek váratlan eredményeképpen eredményeink

alkalmazhatók lettek egy másik, a gyakorlati életben fontos szerepet játszó alkalmazott matematikai diszciplinára, a nomográfiára.

Kicsinyben azt figyelhettük itt meg, ami a matematika történetében állandóan megismétlődő szokásos jelenség; a gyakorlati élet által felvett problémák megoldása céljából kifejlődött matematikai elméletek sorozatos absztrakció útján továbbfejlődnek, — erre a fejlődésre kedvezően hat a matematika más ágaival való kapcsolat megteremtődése és a matematikán belüli gyakorlat szükségleteinek szem előtt tartása — és azután ezt a kiszélesedett elméletet sikerrel lehet alkalmazni most már a gyakorlati élet által felvett problémák sokkal szélesebb körében is.

## О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ II.

ЯНОШ АЦЕЛЬ

### Резюме

Работа содержит решение функциональных уравнений (1), (2) и (3) путем их сведения на дифференциальные уравнения. В качестве применения получают различные формы дифференциальных уравнений, характеризующих функции, изображимые с номограммо из выравненных точек с тремя прямолинейными шкалами — (1), (9), (20), (24), (26), (27), (16).

## SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES À PLUSIEURS VARIABLES II.

J. ACZÉL

### RÉSUMÉ

Ce travail donne la discussion de la solution de quelques équations fonctionnelles [(1), (2), (3)] par réduction à des équations différentielles. Comme application de ce procédé, on obtient les différentes formes [(10), (9), (20), (24), (26), (27), (16)] des conditions d'équations différentielles qui caractérisent les fonctions capables d'être représentées par un nomogramme à trois échelles linéaires.



## A BISZIMMETRIA FÜGGVÉNYEGYENLETÉHEZ

HOSSZÚ MIKLÓS (Miskolc)

### ÖSSZEFOGLALÁS

Aczél János vetette fel azt a problémát, hogy milyen függvényegyenlet jellemzi az

$$M(x, y) = H[X(x) + Y(y)]$$

illetve az

$$m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c]$$

alakú függvényeket. E függvénytípusok érdekességét az adja, hogy három egyenes tartójú pontsoros nomogrammal ábrázolhatók, illetve függvényátlaguk kvázilineáris közép, vagyis a lineáris középbe (súlyozott számtani középbe) transzformálható. Az 1. §, ill. 2. § ezen problémák megoldását adja, amennyiben az 1. §-ban be van bizonyítva, hogy differenciálhatósági és szigorú monotonitási feltételek mellett

$$M[m(x, u), n(y, v)] = N[m(x, v), n(y, u)]$$

függvényegyenlet jellemzi az

$$M(x, y) = N(x, y) = H[X(x) + Y(y)]$$

$$m(x, y) = X^{-1}[f(x) + h(y)]$$

$$n(x, y) = Y^{-1}[g(x) + h(y)]$$

alakú függvényeket; a 2. § annak bizonyítását adja, hogy az

$$M[m(x, u), m(y, v)] = N[m(x, y), m(u, v)]$$

függvényegyenlet folytonos és szigorúan monoton megoldásai az

$$M(x, y) = N(x, y) = G[a h(x) + b h(y) + c]$$

$$m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c], \quad g(t) = h^{-1}(t)$$

alakú függvények és csak az ilyenek.

A jelen dolgozat célja, hogy két, az alkalmazásokban fontos kétváltozós függvényosztályt függvényegyenletekkel jellemezzen.

Az egyik a gyakorlatban legtöbbször előforduló három egyenes tartójú nomogrammal ábrázolható függvények osztálya, a másik azon függvényeké,



melyekből átlagképzéssel  $[F(z, z) = F(x, y)]$  ú. n. kvázilineáris közepeket, vagyis

$$z = f^{-1}[p f(x) + q f(y)], (p + q = 1)$$

alakú függvényeket kapunk.

Aczél János bizonyította be [1] azt, hogy folytonossági és szigorú monotonitási feltételek mellett egy  $m(x, y)$  kétváltozós függvény kvázilinearitásához (tehát, hogy  $m(x, y)$  felírható legyen

$$m(x, y) = f^{-1}[a f(x) + b f(y) + c]$$

alakban, ahol  $f^{-1}(t)$  az  $f(t)$  szigorúan monoton és folytonos függvény inverze, és  $a, b, c$  állandók) szükséges és elégséges az, hogy  $m(x, y)$  biszimmetrikus legyen, azaz

$$m[m(x, u), m(y, v)] = m[m(x, y), m(u, v)].$$

Ő vetette fel azt a problémát, hogy milyen függvényegyenlettel lehetne jellemezni azokat a függvényeket, melyek pontsoros nomogramma egyenesekből áll, vagy ami ezzel ekvivalens, a

$$z = H[X(x) + Y(y)]$$

alakú függvényeket [2].

Az 1. §-ban bebizonyítjuk, hogy a biszimmetria általánosításának tekinthető

$$M[m(x, u), n(y, v)] = N[m(x, v), n(y, u)]$$

függvényegyenletnek az  $M, N, m, n$ -ről tett szigorú monotonitási és differenciálhatósági feltételek mellett az

$$\begin{aligned} M(x, y) &= N(x, y) = H[X(x) + Y(y)] \\ m(x, y) &= X^{-1}[f(x) + h(y)] \\ n(x, y) &= Y^{-1}[g(x) + h(y)] \end{aligned}$$

függvények, és csak ilyenek tesznek eleget.

A 2. §-ban az ugyanott [2] felvetett másik problémával foglalkozunk, amennyiben a biszimmetria másik általánosításának tekinthető

$$M[m(x, u), m(y, v)] = N[m(x, y), m(u, v)]$$

függvényegyenletről bebizonyítjuk folytonossági és szigorú monotonitási feltételek mellett azt, hogy jellemzi azokat az  $M, N, m$  függvényeket, amelyekből átlagképzéssel kvázilineáris közép nyerhető [2].

## 1. §.

Foglalkozunk az

$$M[m(x, u), n(y, v)] = N[m(x, v), n(y, u)]$$

függvényegyenlettel, ahol az  $M, N, m, n$  kétváltozós függvényekről szigorú monotonitást és egyszeri differenciálhatóságot tételezünk fel.

Az  $u = v$  helyettesítéssel látjuk, hogy  $M \equiv N$ . Így

$$(I) \quad M[m(x, u), n(y, v)] = M[m(x, v), n(y, u)].$$

Ezt differenciálva parciálisan  $u$  szerint :

$$M_1[m(x, u), n(y, v)] m_2(x, u) = M_2[m(x, v), n(y, u)] n_2(y, u),$$

ahol az  $_1$  index az első, a  $_2$  index a második változó szerinti parciális deriváltat jelzi.

$u_0 = u = v$  helyettesítéssel és az

$$\begin{aligned} m(x, u_0) &= \varphi(x), \quad m_2(x, u_0) = \Phi(x) \\ n(y, u_0) &= \psi(y), \quad n_2(y, u_0) = \Psi(y) \end{aligned}$$

jelölések bevezetésével :

$$\frac{M_1[\varphi(x), \psi(y)]}{M_2[\varphi(x), \psi(x)]} = \frac{\Psi(y)}{\Phi(x)}.$$

Új  $x, y$  változókkal :

$$\frac{M_1(x, y)}{M_2(x, y)} = \frac{\Psi[\psi^{-1}(y)]}{\Phi[\varphi^{-1}(x)]}.$$

Az  $\frac{1}{\Phi[\varphi^{-1}(x)]} = X'(x)$ ,  $\frac{1}{\Psi[\psi^{-1}(y)]} = Y'(y)$  jelöléssel :

$$\frac{M_1(x, y)}{M_2(x, y)} = \frac{X'(x)}{Y'(y)}.$$

Más alakban :

$$\left| \begin{array}{cc} M_1(x, y) & M_2(x, y) \\ X'(x) & Y'(y) \end{array} \right| = 0,$$

mely függvénydeterminánsa lévén az  $M(x, y)$ ,  $X(x) + Y(y)$  függvényeknek, azt jelzi, hogy e függvények egymástól nem függetlenek, tehát

$$M(x, y) = H[X(x) + Y(y)]$$

Helyettesítsük ezt (I)-be :

$$H\{X[m(x, u)] + Y[n(y, v)]\} = H\{X[m(x, v)] + Y[n(y, u)]\},$$

vagyis

$$X[m(x, u)] + Y[n(y, v)] = X[m(x, v)] + Y[n(y, u)],$$

mert hiszen  $H$  szigorúan monoton  $M$  monotonitása miatt.

Átrendezve és  $\left. \begin{array}{l} v = v_0 \\ y = y_0 \end{array} \right\}$ -t rögzítve :

tehát

$$\begin{aligned} X[m(x, u)] &= X[m(x, v_0)] + Y[n(y_0, u)] - Y[n(y_0, v_0)], \\ X[m(x, u)] &= f(x) + h(u). \end{aligned}$$

Hasonlóan,  $\left. \begin{matrix} v = v_0 \\ x = x_0 \end{matrix} \right\}$  rögzítéssel:

$$Y[n(y, u)] = g(y) + k(u).$$

Összevetve azt nyertük, hogy (I)-et csak az

$$\begin{aligned} M(x, y) &= H[X(x) + Y(y)] \\ m(x, y) &= X^{-1}[f(x) + h(y)] \\ n(x, y) &= Y^{-1}[g(x) + k(y)] \end{aligned}$$

alakú függvények elégíthetik ki. Ezeket (I)-be helyettesítve látjuk, hogy

$$H[f(x) + h(u) + g(y) + k(v)] = H[f(x) + h(v) + g(y) + k(u)],$$

tehát

$$h(u) - k(u) = h(v) - k(v) = c,$$

kell legyen, tehát

$$h(t) = k(t) + c.$$

-vel

$$\begin{aligned} g^*(x) &= g(x) + c \\ n(x, y) &= Y^{-1}[g^*(x) + h(y)]. \end{aligned}$$

Így  $c$  beolvasztható  $g(x)$ -be, és az általános megoldás

$$\begin{aligned} N(x, y) &= M(x, y) = H[X(x) + Y(y)] \\ m(x, y) &= X^{-1}[f(x) + h(y)] \\ n(x, y) &= Y^{-1}[g(x) + h(y)] \end{aligned}$$

és ez valóban ki is elégíti (I)-et, qu. e. d.

## 2. §.

Két  $x, y$  mennyiségnek az  $m(x, y)$  kétváltozós függvényre vonatkozó átlagának szokás nevezni azt az  $A(x, y)$  mennyiséget, melyet az

$$m(x, y) = m(A, A)$$

egyenlet definiál.

Ha

$$m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c],$$

ahol  $g, f$  szigorúan monoton és folytonos függvények, akkor  $A$  kifejezhető  $f$  segítségével :

$$\begin{aligned} g[a f(x) + b f(y) + c] &= g[a f(A) + b f(A) + c], \\ a f(x) + b f(y) + c &= (a + b) f(A) + c \\ A(x, y) &= f^{-1}[p f(x) + q f(y)], \quad (p + q = 1), \end{aligned}$$

tehát ez esetben az  $A$  függvényátlag *kvázilineáris közép*, s mint könnyű belátni, csak ez esetben, mert ha

$$m(A, A) = m(x, y)$$

ahol

$$A = f^{-1}[p f(x) + q f(y)],$$

akkor  $m(A, A) = \varphi(A)$  jelöléssel :

$$m(x, y) = \varphi(A) = \varphi\{f^{-1}[p f(x) + q f(y)]\} = g[a f(x) + b f(y) + c],$$

ahol

$$g(t) = \varphi\{f^{-1}[(a + b)t + c]\}.$$

Bebizonyítjuk, hogy az

$$M[m(x, u), m(y, v)] = N[m(x, y), m(u, v)]$$

függvényegyenlet jellemzi azokat az  $M, N, m$  függvényeket, melyekből átlagképzéssel kvázilineáris közép nyerhető. Az  $M, N, m$  függvényekről csak folytonosságot és szigorú monotonitást tételezünk fel.

Az  $y = u$  helyettesítésből  $M \equiv N$  következik.

Az

$$(II) \quad M[m(x, u), m(y, v)] = M[m(x, y), m(u, v)]$$

egyenletben helyettesítsük  $\begin{cases} x = u \\ y = v \end{cases}$ -t, és a már használt

$$m(t, t) = \varphi(t)$$

jelölés mellett vezessük be az

$$M(t, t) = \Phi(t)$$

függvényt, akkor

$$\begin{aligned} M[\varphi(x), \varphi(y)] &= M[m(x, y), m(x, y)] = \Phi[m(x, y)], \\ M(x, y) &= \Phi\{m[\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)]\}. \end{aligned}$$

Ezzel (II) így alakul :

$$\Phi(m\{\varphi^{-1}[m(x, u)], \varphi^{-1}[m(y, v)]\}) = \Phi(m\{\varphi^{-1}[m(x, y)], \varphi^{-1}[m(u, v)]\}).$$

$M$  szigorú monotonitása miatt  $\Phi$  is szigorúan monoton, tehát az egyenlet mindkét oldalát behelyettesítve a

$$\varphi^{-1}[\Phi^{-1}(t)]$$



függvénybe, az

$$n(x, y) = \varphi^{-1} [m(x, y)]$$

jelöléssel az

$$n[n(x, u), n(y, v)] = n[n(x, y), n(u, v)]$$

(biszimmetria) függvényegyenletet nyerjük, melyet (a bevezetésben idézett tétel szerint) az

$$n(x, y) = f^{-1} [a f(x) + b f(y) + c]$$

kvázilineáris függvények (és csak ezek) elégítenek ki.

Tehát

$$m(x, y) = \varphi [n(x, y)] = \varphi \{ f^{-1} [a f(x) + b f(y) + c] \},$$

továbbá

$$M(x, y) = \Phi \{ h^{-1} [a h(x) + b h(y) + c] \},$$

ahol

$$h(t) = f[\varphi^{-1}(t)].$$

Végeredményben a

$$\varphi[f^{-1}(t)] = g(t) = g(t), \Phi[h^{-1}(t)] = G(t)$$

jelöléssel:

$$m(x, y) = g[a f(x) + b f(y) + c];$$

$$N(x, y) = M(x, y) = G[a h(x) + b h(y) + c], [g(t) = h^{-1}(t)].$$

Hogy az ilyen alakú függvények kielégítik (II)-t, az behelyettesítéssel rögtön kitűnik, s ezzel a § elején tett észrevétel alapján minden bizonyítva van.

*Megjegyzés:* Ha  $m(x, y)$ -ről szimmetriát is feltételezünk [tehát, hogy  $m(x, y) = m(y, x)$ ], akkor  $a = b$ , és az átlag kváziaritmetikai közép:

$$A(x, y) = f^{-1} \left[ \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) \right].$$

A szimmetriát a (II) függvényegyenlet eltorzításával is elérhetjük, pl. az

$$M[m(x, u), m(y, v)] = M[m(x, v), m(u, y)]$$

függvényegyenlet tartalmazza  $m$  és természetesen ebből kifolyólag  $M$  szimmetriáját.

Az  $n$  függvény nemcsak biszimmetrikus, hanem reflexív is, mert

$$n(t, t) = \varphi^{-1} [m(t, t)] = \varphi^{-1} [\varphi(t)] = t;$$

ebből  $n$ -re az következik, hogy kvázilineáris közép,

$$n(x, y) = f^{-1} [p f(x) + q f(y)], (p + q = 1).$$

Еzt a bizonyítás során nem használtuk ki, mert nem volt rá szükség. Az  $m$  alakjának általánosságát ez nem csorbítja, mert az

$$m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c]$$

alakú függvények mindig felírhatók

alakban, pl.  $m(x, y) = g^*[p f(x) + q f(y)], (p + q = 1)$

$$g^*(t) = g[(a + b)t + c]\text{-vel.}$$

## IRODALOM

1. Aczél J.: On mean values, Bull. of the Amer. Math. Soc. 54 (1948) 392—400.
2. Aczél J.: Többváltozós függvényegyenletek. Visszavezetés parciális differenciálegyenletek megoldására. Alkalmazás a nomográfiában. E kötet 311—333. o.

## К ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ БИСИММЕТРИИ

М. ГОССУ

### Р е з ю м е

Я. Ацель поднял следующий вопрос: с каким функциональным уравнением характеризованы функции формы

$$M(x, y) = H[X(x) + Y(y)]$$

то есть

$$m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c]$$

Достопримечательность этих типов функций основывается на факте, что они представляемы номограммой из выравненных точек с тремя прямолинейными шкалами и, с другой стороны, их средняя функциональная — средняя квазилинейная, т. е. она преобразуема в линейную среднюю (в среднюю арифметическую с весами). § 1. соответственно § 2. дают решение этих проблем. В § 1. доказывается, что при условиях дифференцируемости и строгой монотонности, функции формы

$$M(x, y) = N(x, y) = H[X(x) + Y(y)]$$

$$m(x, y) = X^{-1}[f(x) + f(y)]$$

$$n(x, y) = Y^{-1}[g(x) + h(y)]$$

характеризованы функциональным уравнением

$$M[m(x, u), n(y, v)] = N[m(x, v), n(y, u)]$$

которое можно считать за обобщением бисимметрии; в § 2. доказывается, что непрерывным и строго монотонным решением функционального уравнения

$$M[m(x, u), m(y, v)] = N[m(x, y), m(u, v)]$$

являются функции формы

$$M(x, y) = N(x, y) = G[ah(x) + bh(y) + c]$$

$$m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c]$$

$$g(t) = h^{-1}(t)$$

и только эти.

# CONTRIBUTION À LA THEORIE DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE LA BISYMMÉTRIE

M. HOSSZU

## RÉSUMÉ

J. Aczél a posé le problème, quelle équation fonctionnelle caractérise les fonctions ayant la forme

$$M(x, y) = H[X(x) + Y(y)],$$

respectivement

$$m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c].$$

Ce qui rend ces types de fonctions intéressants, c'est qu'ils peuvent être représentés par des nomogrammes à trois échelles droites et que leur moyenne fonctionnelle est une moyenne quasi-linéaire, c'est-à-dire elle peut être transformée dans la moyenne linéaire (dans la moyenne arithmétique avec poids). Le § 1, resp. 2, donnent la solution de ces problèmes, puisque, dans le § 1, l'auteur démontre que sous les conditions de dérivabilité et de monotonie stricte, l'équation fonctionnelle

$$M[m(x, u), n(y, v)] = N[m(x, v), n(y, u)]$$

qui peut être considérée comme une généralisation de la bisymétrie, caractérise les fonctions ayant la forme

$$M(x, y) = N(x, y) = H[X(x) + Y(y)]$$

$$m(x, y) = X^{-1}[f(x) + h(y)]$$

$$n(x, y) = Y^{-1}[g(x) + h(y)].$$

Le § 2 fournit la démonstration du fait que les solutions continues et strictement monotones de l'équation fonctionnelle

$$M[m(x, u), m(y, v)] = N[m(x, y), m(u, v)]$$

sont les fonctions ayant la forme

$$M(x, y) = N(x, y) = G[ah(x) + bh(y) + c]$$

$$m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c], \quad g(t) = h^{-1}(t)$$

et seulement les fonctions de cette forme.

AZ OSZTÁLY MUNKATÁRSAINAK AZ OSZTÁLY MUNKÁJÁNAK EREDMÉNYEIT  
TARTALMAZÓ, MÁSUTT MEGJELENT DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

*Hajós György*: A nomográfia alkalmazhatóságának határaitól. MTA III. o. Közleményei I. 1. 268—274.

*Rényi Alfréd*: A Newton-féle gyökközelítő eljárásról. Matematikai Lapok, (1950) 1—16. o.

## VEGYIPARI OSZTÁLY





# A SZINGULÁRIS INTEGRÁLEGYENLETEK EGY OSZTÁLYÁRÓL

FENYŐ ISTVÁN

## ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk felhasználja A. M. Efrosz egy tételét bizonyos integrálatalakítások Laplace-transzformáltjairól Efrosz tétele által jellemzett magokkal rendelkező szinguláris első és másodfajú integrálegyenletek megoldására. Az eljárást két, a matematikai fizikában fellépő integrálegyenletre mutatja be a dolgozat.

A. M. Efrosz 1942-ben bebizonyította a következő tételt: ([1], [2])  $\varphi(t)$  és  $k(t, \tau)$  valós változós függvények a  $0 \leq t, \tau < \infty$  számközben legyenek értelmezve és legyenek olyanok, hogy mindkettő Laplace-transzformáltja létezzék (valamely komplex  $p$ -től jobbra eső félsíkban, a transzformációt a  $t$  változó szerint képezve). Legyen

$$L\{\varphi\} = \Phi(p); \quad L\{k(t, \tau)\} = K(p, \tau) = F(p) e^{-\tau \xi(p)},$$

ahol  $F(p)$  és  $\xi(p)$  nem függenek  $\tau$ -tól. Akkor

$$L\left\{\int_0^\infty k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau\right\} = F(p) \Phi[\xi(p)].$$

Ez a tétel kiválóan alkalmas arra, hogy Laplace-transzformáció segítségével bizonyos szinguláris első és másodfajú lineáris integrál- és integrodifferenciálegyenleteket megoldjunk, köztük olyanokat is, melyek gyakorlati szempontból fontosak. Tudomásunk szerint Efrosz tételét ilyen célokra még nem használták fel.

Ezzel kapcsolatban az első felmerülő kérdés az, melyek azok a magok, melyek Efrosz tételének eleget tesznek.

Két függvény  $u(t)$  és  $v(t)$  konvolúcióját jelöljük  $u*v$ -vel, vagyis

$$u*v = \int_0^t u(t-\tau) v(\tau) d\tau$$

továbbá

$$v^2 = \int_0^t v(t-\tau) v(\tau) dt; \quad v^n = \int_0^t v^{n-1}(t-\tau) v(\tau) d\tau.$$

Ezzel a jelöléssel

$$\begin{aligned} L_t \{k(t, \tau)\} &= K(p, \tau) = F(p) e^{-\tau \xi(p)} = F(p) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \tau^n \xi(p)^n = \\ &= F(p) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \tau^n L \{v(t)^n\} = L \left\{ u * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \tau^n v^n \right\}, \end{aligned}$$

ahol

$$L \{u\} = F(p); \quad L \{v\} = \xi(p).$$

Igy tehát nyerjük a  $k(t, \tau)$  mag alakjára — feltéve, hogy az előbbi sorfejtésben a szumma-jel és integrál-jel felcserélhető — a következőt:

$$k(t, \tau) = u * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \tau^n v^n.$$

A

$$\lambda(t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \tau^n v^n$$

kétváltozós mag a következő integrálegyenlet általános megoldása [3]

$$(1) \quad \int_0^t \lambda(t-s, \tau) \lambda(s, \mu) ds = \lambda(\tau + \mu, t).$$

Az ilyen  $\lambda(t, \tau)$  magok igen fontos szerepet játszanak számos integrodifferenciálegyenlet megoldásánál [4], továbbá a valószínűesszámtásban. Ennek segítségével lehet részletesebben jellemezni az Efrosz-típusú magokat, de ebbe a kérdésbe ezúttal részletesebben nem bocsátkozunk. Itt csak megjegyezzük, hogy az Efrosz-típusú magok általános alakja ilyen:

$$k(t, \tau) = u * \lambda(t, \tau),$$

ahol  $\lambda$  az (1) egyenlet egy tetszőleges megoldása,  $u$  egy akármilyen függvény.

Ha Efrosz előbb idézett tételét szinguláris első és másodfajú integrálegyenletekre alkalmazzuk, akkor ezek az integrálegyenletek közönséges függvényegyenletekbe mennek át. Néha ezek a függvényegyenletek könnyen megoldhatók.

Lássuk először az elsőfajú integrálegyenletek megoldási elvét. A szóbanforgó integrálegyenlet legyen ilyen alakú:

$$\int_0^{\infty} k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = l(t),$$

ahol  $l(t)$  adott,  $\varphi$  az ismeretlen függvény. Képezzük mindkét oldal Laplace-transzformáltját:

$$F(p) \Phi[\xi(p)] = L(p).$$

Tegyük fel, hogy  $\xi(p)$ -nek van egyértékű inverze (a transzformáció konvergenziaabszcisszájától jobbra eső félsíkban) és legyen  $\xi(p) = \eta$  inverz függvénye  $p = h(\eta)$ , akkor

$$\Phi(\eta) = \frac{L(h(\eta))}{F(h(\eta))}.$$

Ha  $\Phi(\eta)$ -ra alkalmazható a Riemann—Mellin transzformáció, akkor  $\Phi(\eta)$ -ra alkalmazott inverz Laplace-transzformált szolgáltatja az egyenlet keresett megoldását.

Hasonló elv alapján történhetik a másodfajú egyenletek megoldása is. A megoldandó egyenlet legyen

$$\varphi(t) + \lambda \int_0^{\infty} k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = l(t)$$

alakú. Ha mindkét oldal Laplace-transzformáltját képezzük, úgy a

$$\Phi(p) + \lambda F(p) \Phi(\xi(p)) = L(p)$$

függvényegyenlethez jutunk. Ha ezt sikerül  $\Phi(p)$ -re megoldani és a megoldás olyan, hogy inverz Laplace-transzformáltja létezik, akkor ez szolgáltatja az integrálegyenlet megoldását. Különösen érdekes az az eset, mikor  $\xi(p)$  olyan, hogy saját inverzével azonos, vagyis  $\xi(\xi(p)) = p$ . Ekkor ugyanis  $p$  helyébe  $\xi(p)$ -t behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\Phi(\xi(p)) + \lambda F(\xi(p)) \Phi(p) = L(\xi(p)).$$

Ebből és az előbbi egyenletből  $\Phi(\xi(p))$ -t kiküszöbölve azt kapjuk, hogy

$$\Phi(p) = \frac{L(p) - \lambda F(p) L(\xi(p))}{1 - \lambda^2 F(p) F(\xi(p))} = [L(p) - \lambda F(p) L(\xi(p))] \frac{1}{1 - \lambda^2 F(p) F(\xi(p))}.$$

Hátra van  $\Phi(p)$ -t visszatranszformálni. Az első tényező visszatranszformálása igen könnyű. Az első tényező ugyanis ennek a függvénynek a Laplace-transzformáltja:

$$l(t) - \lambda \int_0^{\infty} k(t, \tau) l(\tau) d\tau.$$

Tegyük fel, hogy a második tényezőt is sikerül visszatranszformálni és ez a visszatranszformált legyen  $s(t)$ , vagyis

$$L\{s(t)\} = \frac{1}{1 - \lambda^2 F(p) F(\xi(p))} = S(p),$$

akkor a kitűzött integrálegyenlet megoldása:

$$\varphi(t) = s(t) * l(t) - \lambda \int_0^{\infty} k(t, \tau) l(\tau) d\tau.$$



Teljesen hasonló elv alapján lehet Efrosz tételét alkalmazni integró-differenciál-egyenletek megoldására is. Ha például az egyenlet alakja ilyen

$$\varphi^{(n)}(t) + \lambda \int_0^\infty k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = l(t),$$

akkor ennek az egyenletnek Laplace-transzformáltját véve, a következő egyenletre jutunk:

$$p^n \Phi(p) - p^{n-1} \varphi(0) - p^{n-2} \varphi'(0) - \dots - \varphi^{(n-1)}(0) + \lambda F(p) \Phi(\xi(p)) = L(p).$$

Ha ebből az előbbi módon meghatározzuk  $\Phi(p)$ -t és alkalmazzuk rá az inverz Laplace-transzformációt, nyerjük a kitűzött egyenlet megoldását.

Lássunk az előbbiekre néhány példát és alkalmazást.

1. Tekintsük a

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\tau}) \varphi(\tau) d\tau = l(t)$$

integrálegyenletet, ahol  $J_0$  jelenti a 0 indexű elsőfajú Bessel-féle függvényt  $l(t)$  pedig tetszőleges adott függvény. Mivel [5]

$$L_t \{ J_0(2\sqrt{t\tau}) \} = \frac{1}{p} e^{-\frac{\tau}{p}},$$

azért  $F(p) = \frac{1}{p}$ ;  $\xi(p) = \frac{1}{p}$ . Alkalmazva az előbbieket, nyerjük a

$$\Phi(p) - \lambda \frac{1}{p} \Phi\left(\frac{1}{p}\right) = L(p)$$

függvényegyenletet. Írjunk  $p$  helyébe  $\frac{1}{p}$ -t:

$$\Phi\left(\frac{1}{p}\right) - \lambda p \Phi(p) = L\left(\frac{1}{p}\right).$$

Ebből  $\Phi\left(\frac{1}{p}\right)$ -t helyettesítsük az előbbibe, kapjuk, hogy

$$\Phi(p) = \frac{pL(p) + \lambda L\left(\frac{1}{p}\right)}{(1 - \lambda)p},$$

feltéve, hogy  $\lambda \neq 1$ . Ha történetesen például  $l(t) = \sin t$ , akkor  $L(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$  és így

$$\Phi(p) = \frac{1}{1 - \lambda} \frac{1 + \lambda p}{p^2 + 1}.$$

Ha ezt visszatranszformáljuk, nyerjük a

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\tau}) \varphi(\tau) d\tau = \sin t$$

integrálegyenlet-megoldását  $\lambda \neq 1$  mellett:

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-\lambda} \sin t + \frac{\lambda}{1-\lambda} \cos t.$$

Az előbbiekből látható, hogy  $\lambda = 1$  a  $J_0(2\sqrt{t\tau})$  mag sajátértéke. Egyik sajátfüggvénye könnyen meghatározható. Ha u. is  $\lambda = 1$ , akkor

$$\Phi\left(\frac{1}{p}\right) = p\Phi(p).$$

Ennek a függvényegyenletnek egyik megoldása  $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ . Egyenletünk egyik sajátfüggvénye tehát

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

2. Oldjuk meg a következő elsőfajú integrálegyenletet:

$$\int_0^{\infty} \int_{\frac{\tau}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} \varphi(\tau) d\xi d\tau = l(t).$$

A szokásos

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

jelöléssel

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} \operatorname{erf} \frac{\tau}{2\sqrt{t}} \varphi(\tau) d\tau = l(t).$$

Mivel [6]

$$L\left\{\operatorname{erf} \frac{\tau}{2\sqrt{t}}\right\} = \frac{1}{p} e^{-\tau\sqrt{p}},$$

itt  $F(p) = \frac{1}{p}$ ;  $\xi(p) = \sqrt{p}$ , tehát Efrosz tétele szerint

$$\frac{1}{p} \Phi(\sqrt{p}) = L(p),$$

ebből

$$\Phi(p) = p^2 L(p^2).$$

Ha erre alkalmazzuk az inverz Laplace-transzformációt, nyerjük egyenletünk megoldását.

3. Az előbb vázolt módszer több gyakorlati probléma numerikus megoldására is alkalmazható. Vegyük például a diffúzió differenciálegyenlet leg-egyszerűbb alakját, mikor is a diffúzió csak egy irányban történik. Ha a választott koordináta-rendszer  $X$ -tengelye a diffúzió irányába mutat, a helykoordinátát  $x$ -el, az időkoordinátát  $t$ -vel, a keresett koncentrációt  $c(x, t)$ -vel jelöljük, akkor érvényes a Fick-féle II. differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

ahol  $D$  egy, az időtől és helytől független állandó, az ú. n. diffúziós állandó. Ismeretes, hogy ennek az egyenletnek az általános megoldása [7]

$$(2) \quad c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(\tau+x)^2}{4Dt}}}{\sqrt{4Dt}} \varphi(\tau) d\tau$$

alakú, ahol  $\varphi(\tau)$  egy tetszőleges függvény. Ezt úgy kell meghatározni, hogy bizonyos kezdeti feltételek teljesüljenek. Így tehát a probléma egy integrálegyenlet megoldását jelenti, ha a koncentráció egy adott  $x$  helyen ismert mint az idő függvénye.

Legyen a rögzített  $h$  helyen a koncentráció ismert:

$$c(h, t) = g_h(t)$$

és megoldandó a

$$g_h(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\tau-h)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(\tau+h)^2}{4Dt}}}{\sqrt{4Dt}} \varphi(\tau) d\tau$$

integrálegyenlet. Egyszerűség kedvéért legyen  $4Dt = T$  és  $g_h\left(\frac{T}{4D}\right) = \gamma_h(T)$ .

Ezzel a jelöléssel egyenletünk a következő alakot ölti:

$$\gamma_h(T) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\tau-h)^2}{T}} - e^{-\frac{(\tau+h)^2}{T}}}{\sqrt{T}} \varphi(\tau) d\tau.$$

Vegyük figyelembe azt, hogy [8]

$$L_T \left\{ \frac{e^{-\frac{(\tau+h)^2}{T}}}{\sqrt{T}} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} e^{-2(\tau+h)\sqrt{p}},$$

tehát

$$F(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} e^{-2h\sqrt{p}} \quad \text{és} \quad \xi(p) = 2\sqrt{p}$$

ezért

$$\frac{1}{\sqrt{p}} [e^{2h\sqrt{p}} - e^{-2h\sqrt{p}}] \Phi(2\sqrt{p}) = \Gamma_h(p),$$

ahol  $L\{\gamma_h(T)\} = \Gamma_h(p)$ .

Ebből

$$\Phi(p) = \frac{p\Gamma_h\left(\frac{p^2}{4}\right)}{4 \operatorname{sh}(hp)}.$$

Ennek alapján

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{p\Gamma_h\left(\frac{p^2}{4}\right)}{4 \operatorname{sh}(hp)} e^{p\tau} dp,$$

és így a koncentráció, mint a hely és idő függvénye

$$c(x,t) = \frac{1}{2\pi^{3/2}j} \int_0^\infty \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(\tau+x)^2}{4Dt}}}{\sqrt{4Dt}} e^{p\tau} \frac{p\Gamma_h\left(\frac{p^2}{4}\right)}{4 \operatorname{sh}(hp)} dp d\tau.$$

Lássunk egy konkrét példát. Legyen valamely helyen a koncentráció növekedés az idővel arányos, vagyis

$$g_h(t) = \alpha t,$$

$$\text{akkor } \gamma_h(T) = g_h\left(\frac{T}{4D}\right) = \frac{\alpha}{4D} T, \quad \text{és így} \quad \Gamma_h = \frac{\alpha}{4D} \frac{1}{p^2}.$$

Ennélfogva

$$\Gamma_h\left(\frac{p^2}{4}\right) = \frac{4\alpha}{D} \frac{1}{p^4}$$

és ezért

$$\Phi(p) = \frac{p \frac{4\alpha}{D} \frac{1}{p^4}}{4 \operatorname{sh}(hp)} = \frac{\alpha}{D} \frac{e^{-hp}}{p^2} \cdot \frac{1}{p} \frac{e^{hp}}{\operatorname{sh} hp} = \frac{\alpha}{D} \frac{1}{p} \cdot \frac{e^{-hp}}{p} \cdot \frac{1}{p} \frac{1}{1 - e^{2hp}}.$$



Ismeretes, hogy

$$L\{f_h(t)\} = \frac{e^{-hp}}{p},$$

ahol

$$f_h(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < h \\ 1, & \text{ha } t > h \end{cases}$$

és így

$$\frac{1}{p} \frac{e^{-hp}}{p} = L \left\{ \int_0^t f_h(\tau) d\tau \right\}.$$

$f_h$  definíciója alapján

$$v_h(t) = \int_0^t f_h(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < h \\ t - h, & \text{ha } t > h. \end{cases}$$

Másrészt viszont az a függvény, melynek Laplace-transzformáltja  $\frac{1}{p} \frac{1}{1 - e^{2hp}}$  az a következőképpen definiált függvény [9]

$$U_h(t) = n + 1, \text{ ha } 2hn < t < 2h(n + 1).$$

A konvolúció tétele alapján tehát

$$\varphi(t) = \frac{\alpha}{D} U_h * v_h = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < h \\ \frac{\alpha}{D} \left( \frac{h^2}{2} + 4h^2 \sum_{k=1}^n (k+1) + \frac{n+2}{2} [(t-h)^2 - (2n+1)h^2] \right), & \text{ha } t > h. \end{cases}$$

Ezért a keresett koncentráció a (2) formula alapján explicite kiszámítható.

Megjegyezzük, hogy ennél a speciális esetben alkalmazott számolási eljárás az általános esetre is alkalmazható és a koncentráció az az előbbihez hasonló alakban is felírható.

## IRODALOM

- [1] A. M. Ефрос: Математический Сборник (Rec. Math. Moscou) 1942. 669. o.
- [2] M. J. Kontorovics: Operátorszámítás, 1952. 116. o.
- [3] Volterra—Péres: Leçons sur la composition. Paris, 1924. 22. o.
- [4] V. Volterra: Leçons sur les fonctions de lignes. 126. o.
- [5] G. Doetsch: Tabellen zur Laplace-transformation. 1947. 105. o.
- [6] l. [5] 105. o.
- [7] Alexits—Fenyő: Matematika vegyészek számára. 1951. 337. o.
- [8] l. [2]. 201. o.
- [9] l. [5] 112. o.

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. ФЕНЬЕ

### Резюме

Работа пользуется известной теоремой А. М. Эфроса о преобразованиях Лапласа некоторых интегральных трансформацией для решения сингулярных интегральных уравнений первого и второго рода, обладающих ядрами, характеризуемыми теоремой Эфроса. Работа покажет метод на двух интегральных уравнениях математической физики.

## SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS INTÉGRALES SINGULIÈRES

E. FENYŐ

### Résumé

L'article fait usage d'un théorème de A. M. Efros concernant les transformées de Laplace de certaines transformations intégrales pour résoudre des équations intégrales singulières du premier et du second genre, avec des noyaux caractérisés par le théorème d'Efros. L'article présente la méthode pour deux équations intégrales de la physique mathématique.



## A MATEMATIKAI FIZIKA NÉHÁNY DIFFERENCIÁLEGYENLETÉNEK EGY MEGOLDÁSI MÓDSZERÉRŐL

FENYŐ ISTVÁN

### ÖSSZEFOGLALÁS

Parciális differenciálegyenletek peremérték- és kezdetiértékfeladatát úgy is meg lehet oldani, hogy képezzük a szóbanforgó differenciálegyenlet minden tagjának Fourier-együtthatóit az egyik változóra vonatkozólag egy alkalmas ortogonális függvényrendszer szerint. Ha helyesen választjuk meg az ortogonális függvényrendszert, akkor a Fourier-együtthatók egy közöséges differenciálegyenlet megoldásaképpen nyerhetők. Ez a megoldási elv két példán van illusztrálva. Az egyik a diffúzió differenciálegyenletének egyik esetét tárgyalja, a másik egy potenciálméleti problémát old meg.

A matematikai fizika számos differenciálegyenletének megoldására újabban különböző integráltranszformációkat használnak. Különösen gyakran alkalmazzák a Fourier integrált, a Laplace-, Hankel-, Mellin- stb. transzformációkat. Az integráltranszformációk azt eredményezik, hogy a közöséges differenciálegyenleteket algebrai, a parciális differenciálegyenleteket pedig közöséges differenciálegyenletekbe viszik át. Ezeknek nagy előnyük a klasszikus módszerekkel szemben, hogy egyszerűek és azonnal a megfelelő kezdő-, illetve határfeltételeknek eleget tevő partikuláris megoldásokat szolgáltatják. Hátrányuk viszont, hogy velük való számolás kapcsán végtelen határu improprius integrálok lépnek fel, ez tehát azt jelenti, hogy a problémában megadott függvényeknek a megfelelő végtelen intervallumban értelmezetteknek kell lenniük és olyanok kell hogy legyenek, hogy ezek az improprius integrálok értelemmel bírjanak. Az említett módszerek használatának további nehézsége a visszatranszformálás valóságos végrehajtásában áll.

A következőkben a matematikai fizikában fellépő parciális differenciálegyenletek egy igen egyszerű megoldási elvét mutatjuk meg. Ezt az elvet integrál- és integrodifferenciálegyenletek megoldására már hosszabb ideje sikerrel alkalmazzák.

Ennek lényege abban áll, hogy képezzük a differenciálegyenlet minden tagjának Fourier együtthatóit valamilyen  $\{\varphi_n\}$  ortogonális függvényrendszerre vonatkozóan. Ha sikerül a differenciálegyenlet tagjainak Fourier-együtthatóit egyszerűen kifejezni valamilyen módon az ismeretlen függvény Fourier-együtthatóival és az így kapott egyenletből meghatározni az ismeretlen függvény Fourier-együtthatóit, akkor feladatunkat tulajdonképpen meg is oldottuk. Itt is lehetséges még számolás közben figyelembe venni a kezdeti-, illetve határfeltételeket, mert rendszeren a differenciálegyenlet egyes tagjainak Fourier-



együtthatóiból parciális integrálással lehet kifejezni a keresett függvény Fourier-együtthatóit. A megoldást általában a  $\{\varphi_n\}$  sorozat szerint haladó végtelen sor alakjában nyerjük. Hátra van természetesen annak megvizsgálása, hogy a sor konvergencia-e és elegendőször differenciálható és a differenciálegyenletet kielégítő függvényt szolgáltat-e. E feladat igen sokszor nem bonyolultabb, mint a szokásos integráltranszformációk inverzének a képzése és azokkal kapcsolatos improprius integrálok konvergenciájának megállapítása. Úgy látszik, hogy bizonyos esetekben a most vázolt módszer egyszerűbb, elkerülhetők a kényes improprius integrálokkal való számítások. Különösen egyszerű a most vázolt módszer használata, ha  $\varphi_n$  egy önadjungált sajátérték-probléma sajátfüggvényrendszere és a szóbanforgó differenciálegyenlet olyan lineáris önadjungált differenciáloperátort tartalmaz, mely  $\varphi_n$ -et definiáló differenciálegyenletben is szerepel.

Szorítkozzunk másodrendű differenciálegyenletek esetére.

Tegyük fel, hogy  $\varphi_n$  a következő Sturm–Liouville-típusú sajátérték-probléma megoldása:

$$(p\varphi_n')' - q\varphi_n + \lambda_n \varrho \varphi_n = 0,$$

ahol  $\varrho(x) > 0$  súlyfüggvény és valamilyen homogén határfeltétel teljesül.

Tegyük fel, hogy a megoldandó differenciálegyenletben az  $\frac{1}{\varrho} (py')' - \frac{q}{\varrho} y$  kifejezés szerepel. Akkor ennek  $\varphi_n$  szerint vett Fourier-együtthatója

$$\int_a^b \left( \frac{1}{\varrho} (py')' - \frac{q}{\varrho} y \right) \varrho \varphi_n dx = [yp\varphi_n]_a^b - [yp\varphi_n']_a^b - \lambda_n \alpha_n,$$

ahol  $\alpha_n$  jelenti  $y$ -nak a Fourier-együtthatóját. A szögletes zárójelek értékének kiszámításánál kell figyelembe venni az  $y$ -ra vonatkozó határfeltételeket.

A vázolt eljárást két konkrét példán, és pedig két parciális differenciálegyenlet megoldásán mutatjuk be.

1. Tekintsünk egy (egységsugarú) hengeralakú edényt, mely tiszta oldószerezrel van megtöltve és az edény falán át oldott anyag diffundál az edénybe. Az edényen kívül a koncentráció legyen állandó.

Ha a henger tengelyétől mért távolságot  $r$ -rel jelöljük és a koncentrációt (mely a hengerszimmetria miatt csak  $r$ -től és az időtől függ)  $c(r, t)$ -vel, akkor mint ismeretes, érvényes a következő parciális differenciálegyenlet:

$$D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) = \frac{\partial c}{\partial t}.$$

A határfeltételek

$$\begin{aligned} c(1, t) &= c_0 \quad (t > 0) \\ c(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r < 1). \end{aligned}$$

A differenciálegyenletben szereplő  $\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r}$  kifejezés és a szóbanforgó  $(0, 1)$  intervallum miatt nyilvánvaló a  $J_0(\lambda_n r)$  ortogonális függvényrendszerre

vonatkozó Fourier együtthatók képzése, ahol  $\lambda_n$  jelenti a  $J_0(x)$  pozitív gyökeit. Az előbbiekhöz teljesen azonos számolás alapján

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) r J_0(\lambda_n r) dr = -\lambda_n c_0 J_0'(\lambda_n) - \lambda_n^2 \alpha_n(t).$$

Ha tehát az integrálandó egyenlet mindkét oldalát  $J_0(\lambda_n r)$ -rel szorozzuk (és még az  $r$  súlyfüggvénnyel is) és 0-tól 1-ig integrálunk, akkor a

$$\frac{d\alpha_n(t)}{dt} = -D(\lambda_n c_0 J_0'(\lambda_n) + \lambda_n^2 \alpha_n(t))$$

egyenlethez jutunk. Ez  $\alpha_n(t)$ -re nézve közönséges differenciálegyenlet, melyet az  $\alpha_n(0) = 0$  feltétel mellett kell megoldani. Ennek az egyszerű lineáris egyenletnek a megoldása

$$\alpha_n(t) = \frac{c_0 J_0'(\lambda_n)}{\lambda_n} (e^{-D\lambda_n^2 t} - 1).$$

Vegyük figyelembe azt, hogy  $J_0'(\lambda_n) = -J_1(\lambda_n)$  és ennek alapján problémánk megoldása

$$c(r, t) = 2c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} (1 - e^{-D\lambda_n^2 t}).$$

Ugyanezt az eredményt nyertük volna a Hankel-transzformáció alkalmazásával is, csakhogy hosszadalmasabb számítások árán.

2. Egy egységsugarú, kör alakú, töltéssel ellátott síklap potenciálját keressük. Válasszuk a koordinátarendszert úgy, hogy az  $XY$ -sík egybessék a körlap síkjával, kezdőpontja pedig legyen a kör középpontja. A körlap által létesített tér nyilván hengersizmetrikus, így a  $\Phi$  potenciál csupán  $r$  és  $z$ -től függ, ahol  $r$  jelenti valamely pont távolságát a  $Z$ -tengelytől.  $\Phi(r, z)$  kielégíti a

$$\Delta^2 \Phi = 0$$

differenciálegyenletet. A határfeltételek:

$$\Phi(r, 0) = \Phi_0 \quad (0 \leq r < 1) \quad \text{és} \quad \frac{\partial \Phi(r, 0)}{\partial z} = 0, \quad \text{ha } r > 1.$$

A Laplace-operátort hengerkoordinátákra átírva:

$$\Delta^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Számításra alkalmasabb lesz az egyenlet, ha az  $r$  és  $z$  helyett az  $u$  és  $v$  koordinátákat vezetjük be a következő egyenletekkel:

$$r = \sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 + v^2}; \quad z = uv.$$

Elemi számolással azt kapjuk, hogy  $\Phi$  kielégíti ezt a parciális differenciálegyenletet

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ (1-u^2) \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ (1+v^2) \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] = 0.$$

Ezesetben a határfeltételek

$$\Phi(u, 0) = \Phi_0 \quad (-1 < u < 1) \quad \text{és} \quad \frac{\partial \Phi(0, v)}{\partial u} = 0$$

lesznek.

Az  $\frac{\partial}{\partial u} \left[ (1-u^2) \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right]$  kifejezés miatt közelfekvő a Legendre-polinómkokat alapul venni és képezni az egyenlet mindkét tagjának a  $P_n(u)$  Legendre-polinomok szerinti Fourier együtthatóit.

A bevezetésben alkalmazott számítást elvégezve, azt kapjuk, hogy

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial u} \left[ (1-u^2) \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right] P_n(u) du = -n(n+1) \alpha_n,$$

ahol

$$\alpha_n(v) = \int_{-1}^{+1} \Phi(u, v) P_n(u) du.$$

Végigszorozva tehát a parciális differenciálegyenletet  $P_n$ -nel és integrálva  $u$  szerint kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -n(n+1) \alpha_n(v) + \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial v} \left[ (1+v^2) \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] P_n(u) du = \\ = -n(n+1) \alpha_n(v) + \frac{\partial}{\partial v} [(1+v^2) \alpha'_n] = 0. \end{aligned}$$

Ez  $\alpha_n$ -re közösleges differenciálegyenlet, melyet az

$$\alpha_n(0) = \Phi_0 \int_{-1}^{+1} P_n(u) du$$

határfeltétel mellett kell integrálni.

Ha  $n > 0$  egész, akkor

$$\int_{-1}^{+1} P_n(u) du = 0,$$

vagyis  $\alpha_n(0) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

A szóbanforgó differenciálegyenletről azonnal leolvasható, hogy ha annak egyáltalában van nemtriviális megoldása, az csakis analitikus lehet a  $v = 0$  hely környezetében. Fel lehet tehát tételezni, hogy a megoldás ilyen alakú:

$$\alpha_n(v) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} v^k.$$

Ezt a differenciálegyenletbe behelyettesítve, azt kapjuk, hogy

$$[n(n+1) - k(k+1)] C_{n,k} = (k+1)(k+2) C_{n,k+2}.$$

Mivel  $\alpha_n(0) = 0$ , ezért  $C_{n,0} = 0$  és így  $C_{n,2k} = 0$ . Másrészt viszont az előbb rekurziós formulából következik, hogy ha  $n$  páratlan, akkor  $C_{n,n+2} = 0$  és így minden további együttható is zérus. Ez azt jelenti tehát, hogy  $\alpha_n(v)$  páratlan polinom. Másrészt viszont  $\Phi(r, z)$  potenciálfüggvény, mely a végtelenben  $\frac{1}{r}$  nagyságrendben eltűnik. Ha  $v \rightarrow \infty$ , akkor  $r$  és  $z$  tart  $\infty$ -hez, tehát  $\alpha_n \rightarrow 0$ . Mivel azonban  $\alpha_n$  polinom, ez csak úgy lehet, ha  $\alpha_n(v) = 0$ .

Ha viszont  $n$  páros, akkor  $n(n+1) - k(k+1)$  soha sem lesz 0. Ez esetben

$$\frac{C_{n,k+2}}{C_{n,k}} = \frac{(k+1)(k+2)}{n(n+1) - k(k+1)} \rightarrow -1,$$

ha  $k \rightarrow \infty$ , tehát  $\alpha_n(v)$ -t olyan hatványsor reprezentálja, melynek konvergenciasugara 1.

Másrészt azonban

$$C_{n,k} = -\frac{1}{k+2} \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{k(k+1)} \right] k C_{n,k-2}$$

amiből következik, hogy  $\alpha_n(v)$  hatványsorában a  $C_{n,k}$  együtthatók váltakozó előjelűek (egy bizonyos tagtól kezdve) és  $|C_{n,k}| > \frac{A}{k+2}$ , ahol  $A$  valamilyen pozitív szám (elegendő nagy  $k$ -tól kezdve). Ebből következik közismert gondolatmenettel [1], hogy ha  $v \rightarrow i$  ( $i = \sqrt{-1}$ ), akkor  $|\alpha_n(v)| \rightarrow \infty$ . Ez pedig nem lehetséges. Ha ugyanis  $u$  és  $v$  tiszta képzetes szám, akkor  $r$  és  $z$  valós, tehát  $r$  és  $z$  úgy is felveheti számbajövő értékeit, ha  $u$  és  $v$  tiszta képzetesek. Különösen korláatosnak kell maradnia  $\alpha_n(v)$ -nek, ha  $v \rightarrow i$ , mert ezesetben  $r \rightarrow 0$  és  $r = 0$  mellett  $\Phi$  nyilván korláatos. Ezért tehát  $\alpha_n(v) \equiv 0$ , ha  $n$  páros.

Marad az az eset, amikor  $n = 0$ . Ekkor

$$\frac{d}{dv} [(1+v^2) \alpha'_0] = 0$$

és  $\alpha_0(0) = 2\Phi_0$ . A differenciálegyenletnek általános integrálja

$$\alpha_n(v) = a \operatorname{arctg} v + b.$$

De  $\alpha_0(0) = b = 2\Phi_0$  és  $\alpha_0(\infty) = 0 = a \frac{\pi}{2} + 2\Phi_0$ , ebből  $a = -\frac{4\Phi_0}{\pi}$ .



Ennélfogva tehát

$$\alpha_0(v) = -\frac{4\Phi_0}{\pi} \operatorname{arctg} v + 2\Phi_0,$$

és így

$$\Phi(u, v) = \Phi_0 \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} v \right].$$

Áttérve hengerkoordinátákra

$$\Phi(r, z) = \Phi_0 \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{z^2 + r^2 - 1 + \sqrt{(z^2 + r^2 - 1)^2 + 4z^2}}{2} \right)^{1/2} \right]. \quad (*)$$

A most tárgyalt probléma természetesen más módszerrel is megoldható. Így pl. [2]-ben a megoldást

$$\Phi(r, z) = \frac{2\Phi_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} J_0(tr) e^{-zt} dt \quad (*)$$

alakban nyeri. Könnyű megmutatni, hogy ez a képlet a (\*) alattival azonos. A  $\frac{2\Phi_0}{\pi}$  állandó faktortól eltekintve,  $\Phi(r, z)$  u. i. az  $f(t) = \frac{\sin t}{t} J_0(tr)$  függvény Laplace-transzformáltja, ez pedig explicit alakban könnyen kiszámítható, mert nyilvánvalóan [3]

$$\int_0^\infty e^{-zt} \frac{\sin t}{t} J_0(tr) dt = \frac{1}{2i} \left[ \operatorname{ar sh} \frac{z+1}{r} - \operatorname{ar sh} \frac{z-i}{r} \right]. \quad (**)$$

Ez azt jelenti, hogy ki kell számítani  $\operatorname{Im} \left[ \operatorname{ar sh} \frac{z+i}{r} \right] = y$  értékét. Legyen

$x = \operatorname{Re} \left[ \operatorname{ar sh} \frac{z+i}{r} \right]$ , akkor mivel

$$\operatorname{sh}(x + iy) = \frac{z+i}{r}$$

ezért

$$\frac{z}{r} = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \quad \text{és} \quad \frac{1}{r} = \operatorname{ch} x \sin y.$$

E két egyenletből  $x$  eliminációja útján

$$r^2 \cos^4 y + (1 + z - r^2) \cos^2 y - z^2 = 0$$

$$y = \arccos \left[ \frac{z^2 + r^2 + \sqrt{(r^2 - z^2 - 1)^2 + 4z^2 r^2}}{2r^2} \right]^{1/2}$$

adódik. Azonnal látható, hogy ez a már jelzett állandó faktortól eltekintve a (\*) alattival azonos, mert

$$(r^2 - z^2 - 1)^2 + 4z^2 r^2 = (r^2 + z^2 - 1)^2 + 4z^2$$

és felhasználva az

$$\operatorname{arc} \cos p = \operatorname{arc} \cotg \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$$

elemi identitást, adódik, hogy

$$y = \operatorname{arc} \cotg \left[ \frac{r^2 - z^2 - 1 + \sqrt{(r^2 + z^2 - 1)^2 + 4z^2}}{r^2 + z^2 + 1 - \sqrt{(r^2 + z^2 - 1)^2 + 4z^2}} \right]^{1/2}$$

Mivel pedig

$$\frac{r^2 - z^2 - 1 + \sqrt{(r^2 + z^2 - 1)^2 + 4z^2}}{r^2 + z^2 + 1 - \sqrt{(r^2 + z^2 - 1)^2 + 4z^2}} = \frac{r^2 + z^2 - 1 + \sqrt{(r^2 + z^2 - 1)^2 + 4z^2}}{2}$$

ezért a (\*) és (\*\*) alatti képletek azonosak.

Megjegyezzük még, hogy ugyanezt a tényt még másképpen is be lehet látni. Ha ugyanis képezzük (\*\*\*) alatti kifejezés  $u$  szerinti parciális deriváltját, úgy elemi számítással azonosan 0 adódik. Ez azt jelenti, hogy (\*\*) alatti integrál nem függ  $u$ -tól. De akkor legyen  $u = 1$  és így [4]

$$\Phi(r, z) = \frac{2\Phi_0}{\pi} \int_0^\infty e^{-rt} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{2\Phi_0}{\pi} \operatorname{arc} \cotg v$$

ami megint a (\*) képlettel azonos.

#### IRODALOM

- [1] Courant—Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, I. 1924. 259. o.
- [2] Frank—Mises: Die Differential- u. Integralgleichungen der Mechanik u. Physik, II. 1935, 311. o.
- [3] Azonnal adódik a G. Doetsch: Tabellen zur Laplace-transformation 13. táblázat 9. 157. o. (1947) alatti képletből.
- [4] 1. [3] 3. táblázat 2. 97. o. (1947).

#### ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И. ФЕНЬЕ

#### Резюме

Задача граничных и начальных значений дифференциальных уравнений с частными производными решается и таким образом, что образуются коэффициенты Фурье каждого члена рассматриваемого дифференциального уравнения, относящиеся к одной переменной по подходящей системе ортогональных функций. Если система ортогональ-

ных функций избирается правильно, то коэффициенты Фурье получаются решением обыкновенного дифференциального уравнения. Этот принцип решения иллюстрируется на двух примерах. Один — случай дифференциального уравнения диффузии, другой проблема теории потенциала.

## SUR UNE MÉTHODE DE SOLUTION DE QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

E. FENYŐ

### R é s u m é

Le problème de valeurs frontières et de valeurs initiales d'équations différentielles partielles peut être résolu de la manière qu'on forme les coefficients de Fourier de chaque membre de l'équation différentielle en question concernant l'un des variables selon un système de fonctions orthogonales convenable. Si le système orthogonal est choisi convenablement, les coefficients de Fourier peuvent être obtenus comme par la solution d'une équation différentielle ordinaire. Le principe de solution est illustré par deux exemples. L'un se rapporte à un des cas de l'équation différentielle de la diffusion, tandis que l'autre résout un problème de la théorie du potentiel.

## AZ OSZTÁLY MUNKATÁRSAINAK AZ OSZTÁLY MUNKÁJÁNAK EREDMÉNYEIT TARTALMAZÓ, MÁSUTT MEGJELENT DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

*Pál Sándor:* Cukoripari diffúziós folyamatokról. I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei. 693—726 o.

*Pál Sándor:* Ellenáramú diffúziós rendszerekről. MTA III. o. Közleményei I. 1. 143—164. o.

*Fenyő István:* Über eine Klasse von Integralgleichungen. Publ. Math. Debrecen (Sajtó alatt)

*Fenyő István:* Eine Bemerkung über das Dirichletsche Problem bezüglich der Kugel. (Publ. Math. Debrecen, sajtó alatt)

*Fenyő István:* Magasabbrendű gömbfelületi függvényekre vonatkozó integrálegyenletekről. M. T. A. III. o. Osztályközleményei. (Sajtó alatt).

## EGYÉB DOLGOZATOK





# KÉTKOMPONENSŰ IDEÁLIS GÁZELEGY ELOSZLÁSA CENTRIFUGÁLIS ERŐTÉRBEN

FREUD GÉZA

## ÖSSZEFOGLALÁS

Kétkomponensű gázelegy centrifugálása esetén a centrifuga belső szélén a könnyebb komponens súlyaránya 1-ig fokozható, ellenben a nehezebb komponens súlyaránya nem haladhatja meg az

$$\frac{m'' M''}{m' M' + m'' M''}$$

értéket, ahol  $m'$ , ill.  $m''$  a két komponens tömege,  $M'$  ill.  $M'' > M'$  pedig a két komponens molekulasúlya.

Jelen tanulmány *Borza László* munkásújíto találmányával kapcsolatban, az Országos Tervhivatal megbízása alapján készült.

Az  $r_1$  és  $r_2$  sugarú koncentrikus hengerfelületekkel, továbbá a hengerek közös tengelyére merőleges síkokkal határolt térrészbe két ideális gáz keverékből álló gázelegyet helyeztünk és azt a hengerek közös tengelye körül  $\omega$  szögsebességgel forgásba hoztuk. Meg akarjuk határozni azt a sűrűségeloszlást, melynél a gázelegy a forgó rendszerben egyensúlyban van és hőmérséklete állandó.

A Dalton-törvény szerint, amely potenciáltérben is érvényes,\* a két gáz a rendelkezésre álló teret egymástól függetlenül tölti ki, elegendő tehát egykomponensű rendszert vizsgálnunk.

A tömegegységre ható centrifugális erő a gázzal együttforgó koordináta-rendszerben  $\omega^2 r$ , ahol  $r$  a tengelytől mért távolság, tehát az erőter potenciálja

$$V = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2.$$

Az aerostatikai egyensúly feltétele :

$$(1) \quad \int_{p_1}^p \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2} \omega^2 (r^2 - r_1^2) = 0,$$

\* A Dalton törvény ezen általánosítására Freud Gézáné Wágner Anna IV. éves fizikus hallgató hívta fel a figyelmemet, aki önállóan elméleti levezetést is készített erre. Értékes szakmai segítségéért ezúton is köszönetet mondok.

ahol  $p = p(r)$  a gáz nyomása,  $\varrho = \varrho(p)$  a gáz sűrűsége [1]. Ideális gáz esetén

$$(2) \quad \frac{p}{\varrho} = \frac{1}{M} RT,$$

ahol  $M$  a gáz molekulásúlya,  $R$  az egyetemes gázállandó és  $T$  a gáz hőmérséklete.

(2) alapján

$$\int_{p_1}^p \frac{dp}{\varrho} = \frac{RT}{M} \log \frac{\varrho}{\varrho_1}$$

és így (1)-ből

$$(3) \quad \varrho = \varrho_1 e^{\frac{M\omega^2}{2RT}(r^2-r_1^2)}.$$

Ha a gáz összes tömege  $m$ , úgy  $l$ -el jelölve a két határoló sík távolságát,

$$(4) \quad \begin{aligned} m &= 2\pi l \int_{r_1}^{r_2} \varrho r dr = 2\pi l \varrho_1 \int_{r_1}^{r_2} e^{\frac{M\omega^2}{2RT}(r^2-r_1^2)} r dr = \\ &= \frac{2\pi l RT}{M\omega^2} \varrho_1 \left\{ e^{\frac{M\omega^2}{2RT}(r_2^2-r_1^2)} - 1 \right\} \end{aligned}$$

(3) és (4)-ből

$$(5) \quad \varrho = \frac{m M \omega^2}{2\pi l RT} \frac{e^{\frac{M\omega^2}{2RT}(r_2^2-r_1^2)} - 1}{e^{\frac{M\omega^2}{2RT}(r_2^2-r_1^2)} - 1}.$$

Ha (5)-ben  $m$  és  $M$  helyébe az egyes gázkomponensekre érvényes  $m'$  és  $M'$ , ill.  $m''$  és  $M''$  értékeket helyettesítjük, megkapjuk a gázelegy két komponensének  $\varrho'$ , ill.  $\varrho''$  sűrűségeloszlását.

Tanulságos megvizsgálni a két komponens sűrűségének arányát a külső és belső hengerfal mentén:  $r = r_1$  esetén

$$(6) \quad \frac{\varrho'_1}{\varrho''_1} = \frac{m' M'}{m'' M''} \frac{e^{\frac{M''\omega^2}{2RT}(r_2^2-r_1^2)} - 1}{e^{\frac{M'\omega^2}{2RT}(r_2^2-r_1^2)} - 1}$$

és  $r = r_2$  esetén

$$(7) \quad \frac{\varrho'_2}{\varrho''_2} = \frac{m' M'}{m'' M''} \frac{1 - e^{-\frac{M''\omega^2}{2RT}(r_2^2-r_1^2)}}{1 - e^{-\frac{M'\omega^2}{2RT}(r_2^2-r_1^2)}}.$$

Legyen pl.  $M'' > M'$  és nézzük meg, mi történik, ha az  $\omega$  szögsebességet minden határon túl növeljük. Akkor a térfogat belső határán mindkét komponens sűrűsége zérushoz tart, de a kisebb molekulásúlyú komponens relatív sűrűsége 1-hez konvergál. A térfogat külső határán ugyanakkor mindkét komponens sűrűsége végtelenhez tart, de olymódon, hogy a nagyobb molekulásúlyú komponens relatív sűrűsége

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\rho_2''}{\rho_2' + \rho_2''} = \frac{m'' M''}{m' M' + m'' M''}$$

és a nehezebb komponens relatív sűrűsége mindig ezen határérték alatt marad. Mindez (5), (6) és (7)-ből azonnal belátható.

#### IRODALOM

1. l. pl. *Sommerfeld*: *Mechanik der deformierbaren Medien*. 49. o. (7) és (6b) képletek.

#### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАЗОВОЙ СМЕСИ ДВУМЯ СОСТАВЛЯЮЩИМИ В ЦЕНТРОБЕЖНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Г. ФРАЙД

#### Резюме

В случае центрифугирования газовой смеси и двумя составляющими, весовое отношение более легкого компонента на внутреннем крае может повыситься до 1, а весовое отношение более тяжелого компонента не превышает величину

$$\frac{m'' M''}{m' M' + m'' M''}$$

где  $m'$  и  $m''$  — массы компонентов,  $M'$  и  $M'' > M'$  молекулярные веса компонентов.

#### LA DISTRIBUTION DES MÉLANGES GAZEUX À DEUX COMPOSANTES EN CHAMPS DE FORCE CENTRIFUGALES

G. FREUD

#### Résumé

En cas de la centrifugation des mélanges gazeux à deux composantes, on peut augmenter au bord intérieur du centrifugeur la proportion de poids de la composante plus légère jusqu'à 1, mais la proportion de poids de la composante plus lourde ne peut pas dépasser la valeur

$$\frac{m'' M''}{m' M' + m'' M''}$$

où  $m'$  et  $m''$  sont les masses des deux composantes  $M'$  et  $M'' > M'$  sont les poids moléculaires des composantes.





# MÓDOSÍTOTT EGYCENTRUMÚ KÖLCSÖNHATÁSI INTEGRÁLOK SZÁMÍTÁSA

ARATÓ MÁTYÁS és FREUD GÉZA

## ÖSSZEFOGLALÁS

Szerzők módszert ismertetnek az

$$I_{m,n}(r_0) = \iint \frac{r_1^m r_2^n}{r_{12} + r_0} e^{-(r_1 + r_2)} d\tau_1 d\tau_2$$

integrálok számítására és kiszámítják azokat  $m, n = 0, 1, 2, 3$  esetén.

## Bevezetés

Ha két elektron egy  $Q$  pontszerű töltés Coulomb-terében mozog, a két elektron kölcsönhatási energiáját a kvantummechanikai perturbációszámítás elsőrendű közelítésében számolva

$$(1) \quad \iint \frac{R_1(r_1) R_2(r_2)}{r_{12}} e^{-\alpha(r_1 + r_2)} d\tau_1 d\tau_2$$

alakú integrálokra jutunk (l. pl. [1] 72–73. o.), ahol  $R_1$  és  $R_2$  kis fokszámú polinomok.  $r_1, r_2, r_{12}$  jelentése az ábráról leolvasható, a  $d\tau_1$  és  $d\tau_2$  szerinti térfogati integrálást külön-külön az egész háromdimenziós térre kell kiterjeszteni.

Hasonlósági transzformációval elérhető, hogy  $\alpha = 1$  legyen, és ekkor (1) az

$$(2) \quad I_{mn}(0) = \iint \frac{r_1^m r_2^n}{r_{12}} e^{-(r_1 + r_2)} d\tau_1 d\tau_2$$

alakú integrálok lineáris kifejezésére bontható. Az ilyen integrálok számítását először *R. H. Hassé* [2] végezte el és alkalmazta.

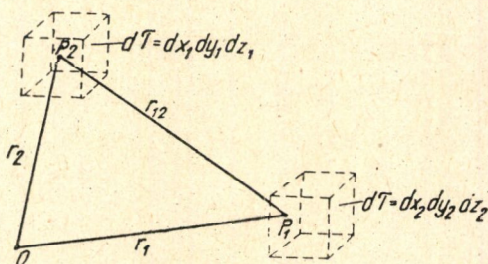
Hassé eredményét azóta általánosították arra az esetre, ha a két elektron 2, vagy 3 pontszerű mag terében mozog; ennek a kérdésnek kiterjedt irodalma van, amely pl. *H. J. Kopineck* [3] dolgozatában (amely az eddig ismert legáltalánosabb eredmény) megtalálható.

*Román Pál* fizikus egy kutatási problémájával kapcsolatban az Eötvös

Loránd Tudományegyetem Fizikai Intézete Intézetünkhöz fordult azzal a kéréssel, hogy adjunk számítási eljárást az alábbi módosított integrálokra :

$$(3) \quad I_{mn}(r_0) = \iint \frac{r_1^m r_2^n e^{-(r_1+r_2)}}{r_{12} + r_0} d\tau_1 d\tau_2,$$

ahol  $m$  és  $n$  egész számok.



1. ábra

A konkrét fizikai problémánál  $r_0 \cdot 10^{-5}$  nagyságrendű állandó.

A szerzőknek sikerült olyan eljárást kidolgozniok, melynek segítségével (3) előállítható, mint egy finit analitikus kifejezés és egy jelentéktelen korrekciót eredményező integrál összege. Az integrálokban előállított korrekciós tag nagyságrendje  $r_0^{m+n+5} \log 1/r_0$ .  $r_0$  kis értékei esetén  $I_{mn}(r_0)$  nagy pontossággal közelíthető 3–4 tagú kifejezésekkel és ezekre a hibabecslést  $0 \leq r_0 \leq 10^{-4}$  esetén elvégeztük. Miután eredményeink elméleti fizikai számítások szempontjából nem látszanak érdektelennek, azokat ezúton kívánjuk a kutatók számára hozzáférhetővé tenni.

A közölt számításokat Arató Máttyás IV. éves alkalmazott matematika-szakos hallgató végezte nyári termelési gyakorlata során Intézetünkben, Freud Géza irányításával.

#### A számítási módszer

Vezessük be az

$$s = r_1 + r_2, \quad t = r_1 - r_2, \quad u = r_{12}.$$

Hilleraas-féle koordinátákat. (V. ö. E. A. Hilleraas [4], vagy Gombás Pál loc. cit. [1], 166–167. old.) Ebben a koordinátarendszerben

$$(4) \quad I_{mn}(r_0) = \frac{\pi^2}{2^{m+n}} \int_0^\infty e^{-s} ds \int_0^s \frac{u du}{u + r_0} \int_{-u}^{+u} (s-t)^{m+1} (s+t)^{n+1} dt$$

(4)-ben a  $t$  és  $u$  szerinti integrálás közvetlenül elvégezhető :

$$(5) \quad \int_0^s \frac{u du}{u + r_0} \int_{-u}^{+u} (s-t)^{m+1} (s+t)^{n+1} dt = \sum_{k=0}^N [a_k + b_k \log(r_0 + s)]$$

ahol  $a_k$  és  $b_k$  az  $r_0$  egyszerű alakú függvényei. Ily módon

$$\begin{aligned}
 I_{mn}(r_0) &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^N [a_k + b_k \log(s + r_0)] s^k e^{-s} ds = \\
 (6) \quad & \sum_{k=0}^N k! a_k + e^{r_0} \int_{r_0}^\infty \sum_{k=0}^N b_k (x - r_0)^k \log x e^{-x} dx = \\
 &= \sum_{k=0}^N k! a_k + e^{r_0} \int_{r_0}^\infty \sum_{k=0}^N c_k x^k \log x e^{-x} dx.
 \end{aligned}$$

Ahol a  $c_k$ -k, mint az  $r_0$  függvényei, a

$$(7) \quad \sum_{k=0}^N b_k (x - r_0)^k \equiv \sum_{k=0}^N c_k x^k$$

azonosságból számíthatók. Most már csak azt kell észrevennünk, hogy

$$(8) \quad \int_{r_0}^\infty e^{-x} x^k \log x dx = \Gamma'(k+1) - \int_0^{r_0} e^{-x} x^k \log x dx,$$

amit (6)-ba helyettesítve :

$$(9) \quad I_{mn}(r_0) = \sum_{k=0}^N k! a_k + e^{r_0} \sum_{k=0}^N \Gamma'(k+1) c_k - e^{r_0} \int_0^{r_0} \left( \sum_{k=0}^N c_k x^k \right) e^{-x} \log x dx.$$

Vizsgáljuk meg most közelebbről az (5) kettős integrált :

$$Q(u, s) = \int_{-u}^u (s-t)^{m+1} (s+t)^{n+1} dt$$

$s$ -ben és  $u$ -ban homogén  $m+n+3$ -adfokú polinom, tehát

$$\frac{uQ(u, s)}{u+r_0} = \frac{-r_0 Q(-r_0, s)}{u+r_0} + R(u, s),$$

ahol  $R(u, s)$   $u$ -ban és  $s$ -ben polinom. Ily módon (5) jobboldalán

$$\sum_{k=0}^N b_k s^k = -r_0 Q(-r_0, s)$$



$r_0$ -ban és  $s$ -ben homogén  $N = m + n + 4$ -edfokú polinom. Tekintettel (7)-re,  $\sum_{k=0}^N c_k x^k$  is  $r_0$ -ban és  $x$ -ben homogén  $m + n + 4$ -edfokú polinom lesz, tehát az

$$\int_0^{r_0} \left( \sum_{k=0}^N c_k x^k \right) e^{-x} \log x \, dx$$

integrál nagyságrendje  $r_0^{n+5} \log 1/r_0$ .

### Számítási eredmények

#### A) Pontos képletek

$$I_{00}(r_0) = \frac{\pi^2}{3} \left\{ 60 - 32r_0 - 2r_0^2(1 + 6 \log r_0) + 2r_0^3(1 + r_0 \log r_0) + \right. \\ \left. + r_0^2 e^{r_0} [6\Gamma'(3) - 12r_0\Gamma'(2) + 4r_0^2\Gamma'(1)] - \right. \\ \left. - r_0^2 e^{r_0} \int_0^{r_0} (6x^2 - 12r_0x + 4r_0^2) e^{-x} \log x \, dx \right\}$$

$$I_{11}(r_0) = \frac{\pi^2}{60} \left\{ 7920 - 2944r_0 - 24r_0^2 \left( \frac{17}{2} + 30 \log r_0 \right) + 108r_0^3 + \right. \\ \left. + 2r_0^4(3 + 20 \log r_0) - 6r_0^5 - 6r_0^6 \log r_0 + r_0^2 e^{r_0} [30\Gamma'(5) - 120\Gamma'(4)r_0 + \right. \\ \left. + 160\Gamma'(3)r_0^2 - 80\Gamma'(2)r_0^3 + 16\Gamma'(1)r_0^4] - \right. \\ \left. - r_0^2 e^{r_0} \int_0^{r_0} (30x^4 - 120r_0x^3 + 160r_0^2x^2 - 80r_0^3x + 16r_0^4) e^{-x} \log x \, dx \right\}$$

$$I_{22}(r_0) = \frac{\pi^2}{560} \left\{ 937440 - 270336r_0 - 6!r_0^2 \left( \frac{157}{6} + 70 \log r_0 \right) + 58 \cdot 5!r_0^3 + \right. \\ \left. + 4!r_0^4 \left( \frac{37}{2} + 70 \log r_0 \right) - 232r_0^5 - (10 + 84 \log r_0)r_0^6 + 10r_0^7 + \right. \\ \left. + 10r_0^8 \log r_0 + r_0^2 e^{r_0} [70\Gamma'(7) - 420\Gamma'(6)r_0 + 980\Gamma'(5)r_0^2 - \right. \\ \left. - 1120\Gamma'(4)r_0^3 + 672\Gamma'(3)r_0^4 - 224\Gamma'(2)r_0^5 + 32\Gamma'(1)r_0^6] - \right. \\ \left. - r_0^2 e^{r_0} \int_0^{r_0} (70x^6 - 420r_0x^5 + 980r_0^2x^4 - 1120r_0^3x^3 + 672r_0^4x^2 - \right. \\ \left. - 224r_0^5x + 32r_0^6) \cdot e^{-x} \log x \, dx \right\}$$

$$I_{10}(r_0) = \frac{\pi^2}{3} \left\{ 150 - 64r_0 - 3r_0^2(1 + 6 \log r_0) + 2r_0^3 + r_0^4 \log r_0 + \right. \\ \left. + r_0^2 e^{r_0} [3\Gamma'(4) - 9r_0\Gamma'(3) + 8r_0^2\Gamma'(2) - 2r_0^3\Gamma'(1)] - \right. \\ \left. - r_0^2 e^{r_0} \int_0^{r_0} [3x^3 - 9x^2r_0 + 8xr_0^2 - 2r_0^3] e^{-x} \log x \, dx \right\}$$

$$I_{20}(r_0) = \frac{\pi^2}{10} \left\{ 1680 - 576r_0 - 6r_0^2(1 + 20 \log r_0) + 2r_0^3 - r_0^4 + r_0^5 + r_0^6 \log r_0 + \right. \\ \left. + r_0^2 e^{r_0} [5\Gamma'(5) - 20r_0\Gamma'(4) + 30r_0^2\Gamma'(3) - 20r_0^3\Gamma'(2) + 4r_0^4\Gamma'(1)] - \right. \\ \left. - r_0^2 e^{r_0} \int_0^{r_0} [5x^4 - 20r_0x^3 + 30r_0^2x^2 - 20r_0^3x + 4r_0^4] e^{-x} \log x \, dx \right\}$$

$$I_{21}(r_0) = \frac{\pi^2}{60} \left\{ 27720 - 8832r_0 - 30r_0^2(17 + 60 \log r_0) + 216r_0^3 + \right. \\ \left. + 3r_0^4(3 + 20 \log r_0) - 6r_0^5 - 3r_0^6 \log r_0 + \right. \\ \left. + r_0^2 e^{r_0} [15\Gamma'(6) - 75r_0\Gamma'(5) + 140r_0^2\Gamma'(4) - 129r_0^3\Gamma'(3) + 48r_0^4\Gamma'(2) - \right. \\ \left. - 8r_0^5\Gamma'(1)] - r_0^2 e^{r_0} \int_0^{r_0} [15x^5 - 75r_0x^4 + 140r_0^2x^3 - 120r_0^3x^2 + 48r_0^4x - \right. \\ \left. - 8r_0^5] e^{-x} \log x \, dx \right\}.$$

A szerzők  $I_{mn}(r_0)$ -t  $m = 3, n = 0, 1, 2, 3$  esetre is kiszámították. Ezekre az értékekre azonban csak a közelítő képleteket közöljük. Amennyiben a pontos kifejezésre is szükség mutatkoznék, azok közvetlen megkeresésre az Intézet útján a kutatók rendelkezésére állnak.

#### B) Közelítő képletek

$$\text{ha } 0 < r_0 < 10^{-4}$$

$$I_{00}(r_0) = \frac{\pi^2}{3} \left\{ 60 - 32r_0 - [2 - 6\Gamma'(3)] r_0^2 - 12r_0^2 \log r_0 \right\} + \varepsilon_{00}(r_0); \\ |\varepsilon_{00}(r_0)| < 4 \cdot 10^{-11}$$

$$I_{11}(r_0) = \frac{\pi^2}{60} \left\{ 7920 - 2944r_0 + [30\Gamma'(5) - 204] r_0^2 - 720r_0^2 \log r_0 \right\} + \varepsilon_{11}(r_0); \\ |\varepsilon_{11}(r_0)| < 10^{-10}$$

$$I_{22}(r_0) = \frac{\pi^2}{560} \left\{ 937440 - 270336r_0 - 5![157 + 420 \log r_0] r_0^2 + 70\Gamma'(7) r_0^2 \right\} + \\ + \varepsilon_{22}(r_0); |\varepsilon_{22}(r_0)| < 4 \cdot 10^{-10}$$

$$I_{10}(r_0) = \frac{\pi^2}{3} \left\{ 150 - 64r_0 - [3 - 3\Gamma'(4)] r_0^2 - 18r_0^2 \log r_0 \right\} + \varepsilon_{10}(r_0); \\ |\varepsilon_{10}(r_0)| < 10^{-11}$$

$$I_{20}(r_0) = \frac{\pi^2}{10} \left\{ 1680 - 576r_0 + [5\Gamma'(5) - 6] r_0^2 - 120r_0^2 \log r_0 \right\} + \varepsilon_{20}(r_0); \\ |\varepsilon_{20}(r_0)| < 4 \cdot 10^{-11}$$

$$I_{21}(r_0) = \frac{\pi^2}{60} \left\{ 27720 - 8832r_0 + [15\Gamma'(6) - 510] r_0^2 - 1800r_0^2 \log r_0 \right\} + \\ + \varepsilon_{21}(r_0); |\varepsilon_{21}(r_0)| < 10^{-10}$$

$$I_{30}(r_0) = \frac{\pi^2}{120} \left\{ 42840 - 13344r_0 + [15\Gamma'(6) - 330] r_0^2 - 1800r_0^2 \log r_0 \right\} + \\ + \varepsilon_{30}(r_0); |\varepsilon_{30}(r_0)| < 2 \cdot 10^{-11}$$

$$I_{31}(r_0) = \frac{\pi^2}{840} \left\{ 1698480 - 460032r_0 + [105\Gamma'(7) - 14580]r_0^2 - 75600r_0^2 \log r_0 \right\} + \\ + \varepsilon_{31}(r_0); |\varepsilon_{31}(r_0)| < 4 \cdot 10^{-10}$$

$$I_{32}(r_0) = \frac{\pi^2}{560} \left\{ 4218480 - 1081344r_0 - 7! \left[ \frac{157}{12} + 35 \log r_0 \right] r_0^2 + 35\Gamma'(8)r_0^2 \right\} + \\ + \varepsilon_{32}(r_0); |\varepsilon_{32}(r_0)| < 10^{-9}$$

$$I_{33}(r_0) = \frac{\pi^2}{10080} \left\{ 350179200 - 83017728r_0 - 8!r_0^2 \left[ \frac{3387}{24} + 315 \log r_0 \right] + \right. \\ \left. + 315r_0^2\Gamma'(9) \right\} + \varepsilon_{33}(r_0); |\varepsilon_{33}(r_0)| < 4 \cdot 10^{-9}$$

A  $\Gamma$ -függvény differenciálhányadosai a

$$\Gamma'(1) = -C = -0,577215664901532 \dots$$

és

$$\Gamma'(n+1) = n! \left[ \Gamma'(1) + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right]$$

képletekből számíthatók. (V. ö. N. Nielsen [5] 9. és 15. oldal.)

#### IRODALOM

1. *P. Gombás*: Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik. Verl. Birkhäuser, Basel, 1950.
2. *H. R. Hassé*: The polarisability of the helium atom. Proc. Cambr. Phil. Soc. 26 (1930).
3. *H. J. Kopineck*: Austausch- und andere Zweizentrenintegrale mit  $2s$  und  $2p$ -Funktionen. Zeitschrift für Naturforschung. 5a (1950), 420–431 old. és 6a (1951) 177–183. old.
4. *E. A. Hylleraas*: Neue Berechnung der Energie des Heliums im Grundzustande sowie des tiefsten Terms von Ortho-Helium. Zeitschrift für Physik, 54(1929) 337–366 o.
- N. Nielsen*: Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Verl. Teubner, Leipzig 1906.

#### ИСЧИСЛЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ОДНИМ ЦЕНТРОМ

М. АРАТО И Г. ФРАЙД

#### Резюме

Авторы знакомят с методом для исчисления интегралов типа

$$I_{m,n}(r_0) = \iint \frac{r_1^m r_2^n}{r_{12} + r_0} e^{-(r_1 + r_2)} d\tau_1 d\tau_2$$

и вычисляют их при  $m, n = 0, 1, 2, 3$ .

# LE CALCUL DES INTÉGRALES D'INTERACTION À UN SEUL CENTRE MODIFIÉ

M. ARATÓ ET G. FREUD

## Résumé

Les auteurs donnent une méthode pour calculer des intégrales du type

$$I_{m,n}(r_0) = \iint \frac{r_1^m r_2^n}{r_{12} + r_0} e^{-(r_1+r_2)} dr_1 dr_2$$

et ils les calculent pour les valeurs  $m, n = 0, 1, 2, 3$ .





# PÁRHUZAMOS ELEKTROMOS VEZETÉK MÁGNESES TERÉNEK SZÁMÍTÁSÁRÓL

I. rész

FREUD GÉZA

## ÖSSZEFOGLALÁS

Két párhuzamos  $\mu_1$  ill.  $\mu_2$  mágneses permeabilitású hengerben  $I$  ill.  $-I$  áram folyik, a környező közeg  $\mu_0$  permeabilitású szigetelő. Megengedjük, hogy az áram az időben változzék, de kikötjük, hogy az egyik vezetőkben folyó áram ne befolyásolja számottevően az árameloszlást a másik vezetőkben.

Vezessük be az alábbi jelöléseket:  $O_0$  jelenti az első vezetők henger középvonalát;  $O_1$  jelentse  $O_0$ -nak a második hengerre képezett inverz egyenesét,  $O_2$  az  $O_1$ -nek az első hengerre képezett inverz egyenesét, s. i. t.  $\Omega_0$  jelentse a második henger középvonalát és ebből az előbbihez hasonlóan kapjuk  $\Omega_1, \Omega_2 \dots$ -t. Jelentse  $H(P)$  a  $P$  egyenes mentén folyó egységnyi intenzitású, vonalszerű áram mágneses terét az üres térben. Akkor a mágneses teret a két vezetők közti térben a (21) képlet szolgáltatja. Ugyanakkor a mágneses tér a vezetők belsejében:

$$H_1 = H_{01} + H_v, \quad H_2 = H_{02} + H_w$$

ahol  $H_{01}$ , ill.  $H_{02}$  a vezetők belsejében a saját áramától származó tér a másik vezetők távollétében és a  $H_v, H_w$  járulékos tereket a (22), (23) képlet adja meg. Az  $I_n, I_n, J_n, J_n$  tüköráramok értéke az  $1a-3b$  táblázatok harmadik rovatában olvasható le,  $\xi_1, \xi_2, \eta_1$  és  $\eta_2$  értékét a (7) képlet adja.

A (21), (22), (23) sorok olyan geometriai sorral majorizálhatók, melynek hányadosa  $\xi, \xi_2 q$ , ahol  $q$  a geometria elrendezéstől függő állandó. Ha a két henger sugara sokkal kisebb, mint középvonalaik távolsága, akkor  $q \ll 1$ .

## Bevezetés

Párhuzamos elektromos vezeték mágneses terét és önindukcióját a technikában egy olyan közelítéssel szokás számolni, amely lényegében *Maxwell*-től [4] származik. Ez az eljárás az alábbi elhanyagolásokból indul ki:

1. Elhanyagolja, hogy egy vezetők belüli áramelemek kölcsönhatása következtében az áramsűrűség a vezetők középvonalától mért távolság függvényében változik. Ezt a jelenséget a továbbiakban sugárirányú áramkiszorításnak nevezzük.

2. Elhanyagolja, hogy a két vezetőkben folyó áramok kölcsönhatása következtében az egyes vezetőknek a másik vezetőkhez közelebb eső helyén nagyobb az áramsűrűség, mint a másik vezetőtől távolabb. Ezt a jelenséget a továbbiakban keresztirányú áramkiszorításnak nevezzük.

3. Elhanyagolja a mágneses erővonalak törését a vezető és a környező homogén közeg határán.

A sugárirányú és keresztirányú áramkiszorítás természetesen csak akkor lép fel, ha a vezetékben váltóáram folyik. Mindhárom elhanyagolás kiküszöbölésével *G. Mie* [5] végzett számítást. Számítása rendkívül bonyolult és eredményét az önindukcióra csak arra az esetre sikerült áttekinthető alakra hoznia, ha a mágneses erővonalak törését vagy teljesen elhanyagolja, vagy igen nagy permeabilitás esetén közelítéssel veszi számításba. *Mie* számítását *G. Jaumann* és *J. Jaumann* egyszerűsítette, ez az egyszerűsített számítás *A. Sommerfeld* [8] könyvében jelent meg. Számításuk azonban abból a feltevésből indul ki, hogy a vezetők anyagának vezetőképessége végtelen nagy és így az áram a vezetőknek csak a felületén terjed. Ilyen feltételek mellett sorfejtést adnak a mágneses térerősségre, önindukciószámítást nem végeznek. Egy, a felsoroltaktól eltérő számítási módszert *G. Gentile jr.* [1] és *T. Magri* [3] javasoltak, de a nagy számítástechnikai nehézségek miatt nem sikerült azt a végeredményekig követni.

Alábbi megfontolásaink alapja az a *Mie*-től származó megállapítás, hogy a keresztirányú áramkiszorítás a szokásos elrendezéseknél, amikor is a két vezető távolsága nagy a vezetők sugarához képest, elhanyagolható, ha az áram frekvenciája nem túl nagy. Megmutatjuk, hogy a mágneses tér és az önindukció együttható egyszerű eszközökkel, áttekinthető alakban kifejezhető, ha a keresztirányú áramkiszorítást csak mint korrekciós tagot vesszük számításba. Eredményünk nagy permeabilitású (ferromágneses) vezetékanyag esetén is érvényes, amíg a mágneses térerősség ingadozása a mágnesezési görbe lineáris szakaszára esik. A végeredmény szigorúan érvényes, elhanyagolás nélkül abban az esetben, ha az áram frekvenciája zérus, és igen jó közelítést szolgáltat alacsony frekvenciák esetén. Számításunk egész menetében a kvázistacionárius esetre szorítkozunk, mert igen nagy frekvenciák esetén a keresztirányú áramkiszorítás nem hanyagolható el. Igen nagy frekvenciák esetén a *G. Jaumann* és *J. Jaumann* által kidolgozott közelítő számítás használható. Az alábbiakban a mágneses tér számítását ismertetjük. Az önindukció együttható meghatározását, valamint a keresztirányú áramkiszorításból származó korrekciós tag számítását jelen dolgozat ugyanezen a helyen megjelenő folytatásában fogjuk ismertetni.

## I. Áramfonal mágneses tere mágneseződő homogén henger jelenlétében

Az  $a$  sugarú,  $\mu_1$  permeabilitású  $V$  vezetőhenger tengelyétől  $R$  távolságban, a hengerrel párhuzamosan  $I$  intenzitású vonalszerű áram folyik. Határozzuk meg a mágneses teret, ha a hengeren kívül az egész teret  $\mu_0$  permeabilitású homogén közeg tölti ki. Kimutatjuk, hogy a hengeren kívül a henger mágneseződése útján létrejött járulékos mágneses tér helyettesíthető két, a hengerrel párhuzamos  $I_1$  és  $I_1^*$  vonalszerű áram mágneses terével. Ha a mágneses teret keltő  $I$  áram egyenese az  $a$  sugarú  $k$  keresztmetszetkör síkját az  $\Omega$  pontban metszi, akkor az  $I_1$  vonalszerű áram egyenese a keresztmetszet síkot  $\Omega$ -nak  $k$ -ra vonatkozó  $\Omega_1$  inverz pontjában metszi, melynek távolsága a  $k$  kör 0 középpontjától  $a^2/R$ . Az  $I_1^*$  áram a  $V$  henger tengelyében folyik. Ugyanakkor a  $V$  henger belsejében olyan mágneses tér keletkezik, mintha az  $I$  áram helyén csak  $I'$  áram folyna és az egész teret homogén  $\mu_1$  permeabilitású közeg töltene





$$(6) \quad I_1 = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} I = -I^*; \quad I' = \frac{2\mu_0}{\mu_1 + \mu_0} I$$

és könnyen meggyőződhetünk róla, hogy az ennek alapján számított mágneses tér a valóságos árameloszlással minden zárt görbére kielégíti az  $\oint \mathbf{H} ds = \frac{4\pi}{c} I_{\text{hurkolt}}$  gerjesztési törvényt. Ezzel feltételünk helyességét igazoltuk.

## II. Párhuzamos vezeték mágneses terének számítása

A könnyebb áttekintés érdekében a jelöléseket az első fejezethez illesztjük. A két párhuzamos körhenger alakú vezető legyen  $V$  és  $W$ , keresztmetszet-köreik legyenek  $k$  és  $\kappa$ , ezek középpontja  $0 \equiv 0_0$  és  $\Omega \equiv \Omega_0$ , sugaraik  $a$  és  $\alpha$ , mindkét hengert egy-egy homogén vezetőközeg tölti ki, melyek mágneses permeabilitása  $\mu_1$ , ill.  $\mu_2$ . A  $V$ -ben folyó áram legyen  $I$ , a  $W$ -ben folyó áram legyen  $J = -I$ . Az  $0$  pontnak  $\kappa$ -ra vonatkozó inverze legyen  $0_1$ ,  $0_1$ -nek  $k$ -ra vonatkozó inverze legyen  $0_2$ ,  $\dots$   $0_{2k-1}$ -nek  $k$ -ra vonatkozó inverze legyen  $0_{2k}$ ,  $0_{2k}$ -nak  $\kappa$ -ra vonatkozó inverze legyen  $0_{2k+1}$ ,  $\dots$  s. i. t. Hasonlóan  $\Omega$ -nak  $k$ -ra vonatkozó inverze legyen  $\Omega_1$ ,  $\Omega_1$ -nek  $\kappa$ -ra vonatkozó inverze legyen  $\Omega_2$ ,  $\dots$   $\Omega_{2k-1}$ -nek  $\kappa$ -ra vonatkozó inverze legyen  $\Omega_{2k}$ ,  $\Omega_{2k}$ -nak  $k$ -ra vonatkozó inverze legyen  $\Omega_{2k+1}$ ,  $\dots$  s. i. t. A továbbiakban a rövidség kedvéért az  $0_k$ , ill.  $\Omega_k$ -n átmenő, a  $V$  és  $W$  hengerek tengelyével párhuzamos egyeneseket is  $0_k$ , ill.  $\Omega_k$ -val fogom jelölni.

A bevezetésben tárgyalt módon a keresztirányú áramkiszorítást elhanyagolva, a vezetőkben olyan áramsűrűségeloszlás alakul ki, mintha a másik vezető nem volna jelen; a tengelytől mért távolságot  $r$ -rel jelölve, az áramsűrűség arányos (Gauss-féle mértékrendszerben számolva)

$$J_0 \left( \sqrt{i} \sqrt{4\pi\sigma\mu\omega} \frac{r}{c} \right)$$

-vel, ahol  $\sigma$  a vezető anyagának vezetőképessége és  $\omega$  az áram körfrekvenciája. Ez az áram (szintén a másik vezető hatásának elhanyagolásával) ugyanebben a vezetőben olyan mágneses teret kelt, melynek erővonalai a vezető tengelyével koncentrikus körök, és a mágneses térerősség arányos

$$J_0' \left( \sqrt{i} \sqrt{4\pi\sigma\mu\omega} \frac{r}{c} \right)$$

-vel. (V. ö. Joos [2] 287–289. o.; Simonyi [7] 231–239 o.; Novobátzky–Neugebauer [6] 117–118. o.) A továbbiakban számításaink áttekinthetőségének megkönnyítése céljából csak az erre szuperponálódó járulékos belső mágneses teret fogjuk feltüntetni. Az eredő mágneses teret nyilván megkapjuk, ha az  $I$  áram által keltett mágneses térre szuperponáljuk a  $J$  áram által keltett mágneses teret; számítsuk ki pl. az  $I$  áram mágneses terét.

A  $V$  vezetőhengeren kívül, tekintettel arra, hogy az áramsűrűség eloszlása a vezető keresztmetszetében radiálisan szimmetrikus, a mágneses tér úgy

számítható, mintha az egész  $I \equiv I_0$  áram  $0_0$ -ba lenne koncentrálna. Az előző fejezet eredménye szerint első közelítésben a mágneses tér  $W$  belsejében egy  $0_0$ -on átfolyó  $I'_0 = \frac{2\mu_0}{\mu_2 + \mu_0} I \equiv \xi_2 I$  áramtól származtatható, és a két vezető közti térben első közelítésben  $I_0$  mágneses terére olyan mágneses tér szuperponálódik, mely  $0_1$ , ill.  $\Omega_0$ -on átfolyó  $I_1 = \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_2 + \mu_0} I \equiv \xi_2 I$ , ill.  $I_1^* = -I_1$  áramoktól származtatható. Ebből a második közelítést úgy kapjuk, hogy most már ezen látszólagos  $I_1$  és  $I_1^*$  áramok által a  $V$  vezetőhengerben keltett látszólagos áramokat is számításba vesszük. Fontos megjegyeznünk, hogy az  $I_1$  és  $I_1^*$  által  $0_0$ -ban keltett látszólagos áramok egymást lerontják és ez a magasabb közelítéseknél ismétlődik, ami eredményeinket egyszerűsíti. Az itt vázolt sorozatos közelítést minden határon túl folytatva, eredményünket az alábbi sémába foglalhatjuk:

1a táblázat A két vezető között : áram			2a táblázat A $V$ vezetőben : áram			3a táblázat A $W$ vezetőben : áram		
elnevezése	egyene	intenzitása	elnevezése	egyene	intenzitása	elnevezése	egyene	intenzitása
$I_0$	$0_0$	$I$	$I'_1$	$0_1$	$\eta_1 \xi_2 I$	$I'_0$	$0_0$	$\eta_2 I$
$I_1$	$0_1$	$\xi_2 I$	$I^{*'}_1$	$\Omega_0$	$-\eta_1 \xi_2 I$	$I'_2$	$0_2$	$\eta_2 \xi_1 \xi_2 I$
$I_1^*$	$\Omega_0$	$-\xi_2 I$	$I'_3$	$0_3$	$\eta_1 \xi_1 \xi_2^2 I$	$I^*_2$	$\Omega_1$	$-\eta_2 \xi_1 \xi_2 I$
$I_2$	$0_2$	$\xi_1 \xi_2 I$	$I^{*'}_3$	$\Omega_2$	$-\eta_1 \xi_1 \xi_2^2 I$	.	.	.
$I^*_2$	$\Omega_1$	$-\xi_1 \xi_2 I$	.	.	.	.	.	.
$I_3$	$0_3$	$\xi_1 \xi_2^2 I$	.	.	.	.	.	.
$I^*_3$	$\Omega_2$	$-\xi_1 \xi_2^2 I$	.	.	.	$I'_{2n}$	$0_{2n}$	$\eta_2 \xi_1 \xi_2^n I$
.	.	.	$I'_{2n+1}$	$0_{2n+1}$	$\eta_1 \xi_1 \xi_2^{n+1} I$	$I^{*'}_{2n}$	$\Omega_{2n-1}$	$-\eta_2 \xi_1 \xi_2^n I$
.	.	.	$I^{*'}_{2n-1}$	$\Omega_{2n}$	$-\eta_1 \xi_1 \xi_2^{n+1} I$	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
$I_{2n}$	$0_{2n}$	$\xi_1 \xi_2^n I$	.	.	.	.	.	.
$I^*_{2n}$	$\Omega_{2n-1}$	$-\xi_1 \xi_2^n I$	.	.	.	.	.	.
$I_{2n+1}$	$0_{2n+1}$	$\xi_1 \xi_2^{n+1} I$	.	.	.	.	.	.
$I^*_{2n+1}$	$\Omega_{2n}$	$-\xi_1 \xi_2^{n+1} I$	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

Hasonló séma segítségével határozhatjuk meg a  $W$  vezetőben folyó áram által keltett eredő mágneses teret:

1b táblázat A két vezető között : áram			2b táblázat A $V$ vezetőkben : áram			3b táblázat A $W$ vezetőkben : áram		
elne- vezése	egye- nese	inten- zitása	elne- vezése	egye- nese	inten- zitása	elne- vezése	egye- nese	inten- zitása
$J_0$	$\Omega_0$	$-I$	$J'_0$	$\Omega_0$	$-\eta_1 I$	$J'_1$	$\Omega_1$	$-\eta_2 \xi_1 I$
$J_1$	$\Omega_1$	$-\xi_1 I$	$J'_2$	$\Omega_2$	$-\eta_1 \xi_1 \xi_2 I$	$J^{*'}_1$	$0_0$	$\eta_2 \xi_1 I$
$J^*_1$	$0_0$	$\xi_1 I$	$J^{*'}_2$	$0_1$	$\eta_1 \xi_1 \xi_2 I$	$J'_3$	$\Omega_3$	$-\eta_2 \xi_1^2 \xi_2 I$
$J_2$	$\Omega_2$	$-\xi_1 \xi_2 I$	.	.	.	$J^{*'}_3$	$0_2$	$\eta_2 \xi_1^2 \xi_2 I$
$J^*_2$	$0_1$	$\xi_1 \xi_2 I$	.	.	.	.	.	.
$J_3$	$\Omega_3$	$-\xi_1^2 \xi_2 I$	.	.	.	.	.	.
$J^*_3$	$0_2$	$\xi_1^2 \xi_2 I$	$J'_{2n}$	$\Omega_{2n}$	$-\eta_1 \xi_1^n \xi_2^n I$	.	.	.
.	.	.	$J^{*'}_{2n}$	$0_{2n-1}$	$\eta_1 \xi_1^n \xi_2^n I$	$J'_{2n+1}$	$\Omega_{2n+1}$	$-\eta_2 \xi_1^{n+1} \xi_2^n I$
.	.	.	.	.	.	$J^{*'}_{2n+1}$	$0_{2n}$	$\eta_2 \xi_1^{n+1} \xi_2^n I$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
$J_{2n}$	$\Omega_{2n}$	$-\xi_1^n \xi_2^n I$	.	.	.	.	.	.
$J^*_{2n}$	$0_{2n-1}$	$\xi_1^n \xi_2^n I$	.	.	.	.	.	.
$J_{2n+1}$	$\Omega_{2n+1}$	$-\xi_1^{n+1} \xi_2^n I$	.	.	.	.	.	.
$J^*_{2n+1}$	$0_{2n}$	$\xi_1^{n+1} \xi_2^n I$	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

A táblázatokban a

$$(7) \quad \xi_1 = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0}; \quad \xi_2 = \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_2 + \mu_0}; \quad \eta_1 = \frac{2\mu_0}{\mu_1 + \mu_0}; \quad \eta_2 = \frac{2\mu_0}{\mu_2 + \mu_0}$$

jelölést használtuk.

A továbbiakban az  $E$  egyenesen átfolyó egységnyi intenzitású mágneses teret  $H(E)$ -val jelöljük. A tér egy  $P$  pontjában a  $H(E)$  merőleges az  $(E, P)$  síkra, értelmé az Ampère-féle úszási szabály szerinti és abszolút értéke  $\frac{2}{cx}$ , ahol  $x$  a  $P$  pont távolsága az  $E$  egyenestől. Ezzel a jelölési módszerrel a mágneses tér intenzitása most már könnyen felírható :

A két vezető között

$$(8) \quad H_k = \sum_{n=0}^{\infty} (I_n + J^*_{n+1}) H(0_n) + \sum_{n=0}^{\infty} (J_n + I^*_{n+1}) H(\Omega_n).$$

A  $V$  vezető belsejében a járulékos tér

$$(9) \quad H_V = \sum_{n=0}^{\infty} (J_{2n} + I_{2n+1}^{*'}) H(\Omega_{2n}) + \sum_{n=0}^{\infty} (I'_{2n+1} + J_{2n+2}^{*'}) H(\Omega_{2n+1})$$

és végül a  $W$  vezető belsejében a járulékos tér:

$$(10) \quad H_W = \sum_{n=0}^{\infty} (I'_{2n} + J_{2n+1}^{*'}) H(\Omega_{2n}) + \sum_{n=0}^{\infty} (J'_{2n+1} + I_{2n+2}^{*'}) H(\Omega_{2n+1})$$

### III. Konvergencia megfontolások

Jelöljük  $0_{2n}$  távolságát  $0_0$ -tól  $r_{2n}$ -nel,  $0_{2n+1}$  távolságát  $\Omega_0$ -tól  $\varrho_{2n+1}$ -nel,  $\Omega_{2n}$  távolságát  $\Omega_0$ -tól  $\varrho_{2n}$ -nel,  $\Omega_{2n+1}$  távolságát  $0_0$ -tól  $r_{2n+1}$ -nel. Miután a geometriai értelmezés alapján az  $\{r_{2n}\}, \{r_{2n+1}\}, \{\varrho_{2n}\}, \{\varrho_{2n+1}\}$  sorozatok monoton növekedőek, és az  $a$ , ill.  $\alpha$  korlát alatt maradnak, a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n} = r_{\infty V} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n+1} = r_{\infty W}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{2n+1} = \varrho_{\infty V} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{2n} = \varrho_{\infty W}$$

határértékek léteznek. Bebizonyítjuk, hogy az  $(0_{2n}), (\Omega_{2n+1}); (0_{2n+1}), (\Omega_{2n})$  pontsorok hatáppontjai  $n \rightarrow \infty$  esetén a  $V$ , ill.  $W$  henger belsejébe esnek. Vegyük pl. az  $(0_{2n+1})$  sorozatot. Az  $0_n$  és  $r_n$  definíciója alapján, ha  $0_0 \Omega_0 = d$ :

$$(11) \quad r_{2n+1} = \frac{\alpha^2}{d - \frac{a^2}{d - r_{2n-1}}}$$

tehát  $n \rightarrow \infty$  esetén

$$(12) \quad r_{\infty W} = \frac{\alpha^2}{d - \frac{a^2}{d - r_{\infty W}}}$$

és rendezés után

$$(13) \quad dr_{\infty W}^2 - (d^2 - a^2 + \alpha^2) r_{\infty W} + \alpha^2 d = 0$$

(13) diszkriminánsa:

$$(d^2 - a^2 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 d^2 = [d^2 - (a + \alpha)^2] [d^2 - (a - \alpha)^2] > 0$$

mert  $d > a + \alpha$ ; tehát (11)-nek két különböző valós gyöke van, melyek a Descartes-féle jelszabály szerint pozitívek, és a két gyök szorzata  $\frac{\alpha^2 d}{d} = \alpha^2$ .

Tehát (11) egyik gyöke  $\alpha$ -nál nagyobb, másik gyöke pozitív és  $\alpha$ -nál kisebb. Ily módon  $0_{\infty W}$  nyilván (13) kisebbik gyöke lesz, tehát

$$r_{\infty W} < \alpha,$$



ami éppen azt jelenti, hogy  $0_{\infty W}$  a  $W$  henger belsejébe esik. Ugyanígy mutat-  
ható ki, hogy  $0_{\infty V}$  a  $V$  henger belsejébe esik. Miután  $\varrho_{\infty W}$  ugyancsak gyöke  
a (12), ill. (13) egyenletnek, tehát

$$(14) \quad \varrho_{\infty W} = r_{\infty W} \text{ és ugyanígy } \varrho_{\infty V} = r_{\infty V}.$$

Ebből következik, hogy a  $\{\mathbf{H}(0_n)\}$ ,  $\{\mathbf{H}(\Omega_n)\}$  vektorsorozatok minden egyes  
tagja az egész  $V$  és  $W$ -n kívüli térben abszolút értékre nézve egy közös  $K =$   
 $= K(a, \alpha, d)$  korlát alatt marad. Tehát (8) jobboldalán a két sor a

$$(15) \quad KI \sum (2\xi_1^n \xi_2^n + \xi_1^n \xi_2^{n+1} + \xi_1^{n+1} \xi_2^n)$$

numerikus sorral majorizálható. Tekintettel arra, hogy

$$|\xi_1| = \left| \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} \right| < 1, \quad |\xi_2| = \left| \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_2 + \mu_0} \right| < 1$$

a (12) sor abszolút konvergencia, tehát (8) jobboldalán mindkét sor az egész  
 $V$  és  $W$ -n kívüli térben egyenletesen abszolút konvergencia. Hasonló módon  
közvetlenül látható, hogy a (9), ill. (10) jobboldalán álló sorok  $V$ , ill.  $W$  belsejé-  
ben egyenletesen abszolút konvergensek. Be kell még bizonyítanunk, hogy  
a  $V$ , ill.  $W$  határán  $\mathbf{H}$  tangenciális komponense és  $\mu\mathbf{H} = \mathbf{B}$  normális kompo-  
nense (jelölésben  $H_t$  és  $\mu H_n$ ) folytonosak.

A (8) sor tagjait a szereplő sorok abszolút konvergenciája miatt akárhog-  
y átrendezhetjük és kiegészíthetjük az ugyancsak abszolút konvergencia

$$- \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1} \mathbf{H}(\Omega_0) - \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1}^* \mathbf{H}(\Omega_0) - \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+2} \mathbf{H}(\Omega_0) - \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+2}^* \mathbf{H}(\Omega_0) = 0$$

sorok tagjaival, ilymódon lesz :

$$(16) \quad \begin{aligned} \mathbf{H}_k = & J_0 \mathbf{H}(\Omega_0) + \sum_{n=0}^{\infty} [I_{2n} \mathbf{H}(O_{2n}) + I_{2n+1} \mathbf{H}(O_{2n+1}) - I_{2n+1} \mathbf{H}(\Omega_0)] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [J_{2n+1}^* \mathbf{H}(O_{2n}) + J_{2n+2}^* \mathbf{H}(O_{2n+1}) - J_{2n+2}^* \mathbf{H}(\Omega_0)] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [I_{2n}^* \mathbf{H}(\Omega_{2n-1}) + I_{2n+1}^* \mathbf{H}(\Omega_{2n}) - I_{2n+1}^* \mathbf{H}(\Omega_0)] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [J_{2n-1} \mathbf{H}(\Omega_{2n-1}) + J_{2n} \mathbf{H}(\Omega_{2n}) - J_{2n} \mathbf{H}(\Omega_0)] \end{aligned}$$

Mármint a  $W$  vezető határán a benne folyó  $J$  áram által közvetlenül keltett  
mágneses tér tangenciális irányú és (a radiálisan szimmetrikus árameloszlás

miatt) egyenlő  $J_0 \mathbf{H}(\Omega_0)$ -al; másrészt a jelen dolgozat I. részében levezetett eredmények szerint a  $W$  vezetőhenger határán

$$I_{2n} \mathbf{H}(O_{2n}) + I_{2n+1} \mathbf{H}(O_{2n+1}) - I_{2n+1} \mathbf{H}(\Omega_0) \quad \text{és} \quad I'_{2n} \mathbf{H}(O_{2n})$$

$$J_{2n+1}^* \mathbf{H}(O_{2n}) + J_{2n+2}^* \mathbf{H}(O_{2n+1}) - J_{2n+2}^* \mathbf{H}(\Omega_0) \quad \text{és} \quad J_{2n+1}^{*'} \mathbf{H}(O_{2n})$$

$$17) \quad I_{2n}^* \mathbf{H}(\Omega_{2n-1}) + I_{2n+1}^* \mathbf{H}(\Omega_{2n}) - I_{2n+1}^* \mathbf{H}(\Omega_0) \quad \text{és} \quad I_{2n}^{*'} \mathbf{H}(\Omega_{2n-1})$$

$$J_{2n-1} \mathbf{H}(\Omega_{2n-1}) + J_{2n} \mathbf{H}(\Omega_{2n}) - J_{2n} \mathbf{H}(\Omega_0) \quad \text{és} \quad J_{2n-1}' \mathbf{H}(\Omega_{2n-1})$$

vektorok tangenciális komponensei rendre egyenlőek. Továbbá ugyancsak az I. részben levezetett eredmények szerint, ha (17)-ben az első oszlopot  $\mu_0$ -al, a második oszlopot  $\mu_2$ -vel szorozzuk, az ugyanazon sorban álló vektorok normális komponense  $W$  határán megegyezik. Ebből, tekintettel (10) és (16)-ra következik, hogy az elektrodinamikai határfeltételek teljesülnek.  $V$  határán a határfeltételek teljesülése analóg módon igazolható. Végül kimutatható, hogy a (8), (9) és (10) egyenletekkel definiált mágneses tér kielégíti az

$\oint \mathbf{H}_s ds = \frac{4\pi}{c} I_{\text{hurkolt}}$  gerjesztési törvényt az egész térben, a valóságos áram-eloszlásra vonatkozólag. Miután abban az esetben, ha  $\mu_1 \gg \mu_0$ ,  $\mu_2 \gg \mu_0$  a (15) majoráns sor konvergenciája igen lassú, kíváncsatos megmutatni, hogy a szereplő sorok konvergenciája a tagok átzárójelezésével nagymértékben fokozható. (11) és (12)-ből, tekintettel (14)-re és arra, hogy

$$\varrho_{2n} = \frac{a^2}{d - r_{2n-1}}, \quad \varrho_{\infty V} = \frac{a^2}{d - r_{\infty W}},$$

$$(18) \quad \frac{r_{\infty W} - r_{2n+1}}{r_{\infty W} - r_{2n-1}} = \frac{a^2 \alpha^2}{(d - r_{2n-1})(d - r_{\infty W})(d - \varrho_{\infty V})(d - \varrho_{2n})} < \left[ \frac{a\alpha}{(d - r_{\infty V})(d - r_{\infty W})} \right]^2 = q^2$$

és ugyanez a becslés érvényes az  $\frac{r_{\infty V} - r_{2n+2}}{r_{\infty V} - r_{2n}}$ , stb. hányadosokra is. (18)-ból

$$(19a) \quad r_{\infty W} - r_{2n+1} < (r_{\infty W} - r_1) q^{2n} \quad n = 1, 2, \dots$$

és hasonlóan bizonyítható, hogy

$$(19b) \quad r_{\infty V} - r_{2n} < (r_{\infty V} - r_0) q^{2n} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(19c) \quad \varrho_{\infty V} - \varrho_{2n+1} < (\varrho_{\infty V} - \varrho_1) q^{2n} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(19d) \quad \varrho_{\infty W} - \varrho_{2n} < (\varrho_{\infty W} - \varrho_0) q^{2n} \quad n = 1, 2, \dots$$

(14)-ből és (19)-ből

$$(20) \quad |r_{2n+1} - \varrho_{2n}| < K_1 q^{2n}; \quad |\varrho_{2n+1} - r_{2n}| < K_2 q^{2n},$$

ahol  $K_1$  és  $K_2$   $d$ ,  $a$  és  $\alpha$ -tól függő állandók.\*\* Tekintettel arra, hogy amint a táblázatokból leolvasható

$$I_n^* = -I_n, \quad J_n^* = -J_n, \quad I_n^{*'} = -I_n', \quad J_n^{*'} = -J_n'$$

\* Pontosabb számítás szerint  $K_1 = r_1$ ,  $K_2 = \varrho_1$  helyettesíthető.

(8), (9) és (10) alábbi átzárójelzését választjuk :

$$(21) \quad \mathbf{H}_k = I_0 \mathbf{H}(O_0) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n [\mathbf{H}(O_n) - \mathbf{H}(O_{n-1})] +$$

$$+ J_0 \mathbf{H}(\Omega_0) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n [\mathbf{H}(\Omega_n) - \mathbf{H}(O_{n-1})]$$

$$(22) \quad \mathbf{H}_V = J'_0 \mathbf{H}(\Omega_0) + \sum_{n=0}^{\infty} I'_{2n+1} [\mathbf{H}(O_{2n+1}) - \mathbf{H}(\Omega_{2n})] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} J'_{2n} [\mathbf{H}(\Omega_{2n}) - \mathbf{H}(O_{2n-1})]$$

$$(23) \quad \mathbf{H}_W = I'_0 \mathbf{H}(O_0) + \sum_{n=1}^{\infty} I'_{2n} [\mathbf{H}(O_{2n}) - \mathbf{H}(\Omega_{2n-1})] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} J'_{2n+1} [\mathbf{H}(\Omega_{2n+1}) - \mathbf{H}(O_{2n})]$$

(20) alapján könnyen belátható, hogy a (21), (22), (23) képletekben szereplő sorok

$$(24) \quad K^* I \sum (\xi_1 \xi_2 q)^n$$

sorral majorizálhatók. Ha  $a \ll d$ ,  $\alpha \ll d$  (azaz a két vezető messze van egymástól), akkor  $q \ll 1$ , tehát (24) sokkal gyorsabban konvergál, mint (15).

## IRODALOM

1. *G. Gentile, jr.*: Per la teoria degli effetti polarizzanti delle fenditure. Nuovo Cimento I., 1943. 161 — 175. old.
2. *G. Joos*: Lehrbuch der Theoretischen Physik 7. Aufl. Leipzig, 1950.
3. *Magri Materossi*: Il problema di Lecher. Nuovo Cimento I. (1943) 190—204. o.
4. *J. C. Maxwell*: A treatise on electricity and magnetism. 3. ed. Oxford, 1892. § 685—686.
5. *G. Mie*: Annalen der Physik 2 (1900) 201. o.
6. *Novobátzky—Neugebauer*: Elektrodinamika és Optika. Tankönyvkiadó, 1951. Budapest.
7. *Simonyi K.*: Elméleti Villamosságtan, Tankönyvkiadó, Bp. 1952.
8. *A. Sommerfeld*: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 3. (Elektrodynamik) 203—214. old.

# ОБ ИСЧИСЛЕНИИ МАГНИТНО-СИЛОВОГО ПОЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРОВОДА (ЧАСТЬ 1)

Г. ФРАЙД

## Резюме

В двух параллельных цилиндрах магнитной проницаемостью в  $\mu_1$  и  $\mu_2$  текут токи  $I$  и  $(-I)$ . Окружающее средство — изолятор с проницаемостью в  $\mu_0$ . Ток может переменяться по времени, а ставим условие, что ток, текущий в одном проводе, не значительно воздействует на распределение тока в другом проводе.

Введем следующие обозначения:  $O_0$  — ось первого проводящего цилиндра;  $O_1$  — инверсная прямая  $O_0$  на второй цилиндр;  $O_2$  — инверсная прямая  $O_1$  на первый цилиндр и т. д.  $O_0$  ось второго цилиндра, из этого получаются  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  подобно прежнему. Пусть  $H(P)$  означает магнитно-силовое поле линейного тока, текущего по прямой  $P$  с единичной силой в пустом пространстве. Тогда магнитно-силовое поле в пространстве между двумя проводами доставляется формулой (21). В то же время магнитно-силовое поле во внутренней части проводов:  $H_1 = H_{01} + H_V$ ,  $H_2 = H_{02} + H_W$  где  $H_{01}$  и  $H_{02}$  — поле во внутренности провода, происходящее с собственным током в отсутствии другого метода, а аксессуарные поля сдаются формулами (22), (23). Величины зеркальных токов  $I_n, I'_n, J_n, J'_n$  снимаются из третьей рубрики таблиц 1а — 3б. Величины  $\xi_1, \xi_2, \eta_1$  и  $\eta_2$  даются формулой (7). Ряды (21), (22), (23) мажоризируемы геометрическим рядом с частном  $\xi_1 \xi_2 q$ , где  $q$  — постоянная, зависящая от геометрической расстановки. Если радиус двух цилиндров значительно меньше, чем расстояние их осей, тогда  $q \ll 1$ .

## SUR LE CALCUL DU CHAMP MAGNÉTIQUE D'UNE CONDUITE ÉLECTRIQUE PARALLÈLE (Partie I.)

G. FREUD

## Résumé

Dans deux cylindres parallèles ayant une perméabilité magnétique  $\mu_1$  respectivement  $\mu_2$  entourée par une matière isolante d'une perméabilité  $\mu_0$  il court un courant électrique  $I$ , respectivement  $-I$ . Nous permettons que le courant varie durant le temps mais nous supposons que le courant dans un des conducteurs n'influence pas essentiellement la distribution du courant dans l'autre conducteur.

Introduisons les notations suivantes:  $O_0$  signifie l'axe du premier conducteur: cylindre  $O_1$  signifiera la droite inverse de  $O_0$  par rapport du deuxième cylindre,  $O_2$  signifie la droite inverse de  $O_1$  par rapport du premier cylindre, etc.  $\Omega_1$  signifie l'axe du second cylindre, et de celle-ci on obtient d'une manière semblable à ce qui précède, les lignes  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ . Lorsque  $H(\sigma)$  signifie le champ magnétique du courant linéaire d'une intensité égale à l'unité courant le long de la droite  $\sigma$ , dans l'espace vide, le champ magnétique dans l'espace entre les deux conducteurs sera fourni alors par la formule (21). En même temps, pour le champ magnétique dans l'intérieur des conducteurs, on a

$$H_1 = H_{01} + H_V, \quad H_2 = H_{02} + H_W$$

ou  $H_{01}$ , respectivement  $H_{02}$ , signifie le champ engendré à l'intérieur du conducteur par son propre courant dans l'absence de l'autre conducteur et les champs subsidiaires  $H_V, H_W$  sont donnés par les formules (22), (23). Les valeurs des courants  $I_n, J_n, I'_n, J'_n$  sont données par la troisième rubrique des tabelles 1а — 3б, tandis que les valeurs de  $\xi_1, \xi_2, \eta_1$  et  $\eta_2$  sont fournies par la formule (7).

Les séries (21), (22), (23) peuvent être majorées par une série géométrique dont le quotient est  $\xi_1 \xi_2 q$  ou  $q$  est une constante dépendant de l'arrangement géométrique. Si les rayons des deux cylindres sont beaucoup plus petits que la distance entre leurs axes, on a  $q \ll 1$ .





# A STATISZTIKUS ATOMMODELL KINETIKUS ENERGIA KORREKCIÓJÁRÓL

FREUD GÉZA

## ÖSSZEFOGLALÁS

A szerző kimutatja, hogy Fényes I. [5] dolgozata, melyben a Weizsäckertől származó kinetikus energia korrekciót próbálja helyesbiteni, nem kielégítő következtetésre épül és alapvető kiegészítésre szorul.

Weizsäcker szerint [1], ha  $\nu(x, y, z)$  egy Fermi-gáz részecskéinek sűrűsége, akkor a kinetikus energia sűrűségét az

$$U = U^0 + U^i$$

kifejezés szolgáltatja, ahol  $U^0 = \frac{3h^2}{40m} \left( \frac{3}{-} \right)^{2/3} \nu^{5/3}$  a nullaponti energia sűrűsége és  $U^i$  (az úgynevezett Weizsäcker-korrektúra) az alábbi képlettel számítható :

$$(1) \quad U^i = \frac{h^2}{32\pi^2 m} \frac{(\text{grad } \nu)^2}{\nu}.$$

Hellmann [2] részletesebb indokolást fűz az (1) összefüggéshez. Ugyanezt kérdést más oldalról közelítik meg Fényes ([3], [4], [5]) és [5] dolgozatában az (1) képletet egy  $\frac{2}{9}$  tényezővel módosítja a következőképpen :

$$(1a) \quad U^{i*} = \frac{2}{9} U^i = \frac{2}{9} \frac{h^2}{32\pi^2 m} \frac{(\text{grad } \nu)^2}{\nu}.$$

Gombás [6] könyvében az irodalmi idézetekhez fűzött zárójeles megjegyzésben (1a)-t hibásnak minősíti. Bár ez a kérdés önmagában is jelentős és a hazai statisztikus atomelméleti kutatók körében ismételt vita tárgyát képezte, Fényes munkájáról bírálat a szakirodalomban mindeztideig nem jelent meg. A továbbiakban nem térünk ki az egész problémakörre, melybe az olvasó az idézett művekből betekintést nyerhet, hanem csak az [5] dolgozat, illetőleg az (1a) képlet bírálatával foglalkozunk.

Fényes ez utóbbi dolgozatában megállapítja, hogy  $U^i$ -nak a részecske  $x$  irányú mozgásából eredő része  $\left( \frac{d \log r_x}{dx} \right)^2$  középértékével arányos. Itt  $p_x$  egy

rögzített kvantumállapothoz tartozó impulzus  $x$ -komponensét jelenti, amely a használt közelítésben egyedül  $x$  függvényének tekinthető és a közepelést egy rögzített helyen kell elvégeznünk az összes betöltött kvantumállapotokra.

Ezt úgy határozza meg, hogy  $\frac{d \log p_x}{dx}$  közelítőleg független a kvantumállapottól, amiből szerinte következik, hogy

$$(2) \quad \frac{d \log p_x}{dx} = \frac{d \log p_\mu}{dx},$$

ahol  $p_\mu$  a maximális impulzust jelenti a hely függvényében. Miután más úton ismeretes, hogy

$$(3) \quad p_\mu = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/3} h \nu^{1/3}.$$

(2) és (3)-ból kifejezi  $\frac{d \log p_x}{dx}$ -et  $\nu$  függvényében.

Az alábbiakban rá fogunk mutatni *Fényes* következtetésének egy lényeges hiányosságára. Azt a megállapítást, hogy  $\frac{d \log p_x}{dx}$  független a kvantumállapottól, nem tesszük vita tárgyává.

Jellemezzük az egyes kvantumállapotokat egy  $\alpha$  paraméterrel és  $p_\alpha(x)$  jelentse az elektron impulzusának  $X$  komponensét az  $x$  helyen, ha az az  $\alpha$  kvantumállapotban van.  $p_x \equiv p_\alpha$  tehát kétváltozós függvény, amely  $x$ -en kívül  $\alpha$ -tól is függ, tehát a (2) egyenletet értelemszerűen

$$(2a) \quad \frac{\partial \log p_\alpha}{\partial x} = \frac{d \log p_\mu}{dx}$$

alakba kell átírunk. *Fényes* feltevése szerint  $\frac{\partial \log p_\alpha}{\partial x}$  rögzített  $x$  helyen független  $\alpha$ -tól. Ebből nyilván következik, hogy

$$(4) \quad \frac{\partial \log p_\alpha}{\partial x} = \left( \frac{\partial \log p_\alpha}{\partial x} \right)_{\alpha = \alpha_\mu(x)},$$

ahol az  $\alpha_\mu(x)$  paraméterérték azon betöltött kvantumállapothoz tartozik, melyhez tartozó impulzus az  $x$  helyen maximális. Az így bevezetett jelölésmóddal

$$(5) \quad p_\mu(x) = p_{\alpha_\mu(x)}(x),$$

amiből (2) és (2a)-vel ellentétben

$$(6) \quad \frac{d \log p_\mu}{dx} = \left( \frac{\partial \log p_\alpha}{\partial x} \right)_{\alpha = \alpha_\mu(x)} + \left( \frac{\partial \log p_\alpha}{\partial \alpha} \right)_{\alpha = \alpha_\mu(x)} \frac{d \alpha_\mu(x)}{dx}$$

következik, amiből csak akkor következne (2), illetve (2a), ha (6)-ban a második tag valami okból zérussal lenne egyenlő, viszont  $p_\alpha$  általában nem a konfigurációs cella belsejében veszi fel maximumát.

*Fényes* módszerétől tehát csak úgy várhatunk megbízható eredményt, ha azt ki lehet egészíteni ezen második tag kiszámításával, vagy becslésével.

Ez azonban igen nehéz feladatnak látszik. Ugyanis a statisztikus atommodell jelenlegi, *Thomas* és *Fermi* által megalapozott formájában az a kérdés, hogyan folytatódik egy adott helyen ismert állapotfüggvény egy másik helyen, nem válaszolható meg.

#### IRODALOM

- [1] *K. F. Weizsäcker*: Zeitschr. f. Physik 96 (1935) 431. o.
- [2] *H. Hellmann*: Acta. Physicochem. URSS 4 (1936) 225. o.
- [3] *Fényes I.*: Csillagászati Lapok 7 (1944) 57. o.
- [4] *I. Fényes*: Zeitschr. f. Physik 125 (1948) 336. o.
- [5] *Fényes I.*: Múzeumi Füzetek (Kolozsvár) 3 (1945) 3. o.
- [6] *P. Gombás*: Die statistische Theorie des Atoms. Wien, Springer, 1949.

#### О КОРРЕКЦИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛЯ АТОМА

Г. ФРАЙД

#### Резюме

Автор доказывает, что работа [5] И. Феньеша, в которой он пробует исправить коррекцию Вейцекера для кинетической энергии, базирована на неудовлетворительном выводе и требует существенного дополнения.

#### SUR LA CORRECTION D'ÉNERGIE CINÉTIQUE DE MODÈLE D'ATOME STATISTIQUE

GÉZA FREUD

#### RÉSUMÉ

L'auteur démontre que l'article [5] de I. Fényes, dans lequel ce dernier essaye de rectifier la correction d'énergie cinétique de Weizsäcker, est basé sur une conclusion non satisfaisante et doit être compléter d'une manière radicale.





# MEGJEGYZÉSEK GOMBÁS PÁL ÉS GÁSPÁR REZSŐ EGY DOLGOZATÁHOZ

RÉNYI ALFRÉD

## ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozat néhány matematikai megjegyzést tartalmaz az [1] dolgozattal kapcsolatban.

*Gombás Pál és Gáspár Rezso* egyik dolgozatukban [1] a

$$(1) \quad \psi''(x) = x \left[ \left( \frac{\psi(x)}{x} \right)^{\frac{1}{2}} + \beta \right]^3$$

egyenlet egy olyan megoldását vizsgálják, amely eleget tesz a

$$(2) \quad \psi(0) = 1$$

$$(3) \quad \psi(x_0) = \frac{\beta^2}{16} x_0$$

$$(4) \quad x\psi'(x_0) - \psi(x_0) = -\frac{Z-N}{Z} = -q \quad (0 \leq q < 1)$$

feltételeknek. Ezt a megoldást úgy határozzák meg közelítőleg, hogy az (1) egyenlet Umeda-féle  $\psi_u(x)$  megoldásához, amely a

$$(5) \quad \psi_u(0) = 1$$

$$(6) \quad \psi_u(x_u) = 0$$

$$(7) \quad \psi'_u(x_u) = 0$$

feltételeknek tesz eleget,\* egy  $k\varepsilon(x)$  alakú korrekciós tagot adnak hozzá, ahol

$$(8) \quad \varepsilon(0) = 0 \quad \text{és} \quad \varepsilon'(0) = 1$$

Ezen  $\varepsilon(x)$ -re, feltéve, hogy  $k\varepsilon(x)$  kicsiny, a következő lineáris differenciálegyenletet nyerik:

$$(9) \quad \varepsilon''(x) = \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{\psi_u(x)}{x} \right)^{\frac{1}{4}} + \beta \left( \frac{x}{\psi_u(x)} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^2 \varepsilon(x).$$

melyből  $\varepsilon(x)$  numerikusan meghatározható.

\* A szerzők az egymástól különböző  $x_0$  és  $x_u$  számokat egyformán  $x_0$ -al jelölik. Az összetévesztés elkerülése végett az Umeda-féle  $x_0$ -t  $x_u$ -val jelölöm.

A  $k$  és  $x_0$  konstansok megválasztása tekintetében azt írják, hogy ezeket úgy kell választani, hogy a (3) és (4) feltételek teljesüljenek és azt állítják, hogy az így meghatározott  $x_0$  kisebb  $x_u$ -nál. Ezt a szerzők fizikai megfontolásokból következtetik,\* annak matematikai bizonyítása, hogy a (3) és (4) feltevéseknek eleget tevő  $x_0 < x_u$  létezik, a dolgozatban nem található meg. Ennek a megjegyzésnek a célja ezen hiány pótlása, ami igen egyszerűen a következőképpen történhetik:

A  $\psi(x) = \psi_u(x) + k\varepsilon(x)$  függvényt a (3) és (4) feltételekbe helyettesítve adódik, hogy

$$(10) \quad k = \frac{\frac{\beta^2}{16} x_0 - \psi_u(x_0)}{\varepsilon(x_0)}$$

és

$$(11) \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\frac{\beta^2}{16} x - \psi_u(x)}{\varepsilon(x)} \right)_{x=x_0} = \frac{q}{x_0 \varepsilon(x_0)}.$$

Bevezetve a

$$(12) \quad \varphi(x) = \frac{\beta^2 x}{16} - \psi_u(x)$$

jelölést, (11) helyett kapjuk a

$$(13) \quad \varphi'(x_0) \varepsilon(x_0) - \varphi(x_0) \varepsilon'(x_0) = \frac{q \varepsilon(x)}{x_0}$$

egyenletet; jelöljük (13) baloldalát  $\Phi(x_0)$ -al, azaz legyen

$$(14) \quad \Phi(x) = \varphi'(x)\varepsilon(x) - \varphi(x)\varepsilon'(x)$$

Könnyen belátható, hogy a  $(0, x_u)$  intervallum belsejében  $D(x) = \Phi(x) - \frac{q \varepsilon(x)}{x}$  folytonos függvény, továbbá  $D(0) = 1 - q$ . Mivel feltettük, hogy  $q < 1$  (azaz hogy  $N < Z$ ) tehát  $D(0) > 0$  és így elég kimutatni, hogy  $D(x)$  a  $(0, x_u)$  intervallumban felvesz negatív értéket is, ebből már következik, hogy ezen intervallum belsejében van olyan  $x_0$ , melyre  $D(x_0) = 0$ , vagyis amelyre (13)

\* Megjegyzem, hogy a fizikai megfontolások csak azt bizonyíthatják, hogy az (1) egyenletnek van olyan megoldása, amely a (2), (3), (4) mellékfeltételeknek eleget tesz és így nem pontosan azt, amire szükség van, hogy a szóbanforgó közelítő  $\psi_u(x) + k\varepsilon(x)$  megoldáshoz, ahol  $\varepsilon(x)$  a (9) egyenletnek tesz eleget, található olyan  $x_0 < x_u$ , amelyre a (3) és (4) feltételek teljesülnek. Egy matematikai kérdésben — és itt nyilvánvalóan matematikai kérdésről van szó, t. i. egy differenciálegyenlet adott feltételeknek eleget tevő megoldásának létezéséről — a fizikai megfontolások megmutathatják a helyes utat, azonban csak heurisztikus értékkel bírnak és a szabatos matematikai bizonyítást semmiképpen sem teszik feleslegessé.

teljesül. Az, hogy  $D(x)$  felvesz negatív értéket is, a következőképpen látható be: ha  $x$  közel van  $x_u$ -hoz, úgy  $\psi_u(x) \approx \frac{\beta^3 x_u}{2} (x_u - x)^2$ . Mivel

$$\varepsilon'(x) = 1 + \frac{3}{2} \int_0^x \left[ \left( \frac{\psi_u(t)}{t} \right)^{1/4} + \beta \left( \frac{t}{\psi_u(t)} \right)^{1/4} \right]^2 \varepsilon(t) dt,$$

tehát  $x_u$  közelében

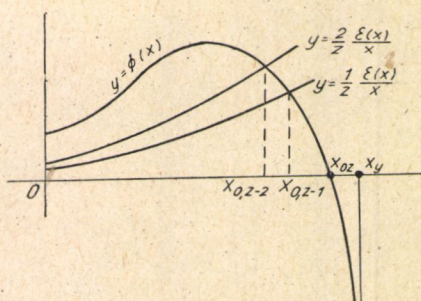
$$(15) \quad \varepsilon'(x) \approx \frac{3}{2} \sqrt{2\beta} \cdot \varepsilon(x) \cdot \log \frac{1}{x_u - x},$$

tehát  $\varepsilon'(x) \rightarrow +\infty$ , ha  $x \rightarrow x_u$ , de ugyanakkor  $\varepsilon(x_u)$  véges, bár igen nagy szám. Mivel továbbá  $\varphi(x_u) = \frac{\beta^2}{16} x_u > 0$ , tehát

$$(16) \quad \lim_{x \rightarrow x_u} D(x) = -\infty,$$

tehát ha  $x$  elég közel van  $x_u$ -hoz, úgy  $D(x)$  negatív; ezzel bebizonyítottuk, hogy  $D(x)$  valahol 0 és  $x_u$  között felveszi a 0 értéket.

Az elmondottakból az is kitűnik, hogy ha különböző  $N$  értékekhez meghatározzuk  $x_0$  értékét, úgy kisebb  $N$ -nek kisebb  $x_0 = x_{0N}$  felel meg (l. az alábbi sematikus ábrát), ami fizikailag is evidens.



Hogy a tárgyalást teljesen szabotossá tegyük, még csak azt kell kimutatni, hogy  $x_0$  egyértelműen meg van határozva, azaz a (13) egyenletnek csak egy megoldása van. Ez a következőképpen történhet a  $q = 0$  esetben: kimutatjuk, hogy a

$$(17) \quad \Phi'(x) = \varphi''(x)\varepsilon(x) - \varphi(x)\varepsilon''(x) = 0$$

egyenletnek csak egy gyöke lehet; ebből következik, hogy a  $\Phi(x) = 0$  egyenletnek is csak egy gyöke lehet, mert ha a  $\Phi(x) = 0$  egyenletnek egynél több



gyöke volna, úgy a  $\Phi'(x) = 0$  egyenletnek legalább 3 gyöke volna, hiszen  $\Phi(0) > 0$  és  $\Phi'(0) > 0$ , továbbá  $\Phi(x_u) = -\infty$ . Mivel

$$\Phi'(x) = \left( \psi_u(x) - \frac{\beta^2 x}{16} \right) \varepsilon''(x) - \varepsilon(x) \psi_u''(x),$$

tehát ha  $\Phi'(x) = 0$ , úgy

$$\frac{\varepsilon''(x)}{\varepsilon(x)} = \frac{\psi_u''(x)}{\psi_u(x) - \frac{\beta^2 x}{16}},$$

azaz (1) és (9) szerint

$$\frac{3}{2} \left[ \left( \frac{\psi_u(x)}{x} \right)^{1/4} + \beta \left( \frac{x}{\psi_u(x)} \right)^{1/4} \right]^2 = \frac{\left( \left( \frac{\psi_u(x)}{x} \right)^{1/2} + \beta \right)^3}{\frac{\psi_u(x)}{x} - \frac{\beta^2}{16}}.$$

Bevezetve a  $v = \left( \frac{\psi_u(x)}{x} \right)^{1/2}$  új változót, adódik, hogy

$$\frac{3}{2v} (v + \beta)^2 = \frac{(v + \beta)^3}{v^2 - \frac{\beta^2}{16}},$$

azaz

$$v^2 - \frac{\beta^2}{16} = \frac{2v}{3} (v + \beta),$$

tehát

$$v^2 - 2v\beta - \frac{3\beta^2}{16} = 0,$$

azaz

$$v = \beta \left( 1 \pm \sqrt{\frac{19}{4}} \right).$$

Mivel  $v = \left( \frac{\psi_u(x)}{x} \right)^{1/2}$  pozitív, tehát ha  $\Phi'(x) = 0$ , úgy

$$(18) \quad \psi_u(x) = \beta^2 x \left( 1 + \frac{\sqrt{19}}{4} \right)^2.$$

Mivel  $\psi_u(x)$  monoton csökkenő és (18) jobboldala monoton növekvő, a (18) egyenletnek csak egy gyöke lehet, vagyis a  $\Phi'(x) = 0$  egyenletnek csak egy pozitív gyöke van. Ha  $q > 0$ , úgy (13)-nak szintén csak egy gyöke van, ennek bizonyítása azonban bonyolultabb.

## IRODALOM

[1] *P. Gombás und R. Gáspár*: Zur Lösung der Thomas—Fermi—Diracschen Gleichung. Acta Physica, I. 1. (1951) 66—74.

## ЗАМЕЧАНИЯ К РАБОТЕ [1] П. ГОМБАША И Р. ГАШПАРА

A. РЕНЬИ

### Резюме

Работа содержит некоторые математические замечания, относящиеся к работе [1]

## REMARQUES CONCERNANT UN TRAITÉ DE P. GOMBÁS ET R. GÁSPÁR

A. RÉNYI

### RÉSUMÉ

Le travail contient quelques remarques mathématiques en connexion avec le travail [1].



## FÖLDELÉSI ELLENÁLLÁS ÉS LÉPÉSFESZÜLTSG SZÁMÍTÁSA FÖLDELŐCSŐ ESETÉN

FAZEKAS FERENC

### ÖSSZEFOGLALÁS

Ezen irodalmi adatokon nyugvó összeállítás az  $m$  hosszúsága és  $d$  átmérőjű karcsú ( $d \ll m$ ),  $V$  potenciálú, földbe, (mint ú. n. félvezető dielektrikumba) ásott cső elektromos erő- és potenciáletterét tárgyalja főleg a lépésfeszültségnek és a földelés ú. n. szétterjedési ellenállásának meghatározása céljából.

A tükrözési elv alapján  $2m$  hosszúságúra növelt karcsú csövet a hasonló fókusz-távolságú nyújtott ekvipotenciális forgási ellipszoidok alsó határalakzatával, a  $2m$  hosszúságú  $q = Q/2m$  egyenletes vonalmenti töltéssűrűségű, elenyésző vastagságú tengellyel azonosítottuk, az irodalomnak megfelelően, e modellel a valóságot jól közelítve, és egyszersmind a számítást jelentősen leegyszerűsítve.

Az alábbi problémával a *Földalatti Vasút Beruházási Vállalat* megbízásából foglalkozott az Intézet. A megoldást a szerző irodalmi adatokra támaszkodva dolgozta ki. A mellékelt nomogramm *Pál Sándor* munkája.

A probléma az elektrosztatika ú. n. *homogén alapfeladatainak* [1] egy speciális esete. Adva van ugyanis egy (esetünkben a talajba, mint félvezető) dielektrikumba  $m$  mélységig beásott  $d$  átmérőjű (karcsú, azaz  $d \ll m$ ) cső,  $V$  Volt feszültségre feltöltve (a végtelenhez képest). Keresendő a cső potenciális erőtere, különös tekintettel (a lépésfeszültség számítása szempontjából) a potenciál felszíni eloszlására, továbbá a földelés ú. n. szétterjedési ellenállására.

A megoldásnál alkalmazzuk a *Thomson-féle*, az elektrosztatikában sűrűn felhasznált *tükrözési elvet* [2]. Esetünkben ezzel biztosítható, hogy a  $2m$  hosszúságú, végig  $+$  töltésű cső erőterében a felszínen ne legyen a térerősség s vele az áramerősség vektorának függélyes komponense.

A  $2m$  hosszúságú karcsú csövet  $V$  potenciálra emelő elektromos töltést a cső tengelyében koncentrálna képzeljük és eloszlását a cső menetén egyenletesnek tekintjük,\* tehát az össztöltés így nyerhető:

$$(1) \quad Q = q \cdot 2m,$$

ahol  $q$  a cső hosszegységére eső töltés.

\* L. a 400. oldalon \*-ot!



A cső tengelyében egyenletesen elosztva képzeltek,  $q$  lineáris sűrűségű töltés által az  $(r, z)$  koordinátájú pontban létesített potenciál [3]:

$$(2) \quad U(r, z) = q \int_{\xi=-m}^{+m} \frac{d\xi}{\sqrt{r^2 + (z-\xi)^2}} = q \left[ -\operatorname{arsh} \frac{z-\xi}{r} \right]_{\xi=-m}^{+m} =$$

$$= q \left[ \operatorname{arsh} \frac{m-z}{r} + \operatorname{arsh} \frac{m+z}{r} \right] =$$

$$= q \ln \frac{[m-z + \sqrt{r^2 + (m-z)^2}] [m+z + \sqrt{r^2 + (m+z)^2}]}{r^2}.$$

A felszíni potenciáeloszlást nyerjük a (2)-ből  $z = 0$ -ra:

$$(3) \quad U(r, 0) = 2q \operatorname{arsh} \frac{m}{r} = 2q \ln \frac{m + \sqrt{m^2 + r^2}}{r};$$

Az  $U(d/2, 0)$  potenciált az előírt  $V$ -vel azonosítva és  $\left(\frac{d}{2}\right)^2$ -et  $m^2$  mellett elhanyagolva\* lesz:

$$(4) \quad V \approx 2q \ln \frac{4m}{d}, \quad Q = 2qm \approx \frac{Vm}{\ln \frac{4m}{d}}.$$

Ez utóbbi formulából nyerhető földelőnk kapacitása, mint az egységnyi potenciált létesítő töltés mennyisége, továbbá a  $q$  fajlagos töltés, a  $V$  potenciál és a cső  $m, d$  geometriai méreteinek függvényeként. Tehát:

$$(5) \quad C \approx \frac{m}{\ln \frac{4m}{d}}, \quad 2q \approx \frac{V}{\ln \frac{4m}{d}}.$$

Az (5) felhasználásával a (3) így alakul:

$$(6) \quad U(r, 0) \approx \frac{V}{\ln \frac{4m}{d}} \operatorname{arsh} \frac{m}{r} = \frac{V}{\ln \frac{4m}{d}} \ln \frac{m + \sqrt{m^2 + r^2}}{r}.$$

A felszíni potenciálesés a (6) képletből:

$$(7) \quad \Delta U(r, 0) = U(r + \Delta r, 0) - U(r, 0) \approx$$

$$\approx \frac{V}{\ln 4m/d} \ln \frac{m + \sqrt{m^2 + (r + \Delta r)^2}}{m + \sqrt{m^2 + r^2}} \cdot \frac{r}{r + \Delta r}. \quad **$$

\* Az 1. ábrán  $\lambda = m/d = 100$ .

\*\* A Az 1a. és 1b. melléklet nem a (7), hanem az egyszerűbb (22) alapján készült!

Az (5) felhasználásával a (2), azaz az  $(r, z)$  pontbeli potenciál így alakul :

$$(2a) \quad U(r, z) \approx -\frac{V}{2 \ln \frac{4m}{d}} \left( \operatorname{arsh} \frac{m+z}{r} + \operatorname{arsh} \frac{m-z}{r} \right).$$

Vizsgáljuk a (2a) által teljesen meghatározott potenciáltér ekvipotenciális (nívó)felületeit. Bevezetve a (2)-be és (2a)-ba az

$$(8) \quad u = \operatorname{ch} \frac{U(r, z)}{q} = \operatorname{ch} \left( \frac{U(r, z)}{V} \cdot 2 \ln \frac{4m}{d} \right)$$

jelölést [4], nyerjük az  $\operatorname{ch}(\alpha + \beta) = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta$  és  $\operatorname{ch}^2 \alpha = 1 + \operatorname{sh}^2 \alpha$  ismert azonosságok felhasználásával :

$$(9) \quad \begin{aligned} u &\approx \operatorname{ch} \left( \operatorname{arsh} \frac{m+z}{r} + \operatorname{arsh} \frac{m-z}{r} \right) = \\ &= \sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{m+z}{r} \right)^2 \right] \left[ 1 + \left( \frac{m-z}{r} \right)^2 \right]} + \\ &+ \frac{m^2 - z^2}{r^2} = \sqrt{1 + 2 \frac{m^2 + z^2}{r^2} + \left( \frac{m^2 - z^2}{r^2} \right)^2} + \frac{m^2 - z^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Ennek birtokában egyszerű behelyettesítéssel igazolható, hogy  $u, r$  és  $z$  változók között a következő összefüggés áll fenn :

$$(10) \quad \frac{\frac{r^2}{2m^2}}{u-1} + \frac{\frac{z^2}{m^2(u+1)}}{u-1} \approx 1.$$

A (10) értelmében az  $u = \operatorname{const}$  s vele az  $U(r, z) = \operatorname{const}$  *ekvipotenciális felületek forgási ellipszoidok* (u. i.  $r^2 = x^2 + y^2$ ) :

$$(11) \quad A \approx m \sqrt{\frac{2}{u-1}} = \frac{1}{\operatorname{sh} \left( \frac{U}{V} \ln \frac{4m}{d} \right)}, \quad B \approx m \sqrt{\frac{u+1}{u-1}} = \operatorname{cth} \left( \frac{U}{V} \ln \frac{4m}{d} \right)$$

tengelyekkel, sőt, amint előre jeleztük,

$$(12) \quad C^2 = B^2 - A^2 \approx \frac{m^2(u+1) - 2m^2}{u-1} = m^2 = \operatorname{const}$$

értelmében e forgási ellipszoidok *konfokálisak*,  $C \approx m$  közös fókusz távolsággal.

Az *elektromos erővonalak* (hordozó felületei) ortogonális trajektorái az előbbi ekvipotenciális felületeknek. Ezek

$$(13) \quad \frac{\frac{r^2}{2m^2}}{u+1} + \frac{\frac{z^2}{m^2(u-1)}}{u+1} \approx 1$$

egyenletű *konfokális kétköpenyű forgási hiperboloidok*,

$$(14) \quad C'^2 = A'^2 + B'^2 \approx \frac{2m^2 + m^2(u-1)}{u+1} = m^2 = \operatorname{const}$$

szerint ugyanazon  $C \approx m$  közös fókusz távolsággal. A csatolt ábrán feltüntettük a földelőcső potenciálterének ekvipotenciális vonalait és elektromos erővonalait (azaz az említett forgási ellipszoidok és hiperboloidok meridiángörbéit). Az ábrán alkalmazott jelölések:

$$(15) \quad \varrho = \frac{r}{m}, \quad \lambda = \frac{m}{d}.$$

Az ábrán az ekvipotenciális felületek potenciálja (a végtelen távoli második elektróda 0 potenciáljához képest) a földelőcső  $V$  potenciáljának százalékában van kifejezve. (A számítás tulajdonképpen a földelőcsövet az  $A \approx \frac{d}{2}$  kistengelyű, 100%-kal jelzett forgási ellipszoiddal közelítette.)

Ezek után határozzuk meg az *elektromos térerősség*  $\mathbf{E}$  vektorát, mint az  $U(r, z)$  potenciál negatív gradiensét s eképpen az elektromos erővonalak érintővektorát:

$$(16) \quad \mathbf{E} = -\text{grad } U(r, z) = -\mathbf{e}_r \frac{\partial U(r, z)}{\partial r} - \mathbf{e}_z \frac{\partial U(r, z)}{\partial z},^*$$

ahol  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_z$  és  $\mathbf{e}_\varphi$  a hengeres koordinátarendszer egységvektorai.

Megjegyezzendő, hogy az erővonalak az  $\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$  egyenlet értelmében egyúttal áramvonalak is. ( $\mathbf{i}$  az áramsűrűség vektora,  $\sigma$  a talaj fajlagos vezetőképessége). Parciális deriválással a (7)-ből adódik:

$$(17) \quad \begin{aligned} -E_r &= \frac{\partial U(r, z)}{\partial r} \approx -\frac{V}{2 \ln \frac{4m}{d}} \left( \frac{m+z}{r\sqrt{r^2 + (m+z)^2}} - \frac{z-m}{r\sqrt{r^2 + (z-m)^2}} \right), \\ -E_z &= \frac{\partial U(r, z)}{\partial z} \approx +\frac{V}{2 \ln \frac{4m}{d}} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + (m+z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-m)^2}} \right). \end{aligned}$$

Kontrollképpen megállapíthatjuk, hogy az elektromos térerősség függőleges komponense a felszínen

$$(18) \quad -E_z(r, 0) \approx \frac{V}{2 \ln \frac{4m}{d}} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + m^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + m^2}} \right) \equiv 0$$

szerint valóban eltűnik.

A lépéshősség számítása a

$$(19) \quad +E_r(r, 0) \approx +\frac{V}{2 \ln \frac{4m}{d}} \frac{2m}{r\sqrt{r^2 + m^2}} = \frac{V}{\ln \frac{4m}{d}} \frac{m}{r\sqrt{r^2 + m^2}}$$

képletből kiindulva történhetik.

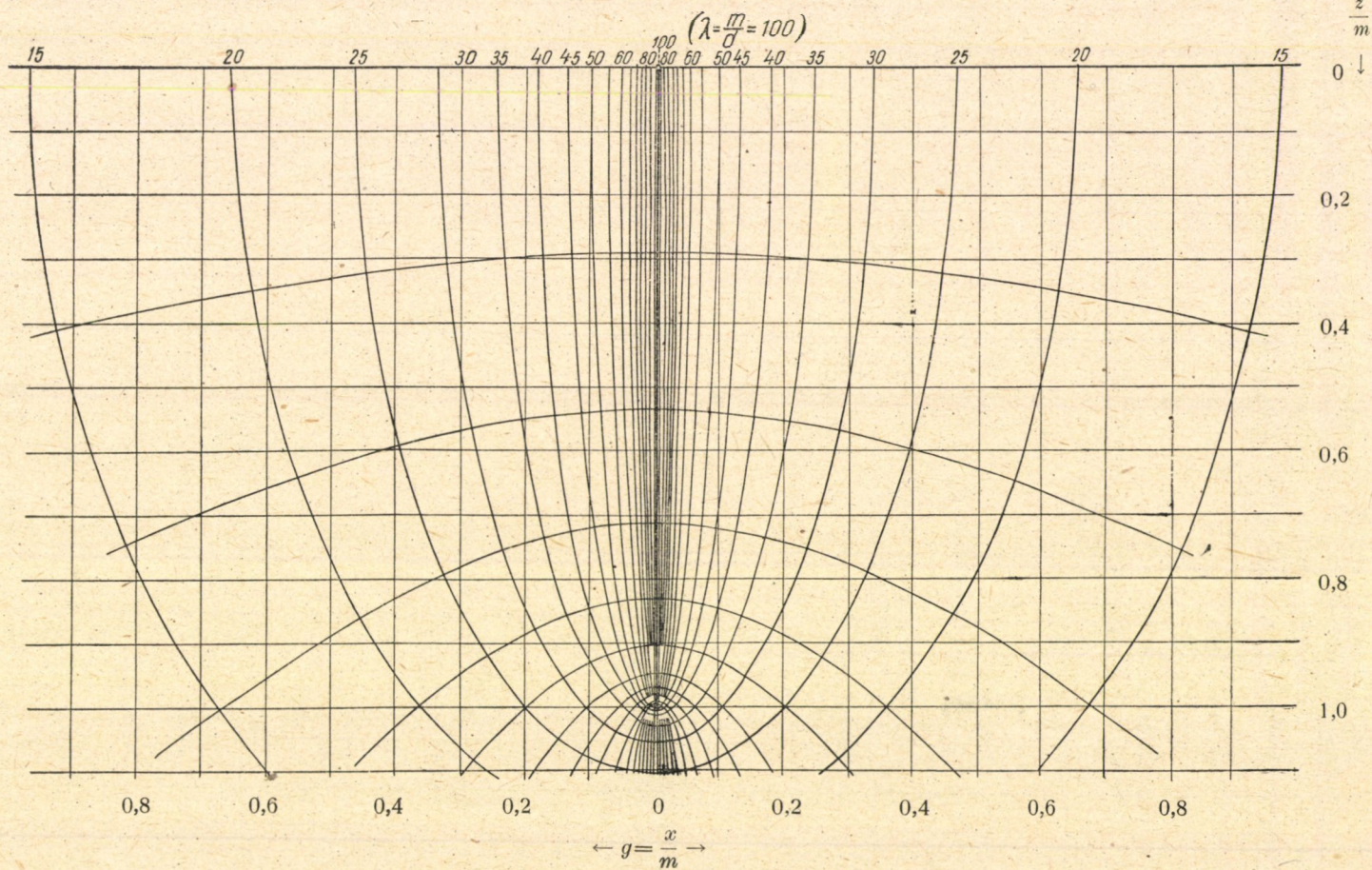
Minthogy

$$(20) \quad E_r(r, 0) = -\left[ \frac{\partial U(r, z)}{\partial r} \right]_{z=0} \approx -\frac{\Delta U(r, 0)}{\Delta r} = +\frac{U(r, 0) - U(r + \Delta r, 0)}{\Delta r},$$

\* Esetünkben a hengeres szimmetria miatt:  $-\mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial U(r, z)}{\partial \varphi} \equiv 0$ .

$\frac{U}{V} 100 \rightarrow$ 

Csőföldelés potenciáeloszlása és erőtere

 $(\lambda = \frac{m}{\sigma} = 100)$ 

 $\leftarrow g = \frac{x}{m} \rightarrow$ 

1. ábra



hacsak  $\Delta r$  elég kicsiny, tekintettel  $E_r(r, 0)$  csökkenő jellegére és  $\Delta r = 0,75$  m lépéshosszal számolva, a  $-\Delta U(r, 0)$  lépésfeszültség [azaz a felszínen (a rádiuszvektor mentén), két, lépésnyi távolságú pont közti feszültség, amely életbiztonsági okok miatt csak korlátozott nagyságú lehet] így alakul:

$$(21) \quad -\Delta U(r, 0) = U(r, 0) - U(r + \Delta r, 0) < \frac{0,75}{c_1} \frac{V}{\ln \frac{4m}{d}} \frac{m}{r\sqrt{r^2 + m^2}} > 0,$$

(itt  $c_1$  dimenziós állandó).

A bevezetett jelölésekkel [lásd a (15) alatt] a 21-et úgy írhatjuk:

$$(22) \quad -\Delta U(\varrho, 0) < \frac{0,7}{c_1} \frac{V}{m \ln 4\lambda} \frac{1}{\varrho\sqrt{\varrho^2 + 1}} > 0.$$

Hangsúlyozzuk, hogy a (21) és (22)-ben az  $r$ , ill.  $\varrho$  a lépés *belső* (a földelőcsőhöz közelebbi) végpontjának abszolút, ill. relatív koordinátája, amint ezt a (20)-ból is kitűnik.

A (21) és (22) láthatóan a tényleges lépésfeszültségnél nagyobb, *biztonságos* értéket szolgáltat! Egyszerűsége miatt, az ábrázolásban erre támaszkodtunk, a (7) helyett.

A földelés ú. n. *szétterjedési ellenállásának* [5] számítására térve, képezzük a földelőcső földbe ágyazott  $F$  palástfelületére (a véglapot elhanyagoljuk) az

$$\sigma \iint_{(F)} \mathbf{E} d\mathbf{F}$$

felületi integrált. Ez az  $i = \sigma E$  (a  $\sigma$  a talaj fajlagos vezetőképessége) elem *Ohm-törvénye* szerint a talajba kifolyó kb. összes áramot adja. Esetünkben egyszerűen

$$(24) \quad J \approx \sigma \int_{z=0}^m E_r\left(\frac{d}{2}, z\right) \cdot d\pi \cdot dz \approx \\ \approx \frac{\sigma V}{2 \ln \frac{4m}{d}} 2\pi \left[ \frac{1}{2} \int_{z=0}^m \frac{2(z+m) dz}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (z+m)^2}} - \frac{1}{2} \int_{z=0}^m \frac{2(z-m) dz}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (z-m)^2}} \right] = \\ = -\frac{\pi \sigma V}{\ln \frac{4m}{d}} \left[ \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (z+m)^2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (z-m)^2} \right]_{z=0}^m \approx \frac{2\pi \sigma m J}{\ln \frac{4m}{d}}^*$$

A földelőcső  $V$  feszültségét törve a belőle kifolyó, most kiszámított  $J$  áramerősséggel, a hányados éppen a földelés ú. n. szétterjedési ellenállását szolgáltatja (amely mellett a földelési ellenállás egyéb részei elhanyagolhatók):

$$(24) \quad R_f \approx R_{sz.} = \frac{V}{J} \approx \frac{1}{2\pi\sigma} \frac{\ln \frac{4m}{d}}{m} = \frac{\ln 4\lambda}{2\pi\sigma m},$$

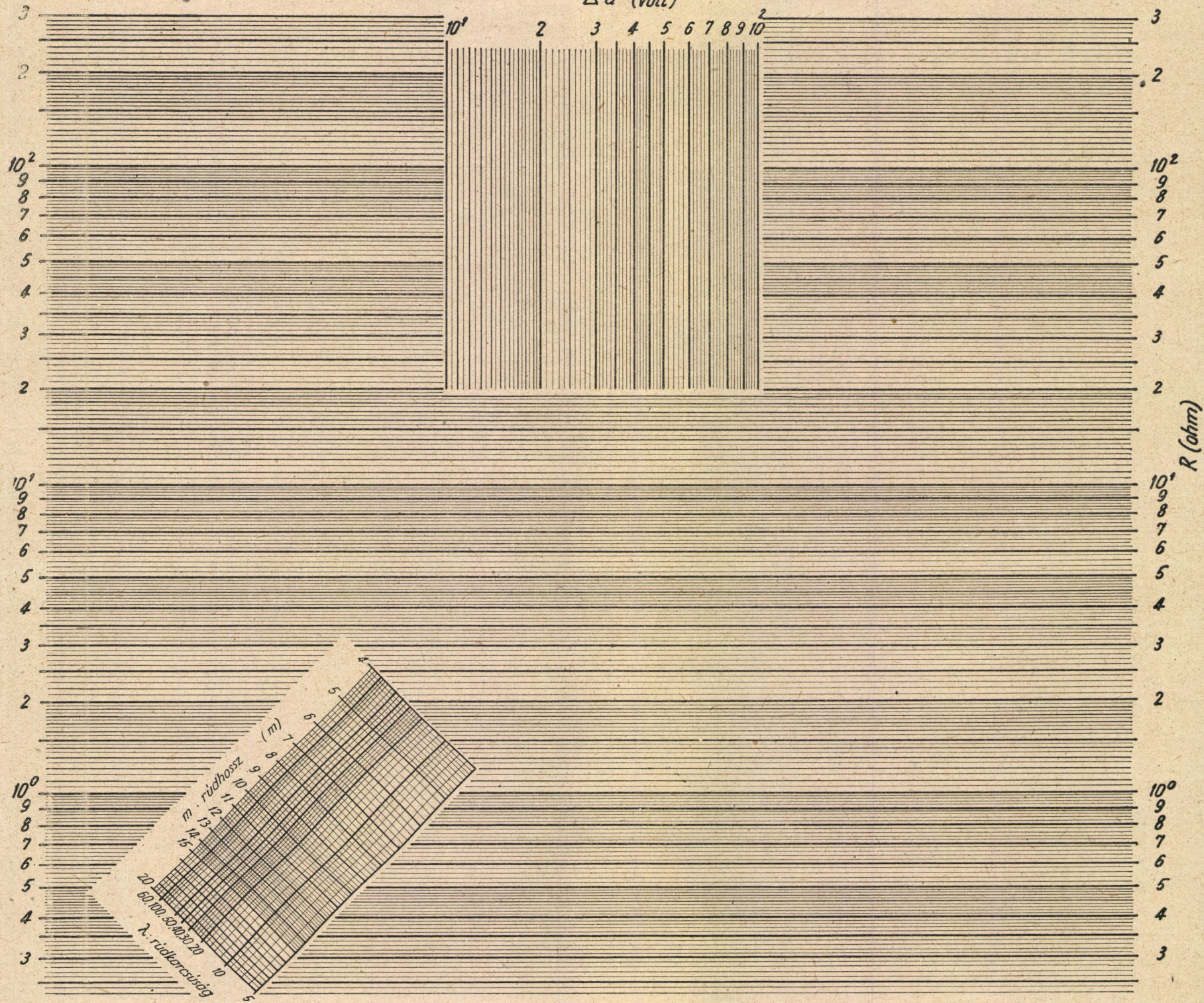
\* A  $\left(\frac{d}{2}\right)^2 \ll m^2$  értelmében elhanyagolással éltünk!



# LÉPÉSFESZÜLTSG ÉS TALAJELLENÁLLÁS CSŐFÖLDELÉSÉNél

ALAPLAP — Jelmagyarázat a mozgólapon

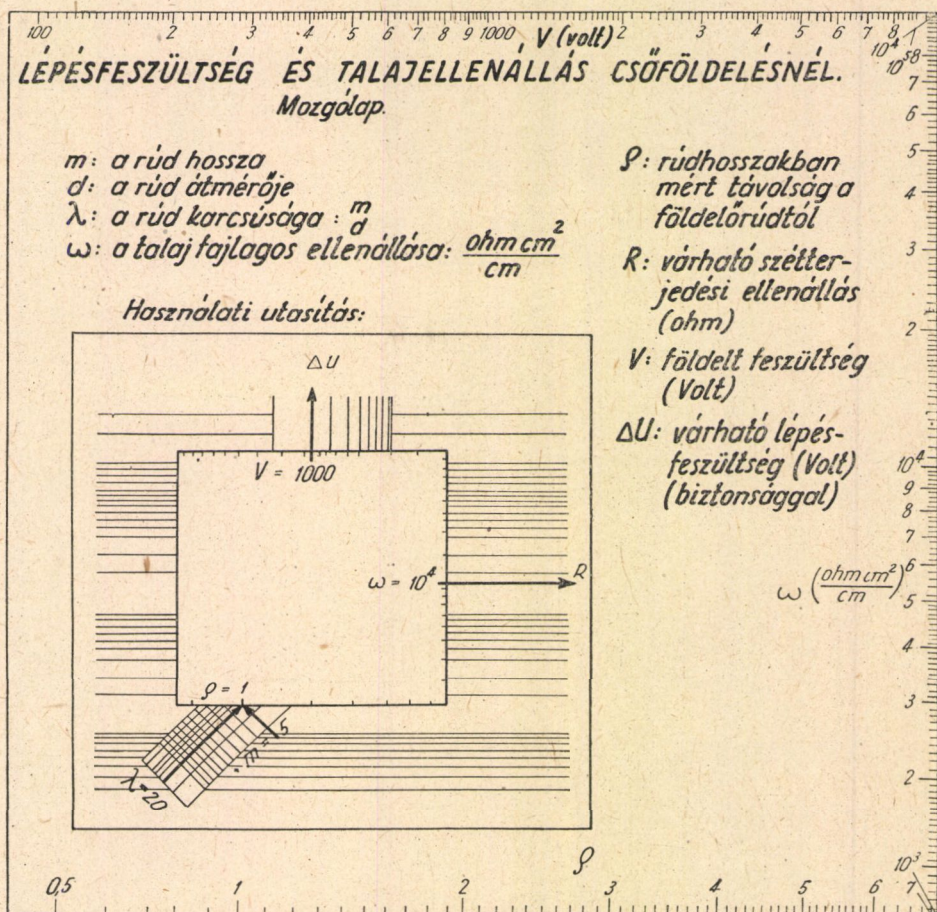
$\Delta U$  (Volt)







teljes egyezésben a szakirodalommal! [6] A mellékelt nomogrammban [lásd az 1. a. és 1. b. mellékletet] különböző  $m$  és  $\lambda$  értékekre és különböző  $1/\sigma$  fajlagos ellenállású talajokra közvetlenül leolvasható az  $R_f$ .



1b. melléklet

A nomogramm leolvasása a következőképpen történik: A mozgólapot (1. b., kivágva úgy illesztjük az alaplagra (1. a.), hogy az alsó szélén található  $\rho$ -skála megfelelő pontja illeszkedjék a  $(\lambda, m)$  hálózatban (az alaplapon) kikeresett ponthoz; továbbá a mozgó lap vízszintes oldala párhuzamos legyen az alaplappal vízszintes oldalával, amit az alaplagra berajzolt egyenessel ellenőrizhetünk. Ekkor a mozgólap jobb oldali skáláján ( $\omega = 1/\sigma$ ) kikeresett értéknek megfelelő skálapont az alaplappal vízszintes egyenesseregében az  $R$  eredmény vonalához, a mozgó lap (felső)  $U$ -skáláján kikeresett pont pedig a  $\Delta U$  eredmény vonalához illeszkedik.

Tehát a mozgó lap egyetlen beállításával mindkét eredmény megkapható.



# Megjegyzések.

1. A

$$(26) \quad \operatorname{div} \mathbf{i} = -\frac{\partial k}{\partial t}$$

*kontinuitási egyenlet* értelmében csak a  $K$  térbeli elektromos töltéssűrűség időbeli változása esetén lehet valahol áramforrás. Mivel esetünkben sem időbeli változásról, sem talajbeli áramforrásról nincs szó, a földelőső felületén kívül mindenütt  $\operatorname{div} \mathbf{i} = 0$  és  $\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$  értelmében hasonlóan [ $\sigma = \text{const.}$ ]

$$(27) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

A földelőső, mint áramforrás felszínén (pontosabban palástján), a *felületi div-tétel* értelmében :

$$(28) \quad \operatorname{Div} \mathbf{E} = 4\pi q_{f_0} = 4\pi \frac{q}{d\pi \cdot 1} = \frac{4q}{d},$$

ahol  $q_{f_0}$  a földelőső felületegységére eső töltés.

Másrészt a *II. Maxwell-egyenlet* értelmében

$$(29) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

ahol  $\mathbf{B}$  a mágneses indukció vektora. Ez a stacionárius állapot miatt az időtől független, tehát

$$(30) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Ebből viszont következik (amit mi a levezetésben kezdettől fogva hallgatólagosan, bizonyítás nélkül feltettük), hogy  $\mathbf{E}$ -nek van egy  $U(r, z)$  *skaláris potenciálja*.

A (23) és (24) egyenletből együttesen következik :

$$(31) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} U(r, z) \equiv \Delta U(r, z) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.*$$

Vagyis  $U(r, z)$  potenciálfüggvényünk a földelősővön kívül *kielégíti a Laplace-féle differenciálegyenletet* és ennél fogva (ezt szintén hallgatólagosan feltételeztük) problémánk, mint egyszerű elektrosztatikus probléma tárgyalható, annak ellenére, hogy elektromos áramlás is van.

2. *Dirichlet* gondolatmenetére hivatkozva az irodalom kimutatja [7], hogy az

$$(32) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

\* A hengeres szimmetria miatt  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \equiv 0$ .

egyenletű, felszínesen eloszló tömegű *ellipszoidon*  $Q$  össztöltés

$$(33) \quad q_f = \frac{Q}{4\pi abc \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

*felületi sűrűséggel* oszlik el, az ellipszoidban állandó potenciált feltételezve. Nyújtott forgási ellipszoidnál  $a = b$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$  jelöléssel a (33) és (32) így alakul :

$$(34) \quad q_f = \frac{Q}{4\pi a^2 c \sqrt{\frac{r^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}}}, \quad \frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Az  $a \rightarrow 0$  esetben, \* vagyis ha a forgási ellipszoid  $2c = 2m$  hosszúságú (kétszeres) nagytengelyére zsugorodik, a (34)-ből nyerjük :

$$(35) \quad q_{f_0} = \lim_{a \rightarrow 0} q_f = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{Q}{4\pi a^2 m \sqrt{\frac{z^2}{m^4} + \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right)}} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi m \cdot a \sqrt{1 - \frac{z^2}{m^2}}} = \frac{Q}{4\pi m r} \approx \frac{Q}{4\pi m \frac{d}{2}} = \frac{Q}{2\pi m d}, \quad **$$

azaz a  $2m$  hosszúságú egyenes darab hosszegységére közelítőleg

$$(36) \quad q \approx d\pi \cdot q_{f_0} = \frac{Q}{2m} = \text{const.}$$

töltés esik mindenütt, azaz éppen  $a \sim 2m$  hosszúságú,  $Q$  össztöltésű,  $\frac{d}{2} \approx 0$

*elenyésző sugarú, egyenletes  $q$  fajlagos töltésű tengely esetére jutottunk!* A  $Q$  össztöltésű

$$(37) \quad \frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

forgási ellipszoid potenciáletterének ekvipotenciális felületei  $m = \sqrt{c^2 - a^2}$  közös fókusz távolságú konfokális forgási ellipszoidok, a (10) (pontos) egyenlettel. E felületserег bármely egyedének, így az alsó határalakzatnak, a  $2m$  hosszúságú, elenyésző vastagságú tengelynek is ugyanaz a potenciátere. Ezért lehetséges, egyszerűség kedvéért, az utóbbival dolgozni. Az irodalomban azonban található tényleges ellipszoidból kiinduló, elliptikus koordinátákkal dolgozó megoldás.

3. Az előbbieik alapján maga a  $d$  átmérőjű és  $2m$  magasságú *körhenger nem ekvipotenciális felület*, de az lesz a ( $d \ll m$  miatt) hozzá elég jól símuló

\* Pontosabban :  $a \leq r'$  és  $a \rightarrow \frac{d}{2} \approx 0$ .

\*\* A közelítés romlik a  $2m$  hosszúságú tengely végei felé haladva.

$\sim \frac{d}{2}$  és  $\sim m$  tengelyű forgási ellipszoid. A fenti számításban az  $A = \frac{d}{2}$  kistengelyű (és  $B = \sqrt{m^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \cong m$  nagytengelyű) forgási ellipszoidnak tulajdonítottuk az előírt  $V$  potenciált. Ez az ellipszoid »hegyes«, javul a símulás, ha az  $A = (1,1 \sim 1,2) \frac{d}{2}$  kistengelyű ellipszoiddal közelítjük a hengert és ehhez rendeljük a  $V$ -t. Azzal is közelebb hozható a gyakorlat az elmélethez, ha kihegyezett, vagy legömbölyített földelővel dolgozik!

#### IRODALOM

1. Frank—Mises: Die Differential- u. Integralgleichungen der Mechanik u. Physik, Vieweg, Braunschweig, 1935. II. 632. o.
2. Encyklopädie der Math. Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen V/2. 319. o. — Verebely: Villamos erőátvitel, Bpest, 1948. III.
3. Frank—Mises i. m. II. 635. o.
4. l. 3.
5. l. Verebely i. m. III. 361—363. o.
6. l. 5.
7. l. Frank—Mises i. m. II. 635. o.

#### ИСЧИСЛЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ЗАЗЕМЛЕНИЯ И ШАГОВОГО НАПРЯЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ ЗАЗЕМЛЯЮЩЕЙ ТРУБЫ

Ф. ФАЗЕКАШ

##### Резюме

Работа трактует об электрическом силовом и потенциальном поле тонкой трубы длины  $m$  и диаметра  $d$  ( $m \gg d$ ), имеющей потенциал  $V$  и вкопанной в землю как в полупроводящую диэлектрик; главным образом с целью определения шагового напряжения и т. н. сопротивления распространения заземления.

Мы отождествляли тонкую нарашенную на основе принципа отражения на длину  $2m$  трубку с нижней граничной формацией натянутых эквипотенциальных эллипсоидов вращения подобных расстояний фокуса, с осью ничтожной длины  $2m$  с равномерной линейной плотностью заряда  $q = Q/2m$  в соглашении литературой, хорошо приближаясь с этим моделом действительность и одновременно значительно упрощая вычисление.

#### CALCUL DE LA RÉSISTANCE DE MISE À TERRE ET DE LA TENSION DE PAS DANS LE CAS D'UN TUYAU DE MISE À TERRE

F. FAZEKAS

##### Résumé

Cette article basé sur des données de la littérature discute le champ de force et le champ de potentiel électriques d'un tuyau d'une longueur  $m$  et d'un diamètre  $d$  de forme mince ( $d \ll m$ ) d'un potentiel  $V$  placé dans une digue creusée dans la terre (comme diélectrique semi-conducteur) principalement pour déterminer la tension de pas et ce qu'on appelle la résistance de distribution de la mise à terre.

Sur la base du principe de réflexion, un tuyau mince, dont la longueur a été augmentée à  $2m$  a été considéré identique avec la forme de limite inférieure des ellipsoïdes de rotation équipotentiels allongées de distance focale semblable, c'est-à-dire avec son axe d'épaisseur infiniment petite d'une longueur  $2m$  et d'une densité de charge linéaire uniforme  $q = Q/2m$ , un modèle qui, selon la littérature, donne une bonne approximation de la réalité, et qui, en même temps, permet le simplifier le calcul dans un degré considérable.

## STATIKAI TERHELÉS ÁTVITELE VÉKONYFALÚ CSŐVEL

PÁL SÁNDOR

### ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk a turbogenerátorok forgórészének a tengelyvégekre való felerősítésére szolgáló konstrukció megítélésére és méretezésére vonatkozó számításokat tartalmaz.

Tömör hengerre és vékony tárcsára túlfedéssel vékonyfalú cső van felsajtolva. A henger befogottnak tekinthető, a tárcsán pedig saját síkjában centrikusan támadó erővel van terhelve.

A cikk ismerteti egy vékony hengeres héjakra vonatkozó általános számítási módszert, amely külsőleg is kidomborítja a vékony hengeres héjak deformációjának számításánál adódó nagyságrendi viszonyokat és nyilvánvalóvá teszi az elhanyagolások jogosságának feltételeit. Ezúton kiadódik, hogy a héj egyes alkotóinak deformációjára közelítőleg ugyanaz a közönséges differenciálegyenlet érvényes, mint hengerszimmetrikus terhelés esetén.

Ezután megoldja a héj hajlítására vonatkozó differenciálegyenletet, a tömör henger feletti »gyűrődési« szakaszra, továbbá a héj és tárcsa közötti csőrészre, majd a megoldásokat illeszti egymáshoz. Az illesztés gyakorlati kiviteléhez nomogrammot és görbéket közöl, amelyek segítségével a »gyűrődés« alakját jellemző paraméterek megállapíthatók. Ezek birtokában megvizsgálja a cső hengeren és tárcsán való biztos felfekvésének feltételeit.

A cső deformációjára jellemző mennyiségek a benne terheléskor jelentkező feszültségek — a mellékelt görbeseregek segítségével — könnyűszerrel megállapíthatók.

### Bevezetés

Nagy erőművek részére készülő villamos generátorok tervezésénél igen súlyos problémát jelent a generátor forgórészének a tengelyvégekre való felerősítési módja. A probléma helyes megoldása igen fontos, mert az e téren elkövetett hiba esetén számolnunk kell a generátor robbanásszerű elpusztulásával, amely tönkreteszi azt az épületet is, amelyben a generátort elhelyeztük, emberéletekben és az egész ország villamos energiaszolgáltatásában helyrehozhatatlan károkat okozhat.

Ezen tanulmány célja megvizsgálni a forgórész felerősítésének azt a módját, melynél a forgórészt és a tengelyvégeket egy mindkettőre felfekvő cső köti egymáshoz, amely a forgórészre keskeny, a tengelyvégre széles sávon illeszkedik.

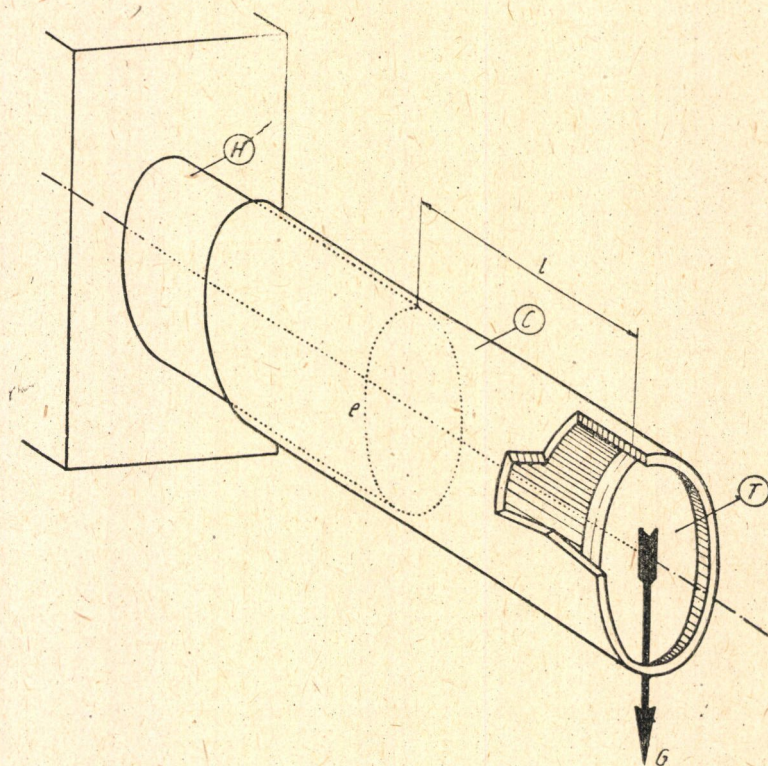
A konstrukció alkalmazása előtt el kell bírálni, hogy az alkalmas-e, és ha igen, akkor milyen feltételekkel alkalmas a fokozott biztonsági követelmények mellett és a forgórész üzembiztos megfogására és hogyan kell a gyűrűt méretezni.



A jelen cikk a Ganz Villamossági Vállalat megbízásából készült számításokat tartalmazza, amelyeknek alapján a konstrukció elbírálható és méretezhető.

\*\*\*

Az 1. ábra szerinti  $C$  vékonynak tekinthető cső egyik végén a  $H$  merevnek tekintett tömör hengeres testre, másik végén a  $T$  vékony, de merevnek tekinthető tárcsára fekszik fel. A tömör henger befogottnak tekinthető és a tárcsát saját síkjában (centrikusan) ható  $G$  erő terheli. A cső az ábra szerint közvetlenül a tárcsa után véget ér. A  $C$  cső feladata: a tömör hengert és a tárcsát külső erőhatások mellett is egymáshoz képest koaxiálisan tartani. A cső belső átmérője felhúzás előtti, feszültségmentes állapotban kisebb a tárcsa és tömör henger külső átmérőjénél. (A cső és tárcsa, illetőleg tömör henger túlfedéssel illeszkednek.) A cső a tömör hengerre és a tárcsára történő felhúzásakor rugalmas alakváltozást szenved. Az így keletkező rugalmas erőhatásoknak — és csak ezeknek — feladata a tárcsa rögzítése.



1. ábra

Ebben a cikkben megvizsgáljuk, hogy

1. milyen rugalmas alakváltozások és mekkora feszültségek keletkeznek a csőben a  $G$  erő, továbbá a tárcsára és tömör hengerre történő felhúzás következtében,



2. a cső felfekvése a tárcsán, illetőleg a tömör hengeren — vagyis a tárcsa rögzítése — milyen feltételek mellett tekinthető elegendően »biztosnak« (a biztonság követelményeit később adjuk meg).

A forgás közben fellépő centrifugális erőter hatását is tekintetbe vesszük.

A cikk alapvető feltevése, hogy a deformációk a rugalmassági határon belül maradnak.

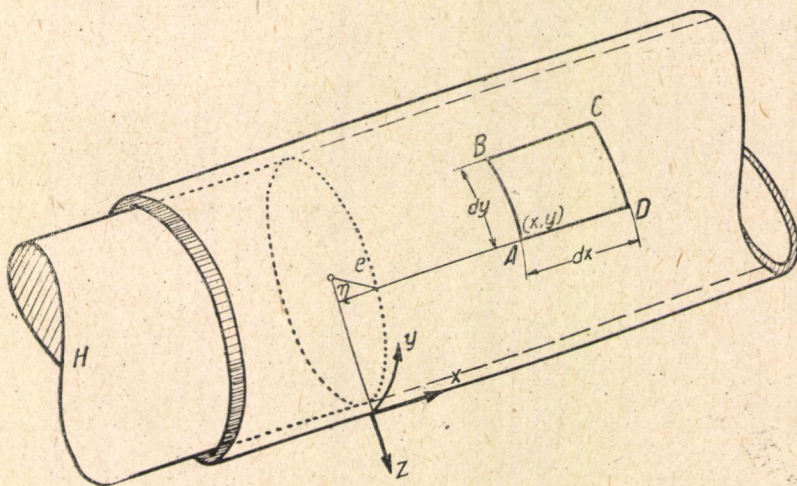
Az említett feladatok megoldásának eszközei a hengeres héjak rugalmasságtani alapegyenletei. Bár ezek lineárisak, olyan sok változót tartalmaznak, hogy feladatunk csak bizonyos elhanyagolások árán oldható meg. Ezeket az elhanyagolásokat jelen dolgozatban szereplő héj speciális terhelési viszonyai, a rugalmasságtani alapegyenletek speciális határfeltételei teszik lehetővé. Ezért mindenekelőtt ezekkel az alapegyenletekkel és ezeknek speciális határfeltételek melletti leegyszerűsítésével foglalkozunk.

## I. Rész. A csőre, mint vékony héjra vonatkozó közelítő számítás

### A. Rugalmasságtani alapegyenletek

Tegyük vizsgálat tárgyává olyan vékonynak tekinthető hengeres héj rugalmas alakváltozását, amelyet két tengelyére merőleges sík határol s amelyet ezek között vonalon, vagy felületen megoszló erők vesznek igénybe, és a két határoló síklapon külső erők és nyomatékok támadnak (2. ábra).

Vezessük be a henger felszínén történő helymeghatározásra az ábra szerinti hengerkoordinátarendszert.



2. ábra

A hengeres héjból a 2. ábra szerint kivágott  $dx dy$  területű darabot általában a 3. ábra szerinti erők és nyomatékok terhelik. A 3a. ábra szerint



a henger két hosszmetszetével és két alapkörének síkjával határolt elemi testrész

$CDC'D'$  lapját a

$\sigma_x$  a lapra normálisan ható húzófeszültség,  
 $\tau_{xy}$  a felület érintősíkjaiban ható nyírófeszültség,

és

$\tau_{xz}$  a henger hosszmetszetében ható nyírófeszültség terheli,

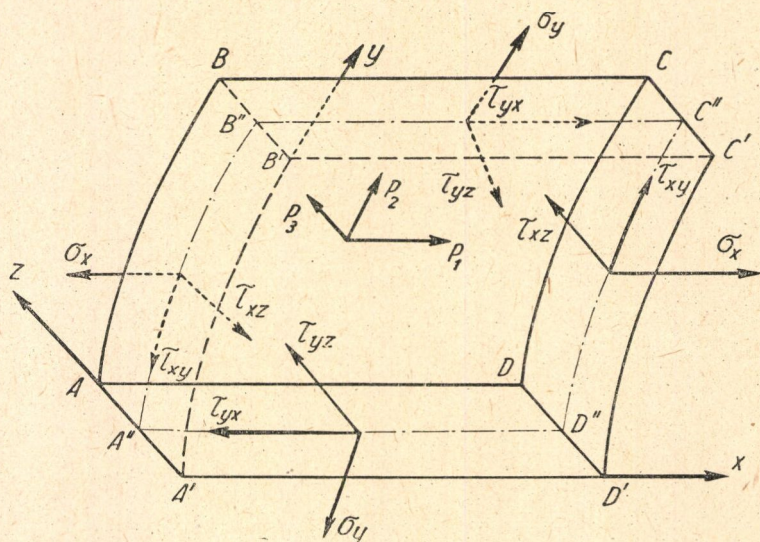
a  $BCB'C'$  lapot a

$\sigma_y$  a lapra normálisan ható húzófeszültség,  
 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  felület érintősíkjaiban ható nyírófeszültség

és

$\tau_{yz}$  az alapsíkkal párhuzamos síkban ható nyírófeszültség terheli.

Jelentse továbbá  $\nu$  a Poisson-féle számot,  $E$  a rugalmassági modulust, és  $A''B''C''D''$  a 3a. ábra szerint a kivágott  $dx dy$  felületű csődarabka »semleges felületét. és  $h$  a cső vastagságát.



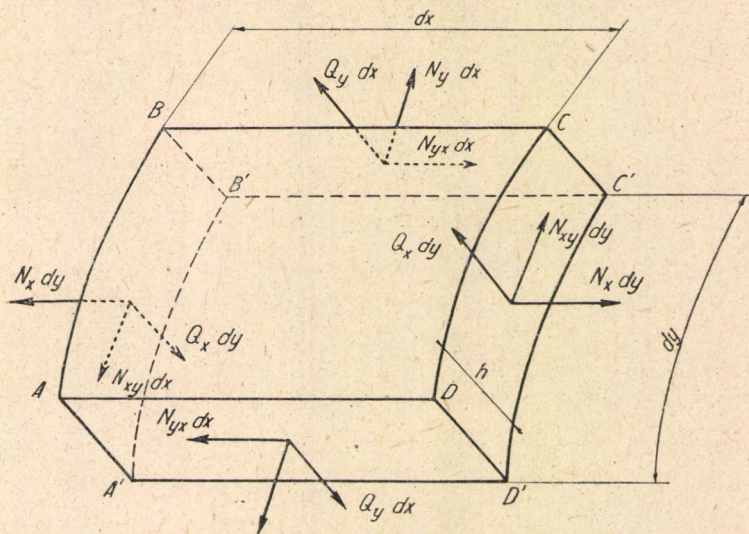
3a. ábra

Ezekből a héjak elméletében szokásos módon a következő hosszegységre ható erőket és nyomatékokat vezetjük le:

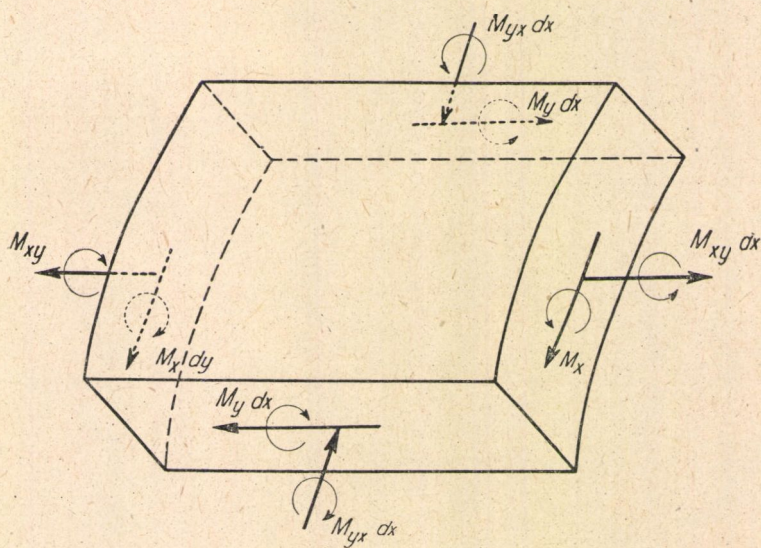
$$N_x = \int_0^h \sigma_x dz, \quad N_y = \int_0^h \sigma_y dz, \quad N_{xy} = N_{yx} = \int_0^h \tau_{xy} dz;$$

$$Q_x = \int_0^h \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_0^h \tau_{yz} dz;$$





3b. ábra



3c. ábra



$$M_x = - \int_0^h \sigma_x \cdot z \, dz, \quad M_y = - \int_0^h \sigma_y \cdot z \, dz, \quad M_{xy} = M_{yx} = - \int_0^h \tau_{xy} \cdot z \, dz.$$

$$(N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y \text{ dimenziója } \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}, M_x, M_y, M_{xy}\text{-é dyn}).^*$$

A továbbiakban a héj közepes sugarát  $R$ -el, vastagságát  $h$ -val és az  $eT$  szakasz hosszát  $l$ -el jelöljük.

Jelölje a héj valamely pontjában

$\epsilon_1$  a semleges szál  $x$ -irányú fajlagos megnyúlását,

$\epsilon_2$  a semleges szál  $y$ -irányú fajlagos megnyúlását,

$\gamma$  a  $B''A''D''$  csökkenését.

Tegyük fel, hogy a héjat a kiválasztott tartományon csak a felületen megoszló külső erők terhelik. Legyen a felületegységre ható terhelés  $+x$  irányban  $P_1(x, y)$  (dyn/cm<sup>2</sup>),  $+y$  irányban  $P_2(x, y)$ ,  $+z$  irányban  $P_3(x, y)$ .

Legyen a deformáció után a henger alapkörével párhuzamos síkmetszet görbületi sugara a vizsgált pontban  $R'$ , a henger meridiánmetszetének deformáció után legyen  $R''$  a görbületi sugara. Jelentse az  $A''B''C''D''$  felületdarab

görbületváltozásait az  $M_x$  és  $M_y$  nyomatékok hatása alatt  $\chi_x = \frac{1}{R'}$ ,  $\chi_y = \frac{1}{R'}$  és  $M_{xy}$  következtében  $\chi_{xy}$ . (V. ö. [1] 414–419. old., [2] 385–393. o.) Ismeretes, hogy a hengeres héj rugalmas alakváltozása a

következő egyenletekkel írható le :

*Egyensúlyi egyenletek :*

$$(1a) \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = -P_1,$$

$$(1b) \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{1}{R} Q_y = -P_2,$$

$$(1c) \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{1}{R} N_y = -P_3,$$

$$(1d) \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + Q_x = 0,$$

$$(1e) \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0.$$

*Az erők és nyomatékok összefüggése a deformációkkal :*

$$(2a) \quad \epsilon_1 = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y),$$

\*  $N_x$  stb. dimenziója tehát nem erő,  $M_x$  stb.-é nem nyomaték. Miután azonban félreértést nem okoz, jobb híján mégis erőnek és nyomatéknak nevezzük. (Német művekben pl. »Schnittkraft« néven emlegetik.)

$$(2b) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (-\nu N_x + N_y),$$

$$(2c) \quad \gamma = \frac{2}{Eh} (1 + \nu) N_{xy},$$

$$(2d) \quad \chi_x = \frac{12}{Eh^3} (M_x - \nu M_y),$$

$$(2e) \quad \chi_y = \frac{12}{Eh^3} (-\nu M_x + M_y),$$

$$(2f) \quad \chi_{xy} = \frac{12}{Eh^3} (1 + \nu) M_{xy}.$$

Legyenek a henger kijelölt  $(x, y)$  pontjának deformáció alatt történő elmozdulásai  $x, y$ , illetőleg  $z$  irányban  $U, V$ , illetőleg  $W$ . A megnyúlások és görbületváltozások visszavezethetők ezekre az alábbi formulák szerint:

$$(2g) \quad \varepsilon_1 = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$(2h) \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{R},$$

$$(2j) \quad \gamma = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$(2k) \quad \chi_x = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2},$$

$$(2l) \quad \chi_y = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{W}{R^2}, *$$

$$(2m) \quad \chi_{xy} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

### B. Redukció dimenzió nélküli mennyiségekre

Az egyenletekben szereplő mennyiségek nagyságrendjének összehasonlításához szükség van arra, hogy azokat — függetlenül eredeti dimenziójuktól — egyforma egységekben fejezhessük ki. Ezért olyan transzformációnak vetjük őket alá, hogy mérőszámaik dimenzió nélküli számok legyenek. Ezáltal t. i. elérjük, hogy a problémát karakterizáló paraméterek ( $h, R, E$ ) száma lecsökken egyre ( $\nu$ -t nem érdemes kiküszöbölni, bár ez lehetséges volna, az alkalmazott acélnál az 1 nagyságrendű konstansnak: 0,3-nak tekinthető). Ha az alkalmazott terhelés hengerszimmetrikus, fenti egyenletrendszer jó közelítéssel egyetlen negyedrendű differenciálegyenletre vezethető vissza: \*

\* V. ö. [2], 373. old.

(2l) és (2m) egyenletek Timoshenkonál ([1]) kissé más alakban szerepelnek, de z ugyanarra az eredményre vezet, mint fenti egyenletek.

$$(3) \quad \frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2 R^2} W = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} P_3(x, y).$$

Ez kézenfekvővé teszi, hogy az  $x$  hosszúságot a dimenzió nélküli

$$(4) \quad \xi = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} x$$

változóval helyettesítsük.

$W$  mérésére vezessünk be valamilyen  $f$  mértékegységet. (Ez lehet például hengeres héj belső sugarának a tömör hengerre való felhúzásánál az  $e$  élen elszenvedett megnövekedése.) Legyen tehát

$$W = f \cdot w.$$

A megoszló terhelést is transzformáljuk a

$$P_3 = f \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)} p$$

képlet szerint. Ezáltal (3) differenciálegyenletünk a következő alakot ölti:

$$(3') \quad \frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4w = 4p.$$

Visszatérve a nem-hengerszimmetrikus esetre, analóg módon az  $y$  helyett is a dimenzió nélküli

$$(5) \quad \eta = \frac{y}{R}$$

szöveget használjuk. (V. ö. 2. ábra.) Legyen most is

$$(6) \quad W(x, y) = fw(\xi, \eta).$$

Evidens a következő szimbolikus egyenlőség érvényessége:

$$\frac{\partial}{\partial y} : \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \frac{\partial}{\partial \eta} : \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

\* Ez a differenciálegyenlet — *Egerváry Jenő* akadémikus egy megjegyzése szerint — levezethető a következő egyszerű modell alapján is:

A hengeres gyűrűt alkotóirányban haladó rudakra bontjuk fel. A rudakat az  $N_y$  erőknek megfelelően keresztirányban rugalmas szalagokkal vagy rugókkal kötjük össze. (Ezek a rugalmas szalagok helyettesítik a hengernek alkotók menti összefüggését, amelyet modellünkben elhagytunk.) A rugalmas szalagok a rudakra a sugárirányú deformációval arányos megoszló terhelést adnak át. A rudaknak ez az igénybevétele épp a (3) differenciálegyenletre vezet.

Miután a továbbiakban sűrűn elő fog fordulni ez a szintén dimenzió nélküli mennyiség, legyen röviden

$$(7) \quad \frac{1}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} = \varepsilon.$$

Miután feltevésünk értelmében a hengeres héj vastagsága kicsi sugarához képest, ( $h \ll R$ ),

$$\varepsilon^2 \ll 1.$$

Az (1) és (2) egyenletekben szereplő többi mennyiséget a következőképp transzformáljuk:

Hasonlóan a hengerszimmetrikus esethez

$$(8a,b,c) \quad \begin{aligned} P_1(x,y) &= \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot \frac{E}{R} \varepsilon^3 \cdot p_1(\xi, \eta) & P_2(x,y) &= \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot \frac{E}{R} \varepsilon^2 \cdot p_2(\xi, \eta), \\ P_3(x,y) &= \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot \frac{E}{R} \varepsilon^2 p_3(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Továbbá:

$$(9a,b) \quad \bullet U(x,y) = f \cdot \varepsilon \cdot u(\xi, \eta), \quad V(x,y) = f \cdot \varepsilon^2 \cdot v(\xi, \eta), \quad W(x,y) = f \cdot w(\xi, \eta);$$

$$(10a,b,c) \quad \begin{aligned} N_x &= \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E \varepsilon^4 n_\xi(\xi, \eta), \quad N_y = \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E \varepsilon^2 n_\eta(\xi, \eta), \\ N_{xy} &= \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E \varepsilon^3 n_{\xi\eta}(\xi, \eta); \end{aligned}$$

$$(11a,b,c) \quad \begin{aligned} M_x &= \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E R \varepsilon^4 m_\xi(\xi, \eta), \quad M_y = \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E R \varepsilon^4 m_\eta(\xi, \eta), \\ M_{xy} &= \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E R \varepsilon^5 m_{\xi\eta}(\xi, \eta); \end{aligned}$$

$$(12a,b,c) \quad Q_x = \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E \varepsilon^3 q_\xi(\xi, \eta), \quad Q_y = \sqrt[3]{3(1-\nu^2)} f \cdot E \varepsilon^4 q_\eta(\xi, \eta).$$

Természetesen ez csak egy önkényesen kiválasztott lehetőség arra, hogy az egyenleteinkben szereplő mennyiségeket dimenzió nélküli mennyiségekkel helyettesítsük.

Elvileg szabadságunkban állna pl. (8), (9), (10) stb. képletekben más  $\varepsilon$ -hatványok alkalmazása, vagy az  $\varepsilon$  hatványok teljes elhagyása. A transzformációs képletek felhasználásával az 1. és 2. egyenletek bal- és jobboldalai  $\varepsilon$  olyan polinomjai lesznek, melynek együtthatói a kis betűvel jelölt dimenzió nélküli mérőszámokból és azoknak  $\xi$ , illetve  $\eta$  szerinti deriváltjaiból alakított kifejezések.

A transzformációs formulákat úgy választottuk meg, hogy

1.  $h$ ,  $R$  és  $E$  külön ne szerepeljenek az egyenletekben, tehát ezek csak az  $\varepsilon$  mérőszámon keresztül befolyásolják egyenleteinket.

2. Minden változó legalább egyszer legalacsonyabb hatványon is előforduljon valamelyik egyenletben.

3. Az  $\varepsilon$ -ban legalacsonyabbfokú tag legalább két redukált mennyiséget tartalmazzon.



Meg fog mutatkozni, hogy a cikkben tárgyalt feladat és számos más probléma esetében a kisbetűvel jelzett dimenzió nélküli mennyiségek 0-tól általában különböző, véges határértékhez tartanak, ha  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Miután pedig arra törekszünk, hogy — tekintetbe véve a héj vékonyságát — bizonyos mennyiségeket elhanyagoljunk, a vonással jelzett mennyiségek nagyságrendjének változatlan volta segítségünkre lesz a nagyságrendek megítélésében.

Írjuk a deformációmennyiségek (2g)–(2m) kifejezéseit a (2a)–(2f) egyenletekbe és helyettesítsük be a (8)–(12) dimenzió nélküli mennyiségeit.

### *Egyensúlyi egyenletek.*

$$(12a) \quad \frac{\partial n_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial n_{\xi\eta}}{\partial \eta} = -p_1,$$

$$(12b) \quad \frac{\partial n_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial n_{\eta}}{\partial \eta} + \varepsilon^2 q_{\eta} = -p_2,$$

$$(12c) \quad \frac{\partial q_{\xi}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial q_{\eta}}{\partial \eta} - n_{\eta} = -p_3,$$

$$(12d) \quad \frac{\partial m_{\xi}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial m_{\xi\eta}}{\partial \eta} + q_{\xi} = 0,$$

$$(12e) \quad \frac{\partial m_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial m_{\eta}}{\partial \eta} + q_{\eta} = 0.$$

### *Deformációk, erők és nyomatékok összefüggése.*

$$(13a) \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = \varepsilon^2 n_{\xi} - \nu n_{\eta},$$

$$(13b) \quad \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + w = -\varepsilon^2 \nu n_{\xi} + n_{\eta},$$

$$(13c) \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = 2(1 + \nu) n_{\xi\eta},$$

$$(13d) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{4}{1 - \nu^2} (m_{\xi} - \nu m_{\eta}),$$

$$(13e) \quad \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + w \right) = \frac{4}{1 - \nu^2} (-\nu m_{\xi} + m_{\eta}),$$

$$(13f) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{4}{1 - \nu^2} m_{\xi\eta}.$$

### *C. A rendszer közelítő megoldása*

Ha  $\varepsilon = 0$  mellett vannak a (12)–(13) egyenletrendszernek olyan  $n_{\xi}, \dots, m_{\xi}, \dots, u, v, w$  megoldásai, amelyek feladatunk (egyelőre nem részletezett) határfeltételeit is kielégítik, ezek a megoldások tekinthetők az exakt megoldás első közelítésének.

A közelítő megoldás használhatósága nyilvánvalóan függ a határfeltételektől. Pl. a héj felületén megoszló terhelés esetén bizonyos határfeltételek mellett úgy számíthatók ki a deformációk, mintha a héj csak saját felületének érintősíkjába eső erőket adna át, hajlítónyomatékokat nem. (Membránszerű terhelés.) De ha a határfeltételek olyanok, hogy a héj peremén nyomatéknak kell átadódnia, (pl. a héj pereme a terhelések eredőjére merőleges síkon be van fogva), a membránelmélet nem használható.

Az alábbiakban tehát megvizsgáljuk, hogy az egyenletrendszernek van-e  $\varepsilon = 0$  mellett megoldása és milyen határfeltételek elégíthetők ki a megoldások rendszerével.

Figyelemreméltó, hogy egyenletrendszerünkben az  $\varepsilon$  első hatványát tartalmazó tagok kiestek, tehát a közelítő megoldás  $\varepsilon^2 = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{h}{R}$  nagyságrendű relatív hibával elégíti ki az egyenletrendszert.

Az  $\varepsilon^2$ -os tagok elhagyása után (13d) és (13e) egyenletekkel az  $m_\xi$  és  $m_\eta$   $W$ -re vezethető vissza. Továbbmenve (12d)-ből és (12c)-ből most már  $q_\xi$ , majd  $n_\xi$  is kifejezhető  $w$ -vel, végül (13d)-be helyettesítve a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$(14) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4w = 4p_3(\xi, \eta).$$

Ha a hengerpalástra merőleges terhelés legfeljebb a határokon van:

$$(14a) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4w = 0.$$

(14) általános megoldása

$$(15) \quad w = w_0(\xi) + A(\eta) \operatorname{ch} \xi \cos \xi + B(\eta) \operatorname{ch} \xi \sin \xi + C(\eta) \operatorname{sh} \xi \cos \xi + D(\eta) \operatorname{sh} \xi \sin \xi,$$

ahol  $w_0(\xi)$  a (14) egyenletnek egy partikuláris megoldása\* és  $A(\eta)$ ,  $B(\eta)$ ,  $C(\eta)$ ,  $D(\eta)$   $\eta$ -től általában még függő integrálási állandók.

Ha  $w$  ismert, az összes többi változó kiszámítható, tekintetbevéve (14) differenciálegyenletet is. Képleteink egyszerűbb írásmódja kedvéért vezessünk be olyan  $s_1(\xi, \eta)$ ,  $s_2(\xi, \eta)$ ,  $s_3(\xi, \eta)$   $\eta$ -ban  $2\pi$  szerint periódikus függvényeket, amelyekre

$$p_1 = \frac{1}{4} \frac{\partial^5 s_1}{\partial \xi^5}, \quad p_2 = \frac{1}{4} \frac{\partial^5 s_2}{\partial \xi^5}, \quad p_3 = \frac{\partial^4 s_3}{\partial \xi^4}.$$

Ezekkel:

$$(16a) \quad m_\eta = \frac{\nu}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2},$$

$$(16b) \quad m_{\xi\eta} = \frac{1-\nu}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$(16c) \quad m_\xi = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2},$$

\*  $w_0$  meghatározását illetően v. ö. [3], 28. old.

$$(16d) \quad q_{\xi} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3},$$

$$(16e) \quad q_{\eta} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta},$$

$$(16f) \quad n_{\eta} = w = -\frac{1}{4} \frac{\partial^4 (w-s)}{\partial \xi^4},$$

$$(16g) \quad n_{\xi\eta} = \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial^4 (w-s_2-s_3)}{\partial \xi^3 \partial \eta} + E(\eta) \right],$$

$$(16h) \quad n_{\xi} = -\frac{1}{4} \left[ \frac{\partial^4 (w+s_1-s_2-s_3)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + E'(\eta) + F(\eta) \right],$$

$$(16j) \quad u = \frac{\nu}{4} \frac{\partial^3 (w-s_3)}{\partial \xi^3} + G(\eta),$$

$$(16k) \quad v = \frac{2+\nu}{4} \frac{\partial^3 (w'-s_3)}{\partial \xi^2 \partial \eta} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^3 s_2}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \left[ \frac{1+\nu}{2} E(\eta) - G'(\eta) \right] \xi + H(\eta).$$

$E, F, G, H$   $\eta$ -tól függő integrálási állandók.

#### D. Határfeltételek

A határfeltételek a henger két alapkörén ható erők, nyomatékok és deformációk között adnak összefüggéseket.

Tegyük fel (ami a leggyakoribb eset), hogy a határfeltételek két vegyes csoportra oszthatók:

1. A hajlítással összefüggő mennyiségek  $\left( w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}, m_{\xi}, m_{\xi\eta}, m_{\eta}, q_{\xi}, q_{\eta} \right)$  közötti összefüggések és

2. a felületen belüli deformációval kapcsolatos mennyiségek:  $n_{\xi}, n_{\xi\eta}, n_{\eta}, u, v$  közötti összefüggések.

Legyen a héj két alapköre

$$\xi = \xi_1 \quad \text{és} \quad \xi = \xi_2$$

Tegyük még fel, hogy a határfeltételek

$$(18a) \quad a_1^{(i)} w(\xi_1, \eta) + b_1^{(i)} w(\xi_2, \eta) + a_2^{(i)} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{\xi_1} + b_2^{(i)} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{\xi_2} + \dots$$

$$\dots + b_8^{(i)} q_{\eta}(\xi_2, \eta) = F^{(i)}(\eta), \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

illetőleg

$$(18b) \quad c_1^{(i)} n_{\xi}(\xi_1, \eta) + d_1^{(i)} n_{\xi}(\xi_2, \eta) + c_2^{(i)} n_{\xi\eta}(\xi_1, \eta) + \dots + d_5^{(i)} v(\xi_2, \eta) = G^{(i)}(\eta), \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

alakúak, ahol az  $a, b, c, d$  számok  $\eta$ -tól is független állandók, az  $F^{(i)}(\eta)$  és  $G^{(i)}(\eta)$  pedig  $\eta$ -nak  $2\pi$  szerint periodikus, Fourier-sorba fejthető függvényei.

Ilyen feltételek mellett kimondhatjuk, hogy a (16) egyenletek általában (kivételes esetektől eltekintve) jó közelítő megoldását adják a (13) egyenletrendszernek. Ugyanis a (18a)-ban használt feltételek a (15) egyenlet  $A, B, C, D$  együtthatóira lineáris egyenletrendszert adnak, amelynek mindig van megoldása, hacsak a rendszer determinánsa nem 0. Továbbá: ha ez a lineáris egyenletrendszer inhomogén, az  $A, B, C, D$  együtthatók közül legalább egy nem tűnik el azonosan és így a (15) szerint  $w(\xi, \eta) - w_0(\xi, \eta)$  sem lesz azonosan 0. A kapott  $w(\xi, \eta) - w_0(\xi, \eta)$  függvény  $\eta$ -nak  $2\pi$  szerint periodikus Fourier-sorba fejthető függvénye.  $w$  ismeretében a (18b) egyenletek a (16) egyenletekben szereplő  $E(\eta), F(\eta), G(\eta), H(\eta)$  függvényekre a következő alakú elsőrendű differenciálegyenletrendszert kapjuk:

$$(19) \quad \alpha^{(i)} E + \beta_1^{(i)} E' + \sigma_2^{(i)} F + \alpha_3^{(i)} G + \beta_3^{(i)} G' + \alpha_4 H = \varphi^{(i)}(\eta), (i = 1, 2, 3, 4)$$

ahol az  $\alpha, \beta$  számok állandók, a  $\varphi$ -k pedig  $2\pi$  szerint periodikus, Fourier-sorba fejthető függvények.

Ismeretes, hogy a rendszernek mindig van  $2\pi$  szerint periodikus megoldása, ha egy

$$(20) \quad |\alpha_1^{(i)} + k\beta_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \alpha^{(i)} + k\beta^{(i)}, \alpha_4^{(i)}| \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

determináns sem tűnik el. Ha a  $w - w_0$ -ra kapott megoldás valódi függvénye  $\eta$ -nak is (tehát az előbb vázolt hajlítási probléma  $w - w_0$  megoldása nem hengerszimmetrikus), akkor a (16) egyenletek alapján könnyen belátható, hogy az  $n_\eta, n_{\xi\eta}, n_\xi, u, v$  függvények nem tűnnek el azonosan.

Ezzel tehát konstruktív úton kimutattuk, hogy *kivételes esetektől eltekintve van a leegyszerűsített (13) egyenletrendszernek  $\varepsilon^2$ -től független megoldásrendszere, amelynek egy függvénye sem tűnik el\*, tehát  $\varepsilon^2$  nagyságrendű hibától eltekintve kielégíti a pontos (13) egyenletrendszert.*

### *E. A megoldásra vonatkozó megjegyzések*

1. Nagy számítástechnikai könnyebbséget jelent, hogy feladatunknak a héj hajlítására vonatkozó részének megoldása ugyanúgy alakul, mint a hengerszimmetrikus esetben, tehát ugyanazzal a modellel szemléltethető. (Alkotóirányú tartókkal és azokat keresztirányban összekötő rúgókkal.) Egy-egy alkotómenti rúd deformációja, a benne ébredő feszültségek csak az alkotó mentén, illetőleg annak végén ható erőktől függ. Így minden alkotóra külön megoldandó közönséges differenciálegyenletrendszert kapunk. Ezért a továbbiakban a parciális differenciálegyenlet helyett mindenütt közönséges differenciálegyenletet írunk, ahol ez nem adhat félreértésre okot, és  $\eta$ -t egyszerű paraméternek tekintjük. A közönséges differenciálás jele tehát mindenütt a  $\frac{\partial}{\partial \xi}$  jelet helyettesíti.

\* Ha egy vagy több függvény azonosan eltűnik, akkor megeshetnének, hogy valamely egyenlethől minden  $\varepsilon^2$ -től független tag kiesnék és az elhanyagolt  $\varepsilon^2$  nagyságrendű tagok dominálónak válnának.



2. Ez a megoldás csak olyan külső erőket és terheléseket vesz tekintetbe, amelyekre a (9)–(12) transzformációk utáni (kisbetűvel jelölt) értékek 1 nagyságrendűek. Tehát pl.

$$Q_x + AQ_y = 0$$

alakú határfeltétel

$$q_\xi = 0$$

egyenletbe megy át a transzformáció után, ha  $A$  1 nagyságrendű állandó és csak akkor kapunk

$$q_\xi + aq_\eta = 0$$

alakú határfeltételt, ha  $A$  nagy szám  $\left(\frac{1}{\varepsilon}$  nagyságrendű), tehát  $Q_y$  sokkal nagyobb súllyal szerepel a határfeltételben, mint  $Q_x$ .

3. Az előző megjegyzés értelmében a határfeltételek a (9)–(12) redukció során erősen leegyszerűsödhetnek. Ezért igen fontos gyakorlati esetek határfeltételei vezethetnek ellentmondó egyenletrendszerre.

Így  $h \ll R$  esetén megoldásunk kielégíti a gyakorlat által megszabott pontossági követelményeket, különös tekintettel a méretezésnél felhasznált empirikus számadatok ( $E$ ,  $\nu$ , megengedett feszültségek) bizonytalanságára.

4. Figyelemreméltó, hogy a relatív hiba  $\varepsilon^2$ -tel (és nem  $\varepsilon$ -nal) arányos. *Ugyanekkora nagyságrendű hibát követünk el, ha a szokásos módon elhanyagoljuk a  $Q_x$  nyíróerők szögtorzító hatását, a hajlítónyomatékok okozta görbületváltozás mellett.\**

5. A (12), (13) egyenletrendszer (15), (16) képletek által meghatározott

\* A hengeres héj problémájánál a nyíróerő szögtorzító hatását elhanyagolva az (1), (2) egyenletrendszerhez jutunk. Ha ezt a megoldást a nyíróerő szögtorzító hatásának figyelembevételével finomítani akarjuk, az (1) és (2) alapján kiszámítjuk  $Q_x$  nyíróerő értékét. Evvel megbecsülhető a szögtorzulás. Írjuk fel megoldásunkat

$$\bar{W} = W + W^*$$

alakban, ahol  $\bar{W}$  a deformáció pontosabb értéke,  $W$  az (1), (2) egyenletek alapján számítható közelítő érték,  $W^*$  pedig a  $Q_x$  szögtorzító hatása következtében alkalmazandó korrekciós tag.

Közelítésben feltesszük, — miután a deformációnak a nagyságrendjét akarjuk megbecsülni, — hogy a  $\tau_{xz}$  nyírófeszültség a  $h$  vastagság mentén egyenletesen oszlik el:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x}{h}.$$

A síkbeli feszültségeloszlás elmélete alapján a henger alapsíkjával párhuzamos síkmetszet és a hengeralkotó szögének torzulása közelítőleg  $\frac{Q_x}{h}$  nyírófeszültség következtében

$$\frac{\partial W^*}{\partial x} = \frac{Q_x}{\frac{\nu}{2(1+\nu)} E h}.$$

megoldása finomítható a perturbációszámítás módszerei szerint. Legyen pl. (12a)-ban

$$\begin{aligned}\eta_{\xi} &= n_{\xi 0} + \varepsilon^2 \Delta n_{\xi}, \\ n_{\xi \eta} &= n_{\xi \eta 0} + \varepsilon^2 \Delta n_{\xi \eta},\end{aligned}$$

ahol  $n_{\xi 0}, n_{\xi \eta 0}$ , a (15), (16) alapján meghatározható nulladik közelítést jelentő megoldások. Akkor az ismeretlen  $\varepsilon^2 \Delta n_{\xi}, \varepsilon^2 \Delta n_{\xi \eta}$  korrekciós tagokra érvényes differenciálegyenlet

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta n_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\Delta n_{\xi \eta}) = 0.$$

Hasonlóképp vehetők figyelembe a határfeltételekben is az esetleg elhanyagolt tagok.

Legyen valamely határfeltétel alakja pl.

$$L(n_{\xi}^{(1)}, n_{\xi}^{(2)}, n_{\xi \eta}^{(1)}, \dots) + \Delta \varepsilon (n_{\xi}^{(1)}, n_{\xi}^{(2)}, n_{\xi \eta}^{(1)}, \dots) = f(\eta),$$

ahol  $L$  és  $\Delta$  az  $n_{\xi}^{(1)} \dots$  állandó együtthatójú lineáris függvényei és az (1) felső index a  $\xi_1$  abszcisszájú határkörre vonatkozó értékeket jelöl.  $n_{\xi 0}, n_{\xi \eta 0}, \dots$ , kielégítik az

$$L(n_{\xi 0}, n_{\xi \eta 0}, \dots) = 0$$

egyenletet. Ha  $n_{\xi 0} = n_{\xi} + \varepsilon \cdot \Delta n_{\xi}$ , stb., akkor  $\Delta n_{\xi}, \dots$  kielégítik az

$$L(\Delta n_{\xi}^{(1)}, \Delta n_{\xi}^{(2)}, \Delta n_{\xi \eta}^{(1)}, \dots) = -\Delta (n_{\xi 0}^{(1)}, n_{\xi 0}^{(2)}, n_{\xi \eta 0}^{(1)}, \dots).$$

Tehát a  $\Delta n_{\xi}, \dots$  értékekre vonatkozó határfeltételek hasonló alakúak, mint az  $n_{\xi 0}, \dots$  értékekre vonatkozó feltételek.

Ilyen egyenletrendszerre vezetnek pl. általában a következő típusú határfeltételek:

$$L^{(i)}(n_{\xi}, n_{\xi \eta}, n_{\eta}) = F^{(i)}(\eta),$$

ahol  $L^{(i)}$  a felületirányú  $n$ -erők (18b) szerinti lineáris kombinációi, vagy:

$$L^{(i)}(u, v) = F^{(i)}(\eta).$$

*Tehát megoldásunk általában nem használható, ha a határfeltételek olyanok, hogy a henger mindkét végén előírják a felületirányú erőket, sem pedig akkor, ha a deformációkat írják elő.*

Hogy ezt összehasonlíthassuk a  $\frac{\partial W}{\partial x}$  értékkel, redukáljuk képleteinket dimenzió nélküli alakra a (4), (6), (12) képletek alapján:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w^*}{\partial \xi} &= \frac{2(1+\nu)}{\nu} q_{\xi} \cdot \varepsilon^2, \text{ és} \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} &= \frac{2(1+\nu)}{\nu} \frac{\partial q_{\xi}}{\partial \xi} \cdot \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Ez a tag tehát a (13d) egyenletben  $\varepsilon^2$  nagyságrendű hibát okoz, tehát ugyanolyan nagyságrendű hibát, mint a többi elhanyagolt tag.

Abban az esetben, ha a hengerfelületre ható terhelés egy része valamilyen a hengerfelületre írt  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  görbék mentén oszlik meg, amelyek bizonyos símasági követelményeket tesznek (pl. a kiterített hengerpaláston analitikus görbék megfelelőek), a (14) differenciálegyenlet jobboldala  $\gamma_1$ -en,  $\gamma_2$ -n, ... nincs értelmezve.  $q_\xi$ -nek — és egyúttal  $w'''$ -nek is, —  $\gamma_1$ -en,  $\gamma_2$ -n, ... a görbén megoszló terhelésnek megfelelő ugrása van. Ez könnyen igazolható, ha a  $\gamma_k$  görbén ható terhelést először egy  $\delta$  szélességű sávra »kenjük szét« — erre érvényesek a (14)–(15)–(16) egyenletek — azután  $\delta \rightarrow 0$  határátmenetet végzünk. A határátmenet elvégzésével igazolható, hogy a (16) egyenletek görbékre koncentrált terhelés esetén is érvényben maradnak. Ugyanis a vonal mentén megoszló terhelés miatt  $\gamma_1$ -en,  $\gamma_2$ -n  $\frac{\partial^3 s_i}{\partial \xi^3}, \frac{\partial^3 s_i}{\partial \xi^2 \partial \eta}, \frac{\partial^3 s_i}{\partial \xi \partial \eta^2}$  véges ugrást szenved. Ennélfogva a (16) egyenletek jobboldalai mind korlátos függvények.  $\gamma_k$  és  $\gamma_{k+1}$  között érvényes marad a (14) egyenlet is. Ennek alapján  $w$  éppúgy szakaszról szakaszra haladva határozható meg, mint koncentrált erőkkel és megoszló terheléssel terhelt tartó lehajlása.

## II. RÉSZ

### A vékony héjak elméletének alkalmazása

#### A. Határfeltételek.

A bevezetésben körvonalazott műszaki probléma megoldása a vékony hengeres héjak elméletének alkalmazását kívánja. A méretezendő cső alkotóirányú mérete nem tekinthető olyan hosszúnak, hogy a  $H$  hengerrel, illetőleg  $T$  tárcsával való érintkezési vonalak következtében fellépő hajlítófeszültségek csak »Randstörung«-ot jelentsenek és így gyorsan csillapodó tranziens hullámot adjanak. (Ez az első rész eredményeinek felhasználásával azt jelenti, hogy a  $\xi$  dimenzió nélküli paraméternek a cső teljes szabad hosszával ( $l$ ) számított legnagyobb értéke,  $\lambda$ , sem nagy az egységgel összehasonlítva. (Vagyis a cső méretezéséhez a felhasználható legegyszerűbb elméletnek is tekintetbe kell vennie a hajlítófeszültségeket.)

Meg kell tehát állapítanunk, hogy az I. részben ismertetett közelítő eljárás alkalmazható-e feladatunk megoldásához. Mint láttuk, ez elsősorban a határfeltételek jellegétől függ.

Vizsgáljuk meg a cső végeinek rögzítési módját a megoldandó műszaki feladat esetében.

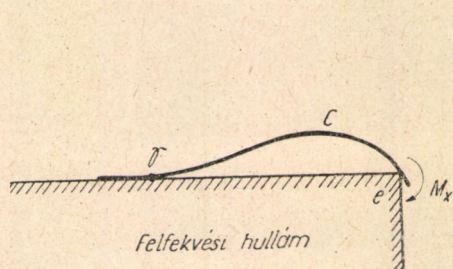
Ahhoz, hogy a hengeres héj műszakilag kielégítő módon rögzítse egymáshoz a  $H$  tömör hengert és a  $T$  tárcsát, szükséges, hogy

1.  $C$  a teljes kerületen érintse  $T$ -t,
2.  $C$  a tömör henger alaplapjának teljes  $e$  élhosszán érintse  $H$ -t,
3. A cső  $e$ -n kívül legalább még egy  $\gamma$ , a tömör henger palástján körbefutó görbe teljes hosszán érintse  $H$ -t.

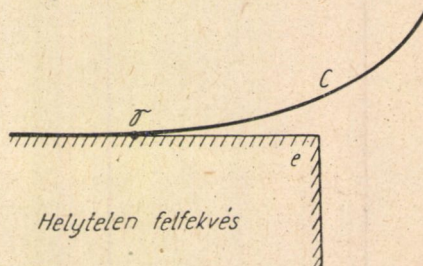
Az 1. feltétel biztosítja, hogy a cső  $T$ -n oly módon van rögzítve, hogy nyomatékot nem visz át, 2. és 3. pedig, hogy — befogáshoz hasonlóan — nyomatékot is át tud venni  $H$ -tól.

A továbbiakban végig feltételezzük ennek a három feltételnek a teljesülését, még akkor is, amikor azt tesszük vizsgálat tárgyává, hogy milyen feltétellel teljesül ez a három műszaki követelmény, az ezek alapján levezetett egyenletekből állapítjuk meg érvényességük határát.

Az  $e$  él általában  $C$ -nek egy olyan szakaszával határos, amely nem érintkezik  $H$ -val. Ugyanis az érintkezés azt jelentené, hogy a henger radiális deformációja állandó, ez pedig — feltételezve, hogy (14)–(15)–(16) egyenleteink jó közelítést adnak, ami utólag igazolható, — azt eredményezné, hogy a  $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$  és vele  $m_\xi$ , amely nyilván nem azonosan 0 az  $e$ -nek  $T$  felé eső szomszédságában, az  $e$  élen ugrással menne át 0-ba. Ez pedig végtelen nagy  $q_\xi$ -t adna (16d) értelmében. Ésszerűbb feltennünk, hogy  $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$  folytonosan változik és  $C$  csak távolabb, egy olyan  $\gamma$  görbén éri el újra a hengert, ahol a (14) egyenletek alapján kiszámított  $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0$ . Innen már símán ráfekszik a cső a hengerre (4a. ábra). A csőnek 4b. ábra szerinti deformációja műszaki szempontból nem nyújt elegendő biztonságot, nem engedhető meg.



4a. ábra



4b. ábra

A megoldás megkonstruálásával igazoljuk, hogy a 4a. ábra szerinti megoldás van. Másrészt, ha (14), (15), (16) egyenletek érvényesek, akkor bebizonyítjuk (v. ö. II. rész 3. pont), hogy  $\gamma$  után  $C$  nem válhat el többé  $H$ -tól, hacsak  $H$ -nak elegendő hosszú szakasza áll még rendelkezésre a sima felfekvés céljára.

Az I. részben bebizonyítottak alapján a (14)–(15)–(16)-ot kielégítő megoldás létezése — mint alább látni fogjuk — egymagában elegendő az alkalmazott elhanyagolások jogosságának igazolására.

Megközelítőleg sem tekinthető a cső a hengeren befogottnak, t. i. különösen kis  $l$  értékeknél, illetőleg ha  $e$ -n nagy  $M_x$  nyomaték hat, a számítás igen nagy  $Q_x$  nyíróerőt eredményezne, ami azonban a valóságban nem lép fel az  $e$  csőkeresztmetszet elfordulásából adódó nagyobb rugalmasság miatt.

A cső a  $\gamma$  görbe egyik oldalán  $H$ -t teljes palástja mentén érinti. Jelöljük az érintkezés területét  $t$ -vel. Miután  $H$  átmérője nagyobb a cső belső átmérőjénél és  $H$  merevnek tekinthető tömör henger, a cső és henger között  $C$  felsajtolásakor a csőben keletkező gyűrűs húzófeszültségből kiszámítható jelentékeny tapadó súrlódási erők lépnek fel a  $t$  felületrészen. Ez a súrlódás az elcsuszás határán a teljes, felületre normális erőhatással arányos, tehát végeredményben  $t$  terü-



tével. Ezért a biztos erőátvitel érdekében megkívánhatjuk, hogy  $t$  területe legyen elegendő a tapadás létrehozásához, tehát legyen  $t$ -n belül egy olyan  $e$ -vel párhuzamos  $k$  kör, amelyen  $C$  a terhelés hatása alatt is mozdulatlan marad.

Foglalkozzunk  $C$ -nek  $k$  és  $T$  közti szakaszával. Erre a szakaszra a következő külső erők hatnak:

1.  $k$  és  $\gamma$  között a felsajtolás következtében keletkező felületen megoszló, felületre normális terhelés.

2.  $k$  és  $\gamma$  között a tapadó súrlódás, mint felületen megoszló, a felületelem érintősíkjába eső terhelés,

3.  $\gamma$ -n a felületre merőleges, vonal mentén megoszló terhelés (reakcióerő),

4.  $e$ -n a felületre merőleges irányban ható vonal mentén megoszló terhelés (a felsajtolás következtében és reakcióerő),

5. A hengerpalást érintősíkjába eső súrlódás mint az  $e$  élen és  $\gamma$ -n megoszló terhelés.

Ezekon kívül a határokon:

6.  $T$ -n a felületre merőleges, jó közelítéssel vonal mentén megoszló terhelés (a felsajtolás és a  $G$  erő következtében). A felületi érintősíkbba eső terhelés nincs, tehát feltesszük, hogy a tárcsán a cső szabadon elcsúszhat. (A fellépő súrlódás elhanyagolható.) Ennélfogva a tárcsa nem gyakorol  $C$ -re a felületi érintősíkbba eső erőhatást:  $N_x = N_{xy} = 0$ . A  $Q_x$  nyíróerő nagyságát a felsajtolás okozta sugárnövekedés és a  $G$  erő szabja meg. Hasonlóképp feltehetjük, hogy a tárcsa nem gátolja  $C$ -nek a  $T$  érintője körüli elfordulását, tehát itt is  $M_x = 0$ .

7. A  $k$ -n esetleg fellépő, a felületi érintő síkjában fellépő erők ismeretére nincs szükségünk a további vizsgálatokhoz. Viszont feltesszük, hogy itt a felület érintősíkjába eső elmozdulás nincs:

$U = 0, V = 0$ . Miután  $k$  mentén  $C$  érinti  $H$ -t, itt

$$W = f, W' = 0.$$

Az 1., 2., 3., 4. terhelésekre alkalmazhatók az (1)–(2) egyenletek. Az 5. és 6. szerint a hajlításra vonatkozó határfeltételek el vannak választva a felületirányú erőkre és deformációkra vonatkozó (membránszerű) határfeltételektől. Ez azt jelenti, hogy az I. rész  $C$ . pontja szerint a hajlítási probléma a felület érintősíkjában ható erőktől és elmozdulásoktól elkülönítve tárgyalható. Tegyük fel, hogy a hajlítási problémát megoldottuk a hajlítással összefüggő határfeltételek figyelembevételével.

Akkor megoldásunk helyessége utólag verifikálható. Ugyanis (19) egyenleteink most a következőképp alakulnak, tekintetbevéve

$$\xi = \xi_1 \text{-nél } u = 0, v = 0,$$

$$\xi = \xi_2 \text{-nél } n_\xi = 0, n_{\xi\eta} = 0$$

határfeltételeket:

$$E(\eta) = -\frac{1}{4} \left[ \frac{\partial^4}{\partial \xi^3 \partial \eta} (w - s_1 - s_2 - s_3) \right]_{\xi=\xi_2} \equiv \dot{\varphi}_1(\eta)$$

$$E'(\eta) + F(\eta) = -\frac{1}{4} \left[ \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} (w - s_1 - s_2 - s_3) \right]_{\xi=\xi_2} \equiv \varphi_2(\eta)$$

$$G(\eta) = -\frac{\nu}{4} \left[ \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} (w - s_3) \right]_{\xi = \xi_1} \equiv \varphi_3(\eta)$$

$$\left[ \frac{1+\nu}{2} E(\eta) - G'(\eta) \right]_{\xi_1} + H(\eta) =$$

$$-\frac{2+\nu}{4} \left[ \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} (w - s_3) \right]_{\xi = \xi_1} - \frac{1+\nu}{2} \left[ \frac{\partial^3 s_2}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\xi = \xi_1} \equiv \varphi_4(\eta).$$

( $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ -nak  $2\pi$  szerint periodikus függvényei). Nyilvánvaló, hogy ennek az egyenletrendszernek mindig van  $\eta$ -ban periodikus megoldása, ha  $w$  és  $s_1, s_2, s_3$   $\eta$ -ban periodikus függvények.

Tehát: Ha a »membránszerű« terhelés jellemző mennyiségeire nincs szükségünk, elegendő az elkülönített hajlítási problémával foglalkoznunk (amely csak  $n_\eta$ -n keresztül függ össze a membránszerű terhelés mennyiségeivel, és önállóan megoldható. A megoldás a (kisbetűs) dimenzió nélküli mennyiségek segítségével történik és létezése egymagában igazolja az elhanyagolások jogosságát.

Differenciálegyenletrendszerünk  $k$ -tól  $T$ -ig terjedő tartománya három csatlakozó részre bontható fel.

1.  $T$ -től  $e$ -ig.

2.  $e$ -től  $\gamma$ -ig.

3.  $\gamma$ -tól  $k$ -ig. Itt hajlítási probléma egyáltalán nincs a mondottak értelmében, vagyis ezzel a szakasszal külön foglalkoznunk felesleges.

Vegyük fel koordinátarendszerünk  $\xi$ -tengelyét (v. ö. 2. ábra) a henger valamely kiválasztott alkotóján oly módon, hogy az origó  $e$ -re essék, a pozitív  $\xi$ -tengely  $T$  felé mutasson. Legyen a (4) egyenlet szerint redukált  $eT$  távolság  $\lambda$ , továbbá ezen az alkotón hasonlóképpen mérve  $\gamma$  abszcisszája  $-\varrho$ . Tehát

$$\lambda = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\hbar R} l, \quad \varrho = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\hbar R} l_0,$$

ahol  $l$  az  $e$  él és  $T$  valódi távolsága és  $l_0$  a »felfekvési hullám« hossza, amely még a kiválasztott alkotó  $\eta$  középponti szögétől függ.

Legyen a (6) egyenlet szerint  $W$  mérésére választott  $f$  egység a cső sugarának az  $e$  élre történő felhúzásnál elszenvedett megnövekedése. ( $f$  mindig pozitív konstans). Tehát  $W(0, y) = f$ .

Legyen továbbá

$$W(l, y) = f^*(y) = f_0 + f_1^*(y)$$

ahol  $f^*(y)$  jelenti a  $T$  síkjában lévő csőkeresztmetszetre a tárcsa által rákényszerített teljes radiális deformációt (eredő sugárnövekedés).  $f_1$  a súlyterhelés nélkül pusztán a nagyobb átmérőjű tárcsára történő felsajtolás által előidézett sugárnövekedést (ez  $y$ -tól független) és  $f_1^*(y)$  a  $G$  erő következtében létrejövő nem tengelyszimmetrikus sugárnövekedés értékét.

Feltéve, hogy  $C$  a deformáció alatt is érinti  $T$ -t teljes kerületén és a tárcsa középpontjának  $G$  irányába eső kitérése  $f_1$ ,

$$f_1^*(y) = f_1 \cdot \cos \eta.$$

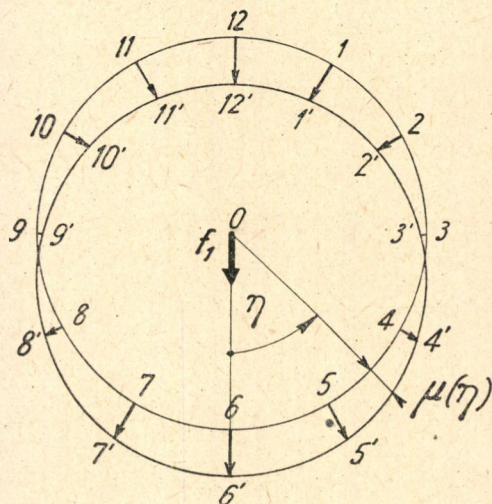
A következőkben  $G$  helyett  $f_1$ -et tekintjük adottnak és keressük, hogy az  $f, f_0$  és  $f_1$  deformációk másutt milyen deformációkat és feszültségeket okoznak.  
Legyen

$$f^*(y) = f \cdot \mu(\eta)$$

ahol  $\varepsilon \rightarrow 0$  esetén  $\mu(\eta) = O(1)$ .

Tekintettel a transzformációs formulákra,  $\varepsilon \ll 1$  esetén  $U \ll \mu_{\max} \cdot f$  és  $V \ll \mu_{\max} \cdot f$  ( $\mu_{\max}$  jelenti  $\mu(\eta)$  legnagyobb értékét). Ebből azt a meglepő következtetést vonhatjuk le, hogy a  $C$  cső  $T$  síkjában lévő  $K$  keresztmetszetének pontjai a  $G$  erő hatása alatt nem függőlegesen, hanem sugárirányban mozdulnak el! (v. ö. 5. ábra). Ez azt eredményezi, hogy ha  $G$  függőlegesen lefelé hat, a  $K$  pontjai felül távolodnak egymástól, alul közelednek, vagyis  $K$  felül erős nyúlást, alul zsugorodást szenved.

Az 1., és 2. szakasz hajlítási problémája következőkép fogalmazható :



5. ábra

Keressük a (14a) differenciálegyenlet olyan  $w_1$  és  $w_{11}$  megoldásait, amelyekre érvényesek a következő feltételek :

1) *Határfeltételek a  $w_1(\xi)$  megoldásra. ( $eT$  szabad csőszakasz)*

$$(22a) \quad w_1(0) = 1$$

$$(22b) \quad w_1(\lambda) = \mu(\eta)$$

$$(22c) \quad w_1''(\lambda) = 0$$

(a tárcsa saját érintője körül forgatónyomatékokat nem ad át a csőnek).

2) *Határfeltételek a  $w_{II}(\xi)$  megoldásra. ( $e\gamma$  felfekvési hullám)*

$$(23a) \quad w_{II}(-\varrho) = 1,$$

$$(23b) \quad w'_{II}(-\varrho) = 0,$$

$$(23c) \quad w''_{II}(-\varrho) = 0,$$

( $\gamma$ -n  $m_\xi$  nyomaték nem lép fel, v. ö. (16c)–(16d) egyenletek),

$$(23d) \quad w_{II}(0) = 1.$$

3) *Csatolási feltételek.*

$$(24a) \quad w'_I(0) = w'_{II}(0) = \kappa \quad (\text{a cső } e\text{-n nem törik meg})$$

$$(24b) \quad w''_I(0) = w''_{II}(0) = m \quad (\text{a nyomaték } e\text{-n folytonosan változik}).$$

$w_I$  és  $w_{II}$  általános megoldása (15) szerint összesen 8 szabadon választható állandót tartalmaz. Miután fentiekben 9 feltételt kaptunk, a feladat rögzített  $\varrho$  mellett túlhatározottá válnék.

Tehát  $\varrho$  nagysága a kilencedik ismeretlen egyenletrendszerünkben: a  $\gamma e$  felfekvési hullám hossza a terheléstől függ.

Feladatunkat három lépésben oldjuk meg:

I. Meghatározzuk (22) és (24a) határfeltételekkel megadott  $w_I$  függvényt, miközben  $\kappa$  értéket ismertnek tekintjük. (Ezáltal (24a) is határfeltétellé válik.)

II. Meghatározzuk  $w_{II}$ -t a (23) és (24a) határfeltételek segítségével. Ezáltal  $\varrho$  és  $\kappa$  között összefüggést kapunk.

III. (24b) egyenlet segítségével egy újabb összefüggést kapunk  $\kappa$ -ra és  $\varrho$ -ra, amiből  $\kappa$  és külön-külön meghatározhatókká válnak.

Megjegyezzük, hogy II. és III. együttesen nemlineáris összefüggést adnak

$$w'_I(0) \text{ és } w''_I(0)$$

között, amely negyedik — nemlineáris — határfeltételt ad  $w_I$  számára a meglévő három lineáris (22a, b, c) mellé.

*B. A szabadonfutó  $eT$  csőszakasz hajlítási problémája*

A hajlítást leíró (14a) egyenlet homogén lineáris differenciálegyenlet, és a  $w_I$ -re vonatkozó (22), (24a) határfeltételek is lineárisak, ezért alkalmazhatjuk rá a szuperpozíció elvét. Ennek megfelelően az alábbi határfeltételcsoportokat kielégítő megoldásokat keressük:

$$\begin{aligned} 1) \quad & w_I(0) = 0, & w_I(\lambda) &= 1, \\ & w'_I(0) = 0, & w''_I(\lambda) &= 0. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 2) \quad & w_2(0) = 1, & w_2(\lambda) &= 0, \\
 & w_2'(0) = 0, & w_2''(\lambda) &= 0. \\
 3) \quad & w_3(0) = 0, & w_3(\lambda) &= 0, \\
 & w_3'(0) = 1, & w_3''(\lambda) &= 0.
 \end{aligned}$$

Akkor (22) és (24a) értelmében

$$(25) \quad w_1(\xi) = \mu(\eta) w_1(\xi) + w_2(\xi) + \kappa w_3(\xi).$$

A három megoldás meghatározásánál az általános (15) egyenletből kiszámítjuk a konstansokat. A 2) és 3) megoldások meghatározására célszerű koordináta-rendszerünk kezdőpontjának  $\xi = \lambda$ -ba való áthelyezése. A megoldások állandói a trigonometrikus és hiperbolikus függvények elemi összefüggéseinek felhasználásával erősen egyszerűsödnek. Eredményeink:

$$(26a) \quad w_1 = a_1(\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi) + b_1 \operatorname{sh} \xi \sin \xi,$$

$$(26b) \quad w_2 = a_2 \operatorname{ch}(\lambda - \xi) \sin(\lambda - \xi) + b_2 \operatorname{sh}(\lambda - \xi) \cos(\lambda - \xi),$$

$$(26c) \quad w_3 = a_3 \operatorname{ch}(\lambda - \xi) \sin(\lambda - \xi) + b_3 \operatorname{sh}(\lambda - \xi) \cos(\lambda - \xi),$$

ahol

$$(27a,b) \quad a_1 = -2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}, \quad b_1 = 2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda},$$

$$(27c,d) \quad a_2 = -2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda - \operatorname{sh} \lambda \sin \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}, \quad b_2 = 2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda + \operatorname{sh} \lambda \sin \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda},$$

$$(27e,f) \quad a_3 = -2 \frac{\operatorname{sh} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}, \quad b_3 = 2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}.$$

Tekintetbevéve a (10) redukciós képleteket,  $w$ -ból a következőkép számítható az  $y$  irányban ható  $\sigma_2$  gyűrűs feszültség:

$$\sigma_2 = \frac{N_y}{h} = E \frac{f}{R} n_\eta,$$

és (16f) alapján

$$\sigma_2 = \frac{Ef}{R} w.$$

A szélső szálban ébredő  $y$ -tengely körül hajlító feszültség értéke

$$\sigma_{xh} = \frac{6M_x}{h^2} = \frac{Ef}{R} \cdot 2 \sqrt{\frac{3}{1 - \nu^2}} \cdot m_\xi;$$

és (16c) alapján

$$\sigma_{xh} = \frac{Ef}{R} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{1 - \nu^2}} w''.$$

Az 1—6. mellékletekben közöljük a legfontosabb feszültségek meghatározásához szükséges

$$(28) \quad \varphi = w \quad \text{és} \quad \psi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} w''$$

mennyiségek görbéit. ( $\psi$  segítségével kényelmesebb a hajlítófeszültség számítása, mint  $w''$ -vel és aránya  $\varphi$ -hez megadja a hajlító- és gyűrűsfeszültség arányát.)

A gyűrűsfeszültség :

$$(29a) \quad \sigma_2 = \frac{Ef}{R} \varphi.$$

A hajlítófeszültség :

$$(29b) \quad \sigma_{\text{zh}} = \frac{Ef}{R} \psi.$$

A nyírófeszültségek (főként  $\tau_{xz}$ ) meghatározása szélsőséges esetekben szintén fontos (különösen kis  $\lambda$  értékek esetén, amikor igen nagy lehet a nyírófeszültség). Helyszűke miatt azonban  $q_\xi$  görbéinket, amelyekből  $\tau_{xz}$  kiszámítható, nem közöljük.

Miután a cső tervezésénél a csőhossz adottnak tekinthető, mindenesetre egy meglévő konstrukciónál a terheléstől függetlenek,  $\xi$  helyett olyan  $t$  független változót vezettünk be, amellyel a teljes  $eT$  szakasz  $t = 1$ -nek felel meg, tehát a

$$t = \frac{x}{l} = \frac{\xi}{\lambda}$$

változót.

Meghatározzuk még

$$m = w''(0)$$

értékét. (25) alapján  $m = \mu m_1 + m_2 + \kappa m_3$ , ahol

$$m_1 = w_1''(0), \quad m_2 = w_2''(0), \quad \text{és} \quad m_3 = w_3''(0)$$

•Elemi számolással kiadódik

$$(30a) \quad m_1 = \frac{2 (\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda)}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda},$$

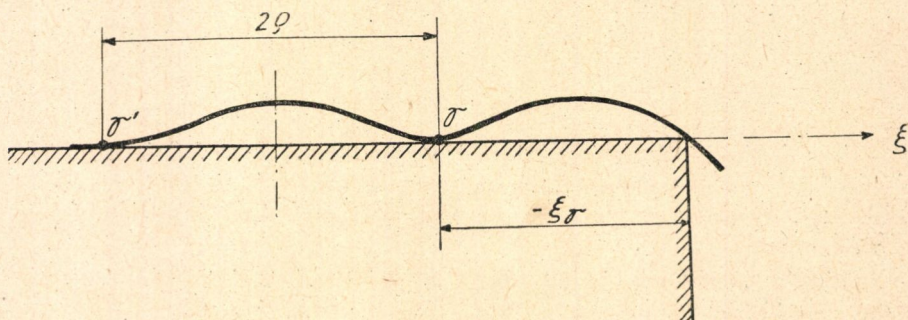
$$(30b) \quad m_2 = - \frac{\operatorname{sh} 2\lambda + \sin 2\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda},$$

$$(30c) \quad m_3 = - \frac{\operatorname{ch} 2\lambda - \cos 2\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}.$$

### C. A felfekvési hullám

Bebizonyítjuk, hogy ha  $H$  elegendő hosszú, csak egy felfekvési hullám alakulhat ki, tehát  $\gamma$  egyik oldalán valóban olyan  $t$  területet határol, amelyen  $C$  rásimul  $H$ -ra. Ugyanis tegyük fel, hogy  $C$   $\gamma$  mindkét oldalán elválik  $H$ -tól. Ez annak a következménye kell hogy legyen, hogy  $\gamma$ -n  $M_x > 0$ . Alkalmazzuk a (14) differenciálegyenlet homogén alakját a második elválási szakaszra. Miután itt  $w > 1 > 0$ , következésképp  $w^{IV} < -4$ , — kell hogy legyen minden alkotón, ahol az elválás létrejön, egy további  $\gamma'$  pont, ahol a cső újból érintkezik a görbével (6. ábra), mert ellenkező esetben, tetszésszerű feltételek is legyenek  $\gamma$ -n, kimutathatjuk az egyenlőtlenség két oldalának integrálásával, hogy lehet olyan  $\xi_\alpha < \xi_\gamma$  abszcisszát találni, amelytől kezdve balfelé

$$w''' < -a, \quad a > 0 \text{ rögzített állandó.}$$



6. ábra

A gondolatmenetet hasonlóan folytatva további háromszori integrálással kimutatható olyan  $\xi_\beta < \xi_\gamma$  létezése, amelytől balfelé  $w < 1$  volna, ha  $H$  nem gyakorolna további erőt  $C$ -re.

Mármint  $\gamma$  és  $\gamma'$  között érvényes a homogénra tett (14) differenciálegyenlet a következő határfeltételekkel:

$$(21a) \quad w_\gamma = w'_{\gamma'} = 1,$$

$$(21b) \quad w'_{\gamma} = w_{\gamma'} = 0.$$

A feladat megoldása (15) figyelembevételével az  $A, B, C, D$  meghatározására redukálódik. Vegyük fel a koordinátarendszer kezdőpontját a henger kiválasztott alkotóján  $\gamma$  és  $\gamma'$  között középen és legyen a  $\gamma\gamma'$  távolság ugyanitt  $2\rho$ , a (4) egyenlet szerinti hosszúságredukció végrehajtása után. Akkor az együtthatókat (21) egyenletekből meghatározva kapjuk:

$$w = A \operatorname{ch} \xi \cos \xi + B \operatorname{sh} \xi \sin \xi,$$

ahol (a hyperbolikus függvények elemi relációinak felhasználásával)

$$A = 2 \frac{\operatorname{ch} \rho \sin \rho + \operatorname{sh} \rho \cos \rho}{\operatorname{sh} 2\rho + \sin 2\rho}, \quad B = 2 \frac{\operatorname{ch} \rho \sin \rho - \operatorname{sh} \rho \cos \rho}{\operatorname{sh} 2\rho + \sin 2\rho}.$$

Elemi átalakításokkal

$$A - 1 = -2 \frac{(\operatorname{ch} \varrho - \cos \varrho)(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)}{\operatorname{sh} 2\varrho + \sin 2\varrho}.$$

Miután az itt szereplő törtnek számlálója is és nevezője is minden  $\varrho > 0$ -ra pozitív, következik:

$$A < 1.$$

Azonban

$$w(0) = A,$$

tehát a (21) határfeltételek következiképp  $C$  átmérője  $\xi = 0$ -ban  $H$  átmérőjénél kisebb volna, ami nem lehetséges.

Ezután határozzuk meg az egyetlen létrejövő hullám alakját.

A (23) egyenleteket kielégítő  $w$  az előző pontbeli megoldásokhoz hasonlóan számítható ki. Értéke:

$$(31) \quad w_{II} = \operatorname{ch}(\xi + \varrho) \cos(\xi + \varrho) + b_{II} [\operatorname{ch}(\xi + \varrho) \sin(\xi + \varrho) - \operatorname{sh}(\xi + \varrho) \cos(\xi + \varrho)],$$

ahol

$$(32) \quad b_{II} = \frac{1 - \operatorname{ch} \varrho \cos \varrho}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho}; \quad -\varrho \leq \xi \leq 0.$$

Ebből leszármaztathatók  $\kappa$  és  $m$ . Egyszerű átalakítások után

$$(33) \quad \kappa = w'_{II}(0) = f(\varrho) \equiv - \frac{(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)^2}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho}, \text{ és}$$

$$(34) \quad m = w''_{II}(0) = g(\varrho) \equiv - \frac{(\operatorname{ch} \varrho - \cos \varrho)(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho}.$$

A 7. és 8. melléklet feltünteti  $w_{II} = \varphi_{II}(\xi)$  és a hajlítófeszültség számításához

szükséges  $\sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} w''_{II} = \psi_{II}(\xi)$  görbéit. Külön ábrán szemléltettük (9. melléklet) a maximális gyűrűs feszültséget adó  $\varphi_{\max}$ ,  $\kappa$  és a maximális hajlítófeszültséget adó  $\psi(0)$  függését  $\varrho$ -tól (a felfekvési hullám relatív hosszától). Látható az ábrából, hogy kis  $\varrho$  esetén kitérés alig van, de nagyobb  $\varrho$  értékekre  $\varphi$  rohamosan megnő. A mellékletek görbéiből épp úgy állapíthatók meg a felfekvési feszültségek, mint az  $eT$  szakasz esetén.

#### D. Csatolási egyenlet

(24), (25), továbbá (33) és (34) alapján

$$(35) \quad \mu \cdot m_1 + m_2 + f(\varrho) m_3 = g(\varrho),$$

ahol  $m_1 = w'_1(0)$ ,  $m_2 = w''_2(0)$ ,  $m_3 = w''_3(0)$  és  $\mu = \mu(\eta)$  a kiválasztott alkotó végpontjára a  $T$  tárcsa által kényszerített sugárirányú kitérés.



Részletesen kiírva (30), (33), (34) alapján

$$\begin{aligned}
 (35a) \quad & 2\mu \frac{\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda} - \frac{\operatorname{sh} 2\lambda + \sin 2\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda} + \\
 & + \frac{(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)^2}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2\lambda - \cos 2\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda} = \\
 & = - \frac{(\operatorname{ch} \varrho - \cos \varrho)(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho}
 \end{aligned}$$

Így (35)  $\varrho$  számára transzcendens egyenletet ad, amelyből az meghatározható.

$\varrho$  meghatározására a 10. melléklet ad nomogrammot, amelyből  $\lambda$  ismeretében meghatározható  $\varrho$  és a hozzá tartozó  $\kappa$  érték  $\kappa$  ismeretében az 1–9. mellékletek segítségével a cső bármely pontján fellépő legfontosabb deformációk és feszültségek megállapíthatók, ha ismerjük  $f$ ,  $f_0$  és  $f_1$  értékét.

$\lambda \rightarrow \infty$  esetén (30) alapján  $m_1 \rightarrow 0$ ,  $m_2 \rightarrow -1$ ,  $m_3 \rightarrow -1$ , tehát (35) a következőképpen alakul:

$$1 + f(\varrho) = g(\varrho).$$

Vagyis elég nagy  $\lambda$  esetén (amikor a tárcsa nincs nagy befolyással a hengeren kialakuló deformációkra) a gyűrődési szakasz hossza független  $f$ -től! Az elválási feltételek és a nyíróerők szempontjából túlságosan kis  $\lambda$  kedvezőtlen, mint ezt később látni fogjuk. Ebből az a meglepő, műszakilag fontos tény adódik, hogy ha a számítás műszakilag megengedhetetlenül nagy  $\varrho$ -t adna, ezen nem segíthetünk a henger sugarának növelésével, a nagyobb túlfedés egyáltalában nem teszi  $C$ -nek  $H$ -n való rögzítését befogáshoz hasonlóbbá.

A kialakuló nagyobb gyűrűsfeszültség és hajlítófeszültség pedig egyenesen hátrányossá teszi a henger és cső közt alkalmazott túlfedés növelését.

Ez a következtetés plauzibilissé válik, ha meggondoljuk, hogy a nagyobb  $f$  megnöveli az  $eT$  szakasz által  $e$ -nél átadott nyomatékot is, és ez a nagyobb nyomaték növeli az elválás mértékét, tehát ellene dolgozik a nagyobb gyűrűsfeszültség simító hatásának.

### E. Megoldás létezésének kritériumai

Megvizsgáljuk, hogy (35) egyenletnek milyen feltételek mellett van és ha van, hány olyan megoldása van, amelyre  $w_{II}(\cdot) \geq 1$ , a teljes  $(-\varrho, 0)$  szakaszon. Modellünk ugyanis kizárja, hogy a felfekvési hullám bárhol benyomódjék a hengerbe.

Előrebocsátjuk, hogy 1. ennek szükséges feltétele

$$(36) \quad m^* = \mu(\gamma)m_1 + m_2 < 0.$$

Ugyanis  $m_3 < 0$  következik (30c)-ből. (35) alapján tehát

$$\begin{aligned}
 (37) \quad & -(\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho) m^* = |m_3|(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)^2 + \\
 & + (\operatorname{ch} \varrho - \cos \varrho)(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho).
 \end{aligned}$$

Tekintetbevéve, hogy (37) egyenlet jobboldala minden  $\varrho > 0$ -ra pozitív,

$$(38) \quad \text{sign } m^* = -\text{sign}(\text{ch } \varrho \sin \varrho - \text{sh } \varrho \cos \varrho) = \text{sign } \kappa.$$

Azonban  $\kappa < 0$  szükséges a felfekvési hullám létrejöttéhez.

2. (36) elégséges is ahhoz, hogy (35)-nek legyen olyan  $\varrho_0$  pozitív megoldása, melyre teljesül  $\varrho_3 < \varrho_1$ , ahol  $\varrho_1$  a

$$(39) \quad \text{tg } \varrho = \text{th } \varrho$$

egyenlet legkisebb pozitív gyöke, ( $\varrho_1 \simeq 3.927$ )

Legyen

$$-(\text{ch } \varrho \sin \varrho - \text{sh } \varrho \cos \varrho) m^* = \Phi(\varrho)$$

$$\text{és} \quad |m_3|(\text{sh } \varrho - \sin \varrho)^2 + (\text{ch } \varrho - \cos \varrho)(\text{sh } \varrho - \sin \varrho) = \Psi(\varrho).$$

Meg kell állapítanunk, hogy  $\varrho \rightarrow 0$  esetén  $\Phi(\varrho) \varrho^3$  sebességgel,  $\Psi(\varrho)$  pedig  $\varrho^5$  sebességgel tart 0-hoz. Tehát elég kis  $\varrho_2 > 0$  és  $m^* > 0$  esetén

$$0 < \Psi(\varrho_2) < \Phi(\varrho_2).$$

Viszont

$$\Psi(\varrho_1) > \Phi(\varrho_1) = 0.$$

Tehát kell, hogy legyen, tekintettel  $\Phi$  és  $\Psi$  folytonosságára, legalább egy  $\varrho_0$ , melyre  $0 < \varrho_3 < \varrho_1$ , és

$$\Psi(\varrho_0) = \Phi(\varrho_0).$$

3. (35)-nek csak végeszámú pozitív megoldása lehet.

Nyilvánvaló, mert  $\varrho \rightarrow +\infty$  esetén

$$\Phi(\cdot) = O(\epsilon \varrho)$$

$$\text{és } \Psi(\varrho) = O(\epsilon^2 \varrho).$$

De  $\Psi(\varrho)$  monoton növekvő függvény, tehát elég nagy  $\varrho$  esetén  $\Phi(\varrho) = \Psi(\varrho)$  nem lehetséges.

4. (35) egyenletnek csak egy  $\varrho_1$ -nél kisebb gyöke lehet.

Ennek bizonyítására előre kell bocsátanunk, hogy  $\Psi(\varrho)$  akárhányszorosan monoton függvény. Ugyanis  $\text{ch } \varrho - \cos \varrho$  illetőleg  $\text{sh } \varrho - \sin \varrho$  tiszta pozitív tagú Mac-Laurin sorba fejthető, ezek a sorok minden  $\varrho$ -ra konvergálnak, vagyis akárhányszorosan monoton függvények. De akkor pozitív együtthatójú szorzatösszegük is az.

Tegyük fel, hogy van (37)-nek  $\varrho_0$ -n kívül még egy  $\bar{\varrho}_0$  gyöke, amelyre

$$0 < \varrho_0 < \bar{\varrho}_0 < \varrho_1, \quad \text{és}$$

$$\Phi(\varrho_0) = \Psi(\varrho_0),$$

$$\Phi(\bar{\varrho}_0) = \Psi(\bar{\varrho}_0).$$

Cauchy középértéktétele alapján ebből következik, hogy található olyan  $\varrho'_0$  és  $\bar{\varrho}'_0$ , amelyre

és

$$0 < \varrho'_0 < \varrho_0 < \bar{\varrho}'_0 < \bar{\varrho}_0,$$

$$\Phi'(\varrho'_0) = \Psi'(\varrho'_0),$$

$$\Phi'(\bar{\varrho}'_0) = \Psi'(\bar{\varrho}'_0).$$

Azonban  $\Phi'(\varrho) = -2m^* \operatorname{sh} \varrho \sin \varrho$ , tehát ha  $\pi < \varrho < \varrho_1$ ,  $\Phi'(\varrho) < 0$ . Viszont  $\Psi'(\varrho) > 0$  a  $\Psi(\varrho)$  akárhányszoros monotonitása miatt. Így  $\varrho'_0$  és  $\bar{\varrho}'_0$  tartománya megszükhithető:

$$0 < \varrho'_0 < \varrho_0 < \bar{\varrho}'_0 < \pi.$$

$\Phi'(0) = 0$  tehát újra alkalmazható a Cauchy-közéértéktétel a  $(0, \varrho_0)$  és  $(\varrho_0, \pi)$  szakaszra. Kimutatható, hogy van olyan  $\varrho''_0$  és  $\bar{\varrho}''_0$ , amelyre

$$0 < \varrho''_0 < \varrho'_0 < \bar{\varrho}''_0 < \bar{\varrho}'_0, \text{ és}$$

$$\Phi''(\varrho''_0) = \Psi''(\varrho''_0),$$

$$\Phi''(\bar{\varrho}''_0) = \Psi''(\bar{\varrho}''_0).$$

Az eddigiekhez hasonlóan okoskodva kiderül, hogy

$$\varrho''_0 < \varrho_2,$$

ahol  $\varrho_2$  a

$$\operatorname{tg} \varrho = -\operatorname{th} \varrho$$

egyenlet legkisebb pozitív gyöke, és végül, hogy létezik olyan  $\varrho'''_0$  és  $\bar{\varrho}'''_0$ , amelyre

$$0 < \varrho'''_0 < \varrho''_0 < \bar{\varrho}'''_0 < \frac{\pi}{2},$$

és

$$\Phi'''(\varrho'''_0) = \Psi'''(\varrho'''_0),$$

$$\Phi'''(\bar{\varrho}'''_0) = \Psi'''(\bar{\varrho}'''_0).$$

Ez azonban ellentmondás, mert

$$\Phi'''(\varrho) = 4 \operatorname{ch} \varrho \cos \varrho$$

(amint újbóli differenciálással meggyőződhetünk róla) a  $(0, \frac{\pi}{2})$  szakaszon monoton csökkenő,  $\Psi'''(\varrho)$  a  $\Psi(\varrho)$  akárhányszoros monotonitása miatt monoton növekedő. Ennélfogva az  $y = \Phi'''(\varrho)$  és  $y = \Psi'''(\varrho)$  görbének  $(0, \pi)$ -en csak egy metszéspontja lehet. Tehát a kiindulási feltevés hibás, (35)-nek csak egy  $\varrho_1$ -nél kisebb gyöke van.

Hasonló módszerrel becsülhetjük (35) esetleges többi gyökének eloszlását is, erre azonban nem térünk ki, tekintettel arra, hogy ez főfeladatunk szempontjából érdektelen.

5. A (35) legkisebb  $\varrho_0 > 0$  megoldásával kiszámított  $w_{II}(\xi)$  kielégíti a  $w_{II}(\xi) > 1$  követelményt  $-\varrho_0 < \xi < 0$  szakaszon.

Bizonyítás : (31) alapján

$$\begin{aligned}
 (40) \quad & \frac{w_{II} - 1}{\operatorname{ch}(\xi + \varrho_0) \sin(\xi + \varrho_0) - \operatorname{sh}(\xi + \varrho_0) \cos(\xi + \varrho_0)} = \\
 & \frac{1 - \operatorname{ch} \varrho_0 \cos \varrho_0}{\operatorname{ch} \varrho_0 \sin \varrho_0 - \operatorname{sh} \varrho_0 \cos \varrho_0} = \\
 & \frac{1 - \operatorname{ch}(\xi + \varrho_0) \cos(\xi + \varrho_0)}{\operatorname{ch}(\xi + \varrho_0) \sin(\xi + \varrho_0) - \operatorname{sh}(\xi + \varrho_0) \cos(\xi + \varrho_0)} = \\
 & \equiv \chi(\varrho_0) - \chi(\xi + \varrho_0).
 \end{aligned}$$

Itt

$$0 < \xi + \varrho_0 < \varrho_0 < \varrho_1.$$

A baloldal nevezője pozitív, tekintettel arra, hogy kis  $\xi + \varrho_0$  értékekre Mac-Laurin-sora szerint pozitív és első jelváltási helye  $\varrho_1$  volna. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \chi(\varrho) = 0.$$

Tegyük fel, hogy  $w_{II} < 1$ , állításunkkal ellenkezően. Akkor  $\chi(\xi + \varrho) > \chi(\varrho)$ .  $\chi(\varrho)$  azonban  $(0, \varrho_1)$  zárt szakaszon folytonos (0 felé a szakasz zárttá tehető, ha megállapodunk  $\chi(0) = 0$ -ban), tehát kell, hogy létezzen olyan  $0 < \omega < \xi + \varrho$ , amelyre

$$\chi(\omega) = \chi(\varrho_0)$$

Ez azonban lehetetlen, mert

$$\chi'(\varrho) = \frac{(\operatorname{sh} \varrho \cos \varrho)^2 + (\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho)^2}{(\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho)^2} > 0,$$

tehát  $\chi(\varrho)$   $(0, \varrho_1)$ -ben monoton nő. Ezzel állításunkat igazoltuk.

6.  $\varrho_0 < \varrho_1$  szükséges feltétel is, mert különben  $w > 1$  nem teljesül az egész  $(-\varrho_0, 0)$  szakaszon. (Ezzel a felfekvési hullám hosszára felső korlátot kaptunk.)

A (40) szerint  $\chi(\varrho)$  függvény  $(0, \varrho_1)$  szakasz befutásakor minden pozitív értéket felvesz (pontosan egyszer). Legyen  $\varrho > \varrho_1$ . Akkor találhatunk olyan  $\xi$ -t, amelyre

$$0 < \xi + \varrho_0 < \varrho_1, \quad \text{és}$$

$$\chi(\xi + \varrho_0) < \chi(\varrho_0).$$

Az első feltétel miatt a baloldal nevezője pozitív, tehát erre a  $\xi$ -re

$$w_{II}(\xi) - 1 < 0.$$

#### F. A tárcsasüllyedés meghatározása

Idáig feltettük, hogy a tárcsának a  $G$  erő hatása alatt való  $f_1$  süllyedése ismeretes. A valóságban azonban nem  $f_1$ , hanem  $G$  van adva. Sajnos, mint előző pontban kiderült, a cső deformációproblémájának egyik határfeltétele



nemlineáris. Ebből már következik, hogy  $f_1$  általában nem arányos  $G$ -vel és a szuperpozíció elve nem érvényes, tehát ha valamilyen  $G_1$ , a tárcsára saját síkjában ható erő  $f_1$ , és  $G_2$ , a  $G_1$  hatásvonalába eső erő  $f_2$  nagyságú tárcsakitérést okozna, és  $f_1 + f_2 = f$ , akkor általában

$$G_1 + G_2 \neq G.$$

Tekintettel ezekre a nehézségekre,  $f_1^*(\eta)$  meghatározására közelítő eljárást alkalmazunk.

Mindenekelőtt  $f_0$ -t és  $f_1$ -et ismertnek feltételezve meghatározzuk  $G$ -t.

Miután a cső a tárcsa után közvetlenül véget ér, a  $T$ -vel szomszédos,  $H$  felé eső csőkeresztmetszetben keletkező  $Q_x$ ,  $Q_y$  nyíróerők tartanak egyensúlyt  $G$ -vel. A (12) képletek alapján  $Q_y$  egy  $\varepsilon$  nagyságrenddel kisebb  $Q_x$ -nél. Ezért (elég durva) közelítésképpen úgy számolunk, mintha csak a  $hQ_x$  erők tartanának  $G$ -vel egyensúlyt. Tehát  $G$ -t az  $f^* = f_0 + f_1 \cos \eta$  deformációk hatása alatt fellépő nyíróerő szerinti integrál adja meg.

A (12a) transzformációs képlet, továbbá (16d) egyenlet alapján kiadódik:

$$(41) \quad Q_x(l) = - \frac{f \cdot E}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \left( \frac{h}{R} \right)^{3/2} w'''(\lambda).$$

Vezessük be az

$$\frac{1}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} w_1'''(\lambda) = \omega_1, \quad \frac{1}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} w_2'''(\lambda) = \omega_2, \quad \frac{1}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} w_3'''(\lambda) = \omega_3$$

jelöléseket.

Akkor, figyelembevéve (25) egyenletet

$$(42) \quad Q_x(l) = -fE \left( \frac{h}{R} \right)^{3/2} [\mu(\eta) \omega_1 + \omega_2 + \kappa \omega_3].$$

$\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  elemi számolással kiadódik (26) és (27) alapján

$$(43a) \quad \omega_1 = - \frac{1}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \frac{\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\lambda + 2}{2(\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda)},$$

$$(43b) \quad \omega_2 = \frac{1}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \frac{2 \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda},$$

$$(43c) \quad \omega_3 = \frac{1}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \frac{\operatorname{sh} \lambda \cos \lambda + \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}.$$

A 11. melléklet görbéi megadják az  $\omega$  értékeket, mint  $\lambda$  függvényeit.

Ha az  $\eta = 0$ -nak a legelső alkotó felel meg, függőlegesen lefelé irányuló  $G$  esetén,

$$(44) \quad G = R \int_0^{2\pi} Q_x(l) \cos \eta d\eta.$$

Sajnos, (42)-ben  $\kappa$  nemlineáris függvénye a 4. pontban mondottak értelmében  $\mu(\eta)$ -nak és  $\lambda$ -nak. Ezért tulajdonképpen a kerület minden pontjára meg kellene határozni valamilyen adott  $\mu(\eta) = \mu_0 + \mu_1 \cos \eta$  esetére  $\kappa$  értékét és az így nyert  $\kappa(\eta)$ -t (44)-be helyettesíteni. Ehelyett a következő közelítő módszert célszerű alkalmazni.

Legyen  $\kappa(\eta)$  Fourier-sora

$$\kappa(\eta) = \kappa_0 + \kappa_1 \cos \eta + \kappa_2 \cos 2\eta + \dots,$$

ahol

$$\kappa_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(\eta) \cos \eta d\eta.$$

Tekintettel a többi tagoknak  $\cos \eta$ -ra vonatkozó orthogonalitására, a (44) integrál értékét csak a  $\kappa_1 \cos \eta$  tag befolyásolja:

$$(45) \quad G = fE\pi \frac{h^{3/2}}{R^{1/2}} \int_0^{2\pi} (\mu_1 \omega_1 + \kappa_1 \omega_3) \cos^2 \eta d\eta = fE\pi \frac{h^{3/2}}{R^{1/2}} (\mu_1 \omega_1 + \kappa_1 \omega_3).$$

Vezessük be a dimenzió nélküli  $g$  mennyiséget  $G$  mértékéül:

$$(46) \quad G = fE\pi \frac{h^{3/2}}{R^{1/2}} g.$$

Akkor

$$g = \mu_1 \omega_1 + \kappa_1 \omega_3.$$

Hátra van még  $\kappa_1$  közelítő meghatározása. E célból az ismertetett módszerrel meghatározzuk adott  $\mu_0$ -ra és ismert vagy felvett  $\mu_1$ -re  $\kappa(0)$ ,  $\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right)$  és  $\kappa(\pi)$  értékét.  $\kappa\left(\frac{3}{2}\pi\right)$  meghatározása a  $G$  arányára vonatkozó szimmetria miatt nem ad újat:  $\kappa\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \kappa\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . Tekintettel a feladat nemlineáris jellegére

$$\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq \frac{\kappa(0) + \kappa(\pi)}{2},$$

ami pedig szükséges volna ahhoz, hogy

$$\kappa(\eta) = \kappa_0 + \kappa_1 \cos \eta$$

lehessen.

Közelítsük  $\kappa$  ismert négy értékét a legkisebb négyzetek elve alapján  $\kappa_0 + \kappa_1 \cos \eta$  alakú polinommal. A számítás, mint ismeretes,

$$\kappa_1 = \frac{\kappa(0) - \kappa(\pi)}{2}$$

értéket adja. Ha  $\kappa$ -t mint  $\mu(\eta)$  függvényét fogjuk fel,

$$\kappa(\eta) = k[\mu(\eta)] = k(\mu_0 + \mu_1 \cos \eta),$$

ahol  $k$  a 10. melléklet nomogrammjá szerint függ  $\mu$ -tól (és természetesen  $\lambda$ -tól). Akkor

$$\kappa_1 = \frac{k(\mu_0 + \mu_1) - k(\mu_0 - \mu_1)}{2}$$

és

$$(47) \quad g = \mu_1 \omega_1 + \frac{k(\mu_0 + \mu_1) - k(\mu_0 - \mu_1)}{2} \omega_3.$$

Mármost, ismert  $f_0$  és  $G$  esetén (ami a gyakorlatban előforduló eset) az eljárás a következő:

1. meghatározzuk (46), illetőleg  $f_0 = \frac{f_0}{f}$  alapján  $g$  és  $\mu_0$  értékét.
2. meghatározzuk a 11. melléklet görbéi alapján  $\omega_1$  és  $\omega_3$  értékét a csőhossz ( $eT$ ) által megadott  $\lambda$ -ra.
3. Iterációt végzünk  $\mu_1$  meghatározására. Ennek első lépéseként oly módon számolunk, mintha a cső  $H$ -n be volna fogva, tehát  $\kappa = 0$  lenne. Ezzel (47) szerint

$$\mu_1^{(0)} = \frac{g}{\omega_1}.$$

4.  $\mu = \mu_0 + \mu_1^{(0)}$  értékkel a 10. melléklet nomogrammjából leolvassuk  $k(\mu_0 + \mu_1^{(0)})$  értékét. Hasonlóképp meghatározzuk  $k(\mu_0 - \mu_1^{(0)})$  értékét.

5. A kapott értékeket helyettesítjük (42) egyenletbe és így megkapjuk  $\mu_1$  javított értékét:

$$\mu_1^{(1)} = \mu_1^{(0)} + \frac{1}{2} [k(\mu_0 - \mu_1^{(0)}) - k(\mu_0 + \mu_1^{(0)})] \frac{\omega_3}{\omega_1}.$$

(A formulából következik, hogy általában  $\mu_1^{(1)} > \mu_1^{(0)}$ ).

6. A 3–5. lépéseket megismételjük  $\mu_1^{(1)}$ -re, és esetleg a kapott  $\mu_1^{(2)}$ -re stb. egészen addig, amíg a következő lépések elvégzése által várható korrekció alatta marad a megkívánt és műszakilag észszerű pontossági határnak.

7. Ezután ajánlatos, ha több  $\eta$  értékre meghatározzuk

$$\kappa(\eta) = k(\mu_0 + \mu_1 \cos \eta)$$

értékét és a  $\kappa(\eta)$  függvény felrajzolása és harmonikus analízise útján ellenőrizzük a

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} [k(\mu_0 - \mu_1) - k(\mu_0 + \mu_1)]$$

feltevés helyességét, illetőleg az általa elkövetett hibát.

#### G. A kielégítő feltételek feltételei

Mint említettük, az adott műszaki probléma megköveteli a tárcsáról a hengerre való biztos erőátvitel érdekében, hogy

1. A tárcsa egész kerülete résztvegyen az erőátadásban, tehát érintse  $C$ -t és arra pozitív nyíróerőt gyakoroljon.

2. A henger teljes  $e$  élhosszán érintse  $C$ -t és arra teljes kerületén pozitív (radiálisan kifelé irányuló) (megoszló) erőt gyakoroljon.

3.  $\kappa = w'(0) < 0$ . Ebből a feltételből — mint az  $E$ . pontban bizonyítottuk — következik, hogy van még egy  $H$ -t körülvevő zárt görbe, melynek mentén  $H$  érinti  $C$ -t és rá sugarirányban kifelé ható erőt gyakorol.

Mielőtt hozzáfognánk a feltételek részletes tárgyalásához, előre kell bocsátanunk néhány megjegyzést.

I.  $\mu = 1$  és elég kis  $\lambda$  esetén megoldásunk elég tesz az 1., 2. és 3. feltételeknek.

Bizonyítás:

Először meghatározzuk  $\varrho$  közelítő értékét  $\mu = 1$  és  $\lambda \ll 1$  mellett, (35a) egyenlet alapján.

$\mu = 1$  tekintetbevételével a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} & - \frac{2(\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda)(\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda)}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda} + \frac{(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)^2}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho} \frac{\operatorname{ch} 2\lambda - \cos 2\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda} = \\ & = - \frac{(\operatorname{ch} \varrho - \cos \varrho)(\operatorname{sh} \varrho - \sin \varrho)}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho}. \end{aligned}$$

$\lambda \rightarrow 0$  esetén az első tag számlálója ötöd-, nevezője harmadfokon tűnik el. A második tag második tényezőjének viszont a nevezője tűnik el magasabb fokon. Ebből következik a fizikailag is nyilvánvaló  $\varrho \rightarrow 0$ . Fejtsük sorba valamennyi tag számlálóját és nevezőjét és álljunk meg az első el nem tűnő tagnál. Ezáltal a következő egyszerűbb egyenletet kapjuk:

$$\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\varrho^3}{4\lambda} = \frac{\varrho^2}{2}.$$

Az egyenletet  $\frac{\varrho}{\lambda}$ -ra megoldva azt kapjuk, hogy annak egyetlen pozitív gyöke

$$(48) \quad \varrho = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \lambda \cong 0,618 \lambda.$$

A kapott közelítő  $\varrho$  értékkel meghatározhatjuk  $\kappa$  értékét, továbbá a nyíróerők értékét  $e$ -n és  $T$ -n.

(33) alapján evidens, hogy  $\varrho$  kis értékeire  $\kappa < 0$ , tehát a 3. követelmény teljesül:

$$(49) \quad \kappa \cong - \frac{\varrho^3}{2} < 0.$$



A nyíróerő értéke a tárcsán (42) és (43) szerint

$$Q_x = fE \left( \frac{h}{R} \right)^{3/2} (\omega_1 + \omega_2 + \kappa \omega_3) = \\ = \frac{fE \left( \frac{h}{R} \right)^{3/2}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{(\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda)^2 - \kappa (\operatorname{sh} \lambda \cos \lambda + \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda)}{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}.$$

$\lambda$  kis értékeire ez is biztosan pozitív,  $\kappa < 0$  mellett. Tehát a 2. követelmény is teljesül.

Végül határozzuk meg az »e« által a héjra gyakorolt erő irányát.

Helyettesítsük egy pillanatra  $e$ -t változó nagyságú megoszló  $q^*$  terheléssel és legyen  $C$  csak  $\xi = -\varrho$  és  $\xi = +\lambda$  helyeken rögzítve. A  $(-\varrho, \lambda)$  szakasz végpontjain érvényes határfeltételek:

$$w(-\varrho) = 1, \quad w(\lambda) = 1, \\ w''(-\varrho) = 0, \quad w''(\lambda) = 0.$$

A  $q^* = 0$  melletti megoldás legyen  $w_1$ ; viszont ugyanilyen határfeltételek és  $q^* = 1$  melletti megoldás legyen  $w^*$ . Akkor

$$w = w_1 + q^* w^*.$$

Mármost kimutatható, hogy  $w_1(\xi) < 1$  hacsak

$$-\varrho < \xi < \lambda.$$

Vegyük fel koordináta-rendszerünk kezdőpontját  $\frac{\lambda - \varrho}{2}$ -ben, és legyen  $\frac{\varrho + \lambda}{2} = \tau$ ,  $\bar{\xi} = \xi - \frac{\lambda - \varrho}{2}$ .  $w_1$  értéke könnyen kiszámítható a határfeltételek figyelembevételével:

$$w_1 = \frac{\operatorname{ch} \tau \cos \tau \operatorname{ch} \bar{\xi} \cos \bar{\xi} + \operatorname{sh} \tau \sin \tau \operatorname{sh} \bar{\xi} \sin \bar{\xi}}{\operatorname{ch}^2 \tau \cos^2 \tau + \operatorname{sh}^2 \tau \sin^2 \tau}.$$

Fejtsük  $w_1$  számlálóját,  $\bar{w}_1$ -t kétváltozós Taylor-sorba és írjuk fel a sor első tagjait:

$$\bar{w}_1 = 1 - \frac{5}{6} \tau^4 + \bar{\xi}^2 \tau^2 - \frac{\bar{\xi}^4}{6} + \dots = 1 - \frac{1}{6} (\tau^2 - \bar{\xi}^2) (5\tau^2 - \bar{\xi}^2) + \dots$$

$w_1$  nevezője elég kis  $\tau$ -ra nagyobb 1-nél, (mint erről sorbafejtéssel meggyőződhetünk), ennél könnyen belátható, hogy  $|\bar{\xi}| < \tau$  és  $\tau$  elég kis értékei esetén

$$w_1 < 1.$$

Miután  $e$ -n  $W(0) = 1$ , következik

$$q^* \cdot w^*(0) < 0.$$

Miután azonban  $w^*(0) > 0$ , hiszen az erő hatásvonalába eső pont nyilvánvalóan az erő irányában mozdul el (ami természetesen  $w^*(\xi)$  effektív kiszámításával is igazolható), következésképp

$$q^* > 0$$

ami bizonyítandó volt.

II.  $q^*$ ,  $q(\lambda)$  és  $\kappa$   $\lambda$ -nak és  $\mu$ -nek folytonos függvényei.  $\lambda$  igen kis értékei és  $\mu = 1$  mellett, mint az I. megjegyzésben igazoltuk, mindhárom mennyiség pozitív. Válasszunk ki egy elég kis  $\lambda_1$ -et. A  $(\lambda, \mu)$  síkban a  $(\lambda_1, 1)$  pontból tetszésszerűen folytonos görbe mentén haladva mindaddig, amíg  $q^*$ ,  $q(\lambda)$  és  $\kappa$  egyike sem válik 0-sá, megoldásunk kielégíti az 1., 2., 3. követelményeket. Nevezzük határgörbéknek a  $q^* = 0$ , illetőleg  $q(\lambda) = 0$ , illetőleg  $\kappa = 0$  értékeinek megfelelő pontok összességét. Ezek a határgörbék a  $(\lambda, \mu)$  síkot két tartománycsoportra osztják fel:

Az egyikben  $q^* > 0$ ,  $q(\lambda) > 0$  és  $\kappa > 0$ , a másikban legalább az egyik mennyiség negatív. Csak az első tartománycsoport területén felvett  $(\lambda, \mu)$  értékpár engedhető meg az elválás veszélye nélkül. I. szerint van legalább egy az első kategóriába tartozó (jó) tartomány.

A helyes felfekvés elégséges feltételeit megkapjuk tehát, ha a  $(\lambda, \mu)$  síkon meghatározzuk azokat a görbéket, amelyeken  $\kappa = 0$  vagy  $q^* = 0$ , vagy  $q(\lambda) = 0$  és a  $(\lambda, \mu)$  sík pontjai közül kizárjuk azokat a pontokat, amelyekbe nem juthatunk el  $\mu = 1$  és  $\lambda$  valamely elég kis értéke által meghatározott pontból folytonos görbén haladva valamelyik határgörbe átmetszése nélkül.

#### G. Az elválási határgörbék

$$\alpha) q(\lambda) = 0.$$

Ezt a határgörbét a (35) és  $q(\lambda)$  egyenletek együttes érvényessége jellemzi, tehát (30), (35) és (42) szerint

$$(50) \quad 2\mu (\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda) - (\operatorname{sh} 2\lambda + \sin 2\lambda) - (\operatorname{ch} 2\lambda - \cos 2\lambda) f(q) = \\ = g(q) (\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda)$$

és

$$(51) \quad \mu (\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\lambda + 2) - 4 \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda - 2 (\operatorname{sh} \lambda \cos \lambda + \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda) f(q) = 0$$

A két egyenletből  $\mu$  kiküszöbölése után  $\lambda$  és  $q$  között a következő összefüggést kapjuk elemi számolások elvégzése után:

$$(52) \quad A(\lambda) f(q) + g(q) + B(\lambda) = 0,$$

ahol

$$A(\lambda) = \frac{\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda}{\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\lambda + 2}, \quad B(\lambda) = \frac{\operatorname{ch} 2\lambda - \cos 2\lambda}{\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\lambda + 2}; \\ f(q) = - \frac{(\operatorname{sh} q - \sin q)^2}{\operatorname{ch} q \sin q - \operatorname{sh} q \cos q}, \quad g(q) = - \frac{(\operatorname{ch} q - \cos q) (\operatorname{sh} q - \sin q)}{\operatorname{ch} q \sin q - \operatorname{sh} q \cos q}.$$

(52) egyenlet megadja  $\varrho$ -t mint  $\lambda$  (implicit) függvényét.  $\varrho$ -nak mint  $\lambda$  *explicit* függvényének meghatározása legegyszerűbb nomográfiai úton. Az alkalmazott nomogramm elve látható a 7. ábrán.

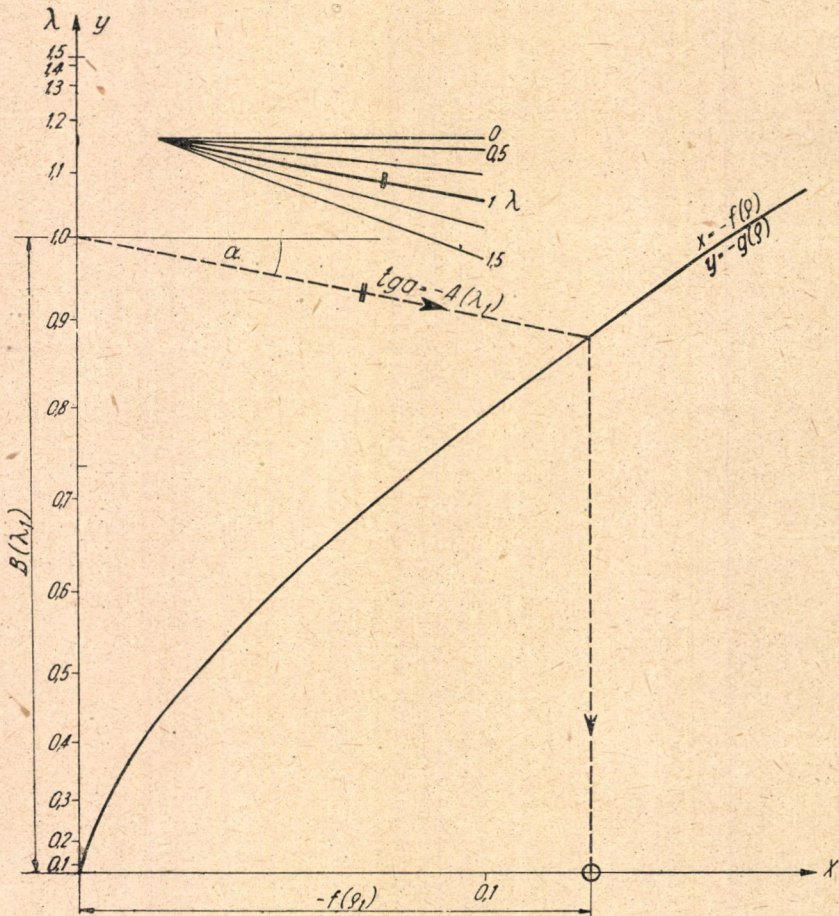
Fejezzük még ki (46) egyenletből  $\mu(\eta)$ -t :

$$(53) \quad \mu(\eta) = C(\lambda) f(\varrho) + D(\lambda),$$

ahol

$$C(\lambda) = \frac{2(\operatorname{sh} \lambda \cos \lambda + \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda)}{\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\lambda + 2}, \text{ és } D(\lambda) = \frac{4 \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\lambda + 2}.$$

(53) egyenlet alapján kiszámítható  $\mu$  mint  $\lambda$  függvénye.



7. ábra

$$\beta) q^* = 0.$$

Ha az  $e$  él nem gyakorol  $C$ -re erőhatást, akkor az egész  $(-\varrho, \lambda)$  szakaszra érvényes a (14a) differenciálegyenlet. A megoldás túlhatározott, mert negyedrendű differenciálegyenlet megoldására 6 feltételt kell szabnunk.

A hat feltétel közül ötnek kielégítésére a negyedrendű differenciálegyenlet általános megoldásában szereplő négy paraméteren kívül még szabadon rendelkezhetünk  $\varrho$  felett. A hatodik feltétel megadja a  $\lambda$  és  $\mu$  közötti keresett összefüggést.

A megoldásra előírt hat feltétel:

$$\begin{aligned} w(-\varrho) &= 1, & w(0) &= 1, & w(\lambda) &= \mu, \\ w'(-\varrho) &= 0, \\ w''(-\varrho) &= 0, & w''(\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

A  $-\varrho$  és 0 helyekre kirótt határfeltételek kielégíthetők a (31), (32) egyenletek által megadott megoldással.

Az utolsó két ( $\lambda$  helyre vonatkozó) feltétel figyelembevétele két egyenletet ad:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\varrho + \lambda) \cos(\varrho + \lambda) + b_{II} [\operatorname{ch}(\varrho + \lambda) \sin(\varrho + \lambda) - \operatorname{sh}(\varrho + \lambda) \cos(\varrho + \lambda)] &= \mu \\ -\operatorname{sh}(\varrho + \lambda) \sin(\varrho + \lambda) + b_{II} [\operatorname{ch}(\varrho + \lambda) \sin(\varrho + \lambda) + \operatorname{sh}(\varrho + \lambda) \cos(\varrho + \lambda)] &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszerből

$$(54) \quad b_{II} = \frac{\operatorname{sh}(\varrho + \lambda) \sin(\varrho + \lambda)}{\operatorname{ch}(\varrho + \lambda) \sin(\varrho + \lambda) + \operatorname{sh}(\varrho + \lambda) \cos(\varrho + \lambda)} \equiv P(\varrho + \lambda),$$

$$(55) \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh}^2(\varrho + \lambda) + \sin^2(\varrho + \lambda)}{\operatorname{ch}(\varrho + \lambda) \sin(\varrho + \lambda) + \operatorname{sh}(\varrho + \lambda) \cos(\varrho + \lambda)} \equiv Q(\varrho + \lambda).$$

Másrészt (32) szerint

$$(56) \quad b_{II} = \frac{1 - \operatorname{ch} \varrho \cos \varrho}{\operatorname{ch} \varrho \sin \varrho - \operatorname{sh} \varrho \cos \varrho} \equiv R(\varrho).$$

Az (54)–(56) egyenletek grafikusán a (8a, b) ábrák szerint oldhatók meg.

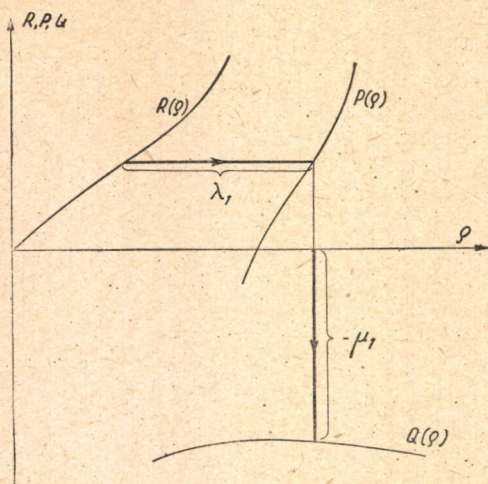
$\gamma) \kappa = 0$  határgörbe.

(33) egyenlet alapján  $\kappa = 0$  csak  $\varrho = 0$  esetén lehetséges. Ennélfogva  $\xi = 0$ -ban érvényesek a  $-\varrho$ -ban előírt (23b) követelmények is. Ezáltal feladatunk az általános megoldás négy konstansára egyszeresen túlhatározottá válik, tehát a  $\lambda, \mu$  paraméterek számára marad egy feltételünk.

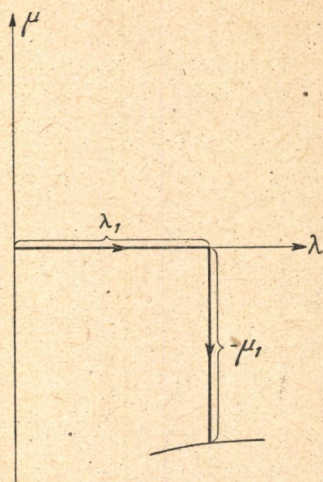
A határfeltételek most:

$$\begin{aligned} w(0) &= 1, & w(\lambda) &= \mu, \\ w'(0) &= 0, \\ w''(0) &= 0, & w''(\lambda) &= 0. \end{aligned}$$





8a. ábra



8b. ábra

Az első három feltételből a 3. pontbeli megoldáshoz hasonlóan

$$w = \operatorname{ch} \xi \cos \xi + b (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi);$$

a második két feltétel a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda + b (\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda) &= \mu, \\ -\operatorname{sh} \lambda \sin \lambda + b (\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

$b$  kiküszöbölése és elemi átalakítások után

$$(57) \quad \mu = \frac{\operatorname{sh} 2\lambda + \sin 2\lambda}{2 (\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda)}.$$

Az  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ ) szerinti határgörbék ábrája látható a 12. mellékleten.

Nem foglalkozhatunk annak bizonyításával, hogy a határgörbéken való áthaladáskor valóban olyan tartományba jutunk, amelyben a helyes felfekvés feltételei már nem teljesülnek; sem annak vizsgálatával, hogy nincs-e olyan »jó« tartomány, amelybe csak határgörbék metszésével juthatunk el a kis  $\lambda$ -val és  $\mu = 1$ -el meghatározott pontból folytonos görbe mentén haladva. Műszaki szempontból kielégítő megoldás, ha a jó felfekvés elégséges feltételeit adjuk, amelyekről úgy véljük, hogy szükséges is.

Legyen a jó felfekvés tartományát a nagyobb  $\mu$ -értékek felé elhatároló valamely görbe egyenlete

$$\mu = M_1(\lambda),$$

ugyanott a kis  $\mu$ -értékek felé elhatároló görbe egyenlete

$$\mu = M_2(\lambda).$$

Akkor a biztos felfekvéshez meg kell kívánni, hogy

$$\mu_0 + \mu_1 < M_1(\lambda)$$

és

$$\mu_0 - \mu_1 > M_2(\lambda)$$

legyen  $(\mu_0$  a tárcsa nagyobb átmérője miatti relatív csőátmérőnövekedés,  $\mu_1$  a  $G$  súlyterhelés következtében előálló deformáció Fourier-sorának  $\cos \eta$ -t tartalmazó tagjának együtthatója a II. rész  $E$ . pont szerint.)

Az egyenlőtlenségből

$$\mu_1 < \frac{M_1(\lambda) - M_2(\lambda)}{2}.$$

$\lambda$  kis értékeire ez a különbség nagyon kicsi, tehát veszély nélkül súlyterhelést nem alkalmazhatunk. Viszont, ha a  $\operatorname{tg} \lambda = -\operatorname{th} \lambda$  egyenlet első pozitív gyökét  $\lambda_0$ -val jelöljük ( $\lambda \approx 2.365$ ), akkor  $\lambda_0 < \lambda < 4$  esetén elválási veszély egyáltalában nem lép fel, ha a  $\mu_0 > \mu_1$  követelményt betartjuk. (V. ö. 12. melléklet.)

Tehát nemcsak azért célszerű a cső szabad részét hosszúra választani, hogy ezáltal veszélyes nyírófeszültségek ne lépjenek fel, hanem azért is, hogy a tárcsáról vagy hengerről való leválás veszélyét elkerüljük.

### 8. A centrifugális erő figyelembevétele

Legyen egy végtelen hosszú  $R$  sugarú saját tengelye körül  $\omega$  szögsebességgel forgó végtelen hosszú tömör henger radiális deformációja (sugárnövekedése) a centrifugális erő hatása alatt  $f_c$ , egy ugyanilyen sugarú, vékony tárcsán  $f_c^*$ , egy  $R$  sugarú vékony cső radiális deformációja  $F_c$ .

A centrifugális erő hatása figyelembe vehető, ha számításunkban a  $H$  tömör henger  $T$  tárcsa és  $C$  cső terheletlen méreteit a  $f_c$ ,  $f_c^*$ ,  $F_c$  méretekkal korrigáljuk. (Mintha a tömör hengert, a tárcsát, illetőleg csövet a centrifugális erő okozta tágulással nagyobb átmérőjűre gyártották volna.) Tehát a számításban szereplő  $f$ , illetőleg  $f^*$  túlfedések helyett

$$\bar{f} = f + f_c - F_c,$$

illetőleg

$$\bar{f}^* = f^* + f_c^* - F_c$$

túlfedésekkel számolunk.

Ez az eljárás mindenesetre közelítő, mert 1. a hengeren a cső csak közelítéssel vehető végtelennek, 2. mert a henger az  $e$  él közelében jobban kitágul a centrifugális erő hatása alatt, mintha végtelen volna. Azonban ez utóbbi eltérés egyrészt nem túlságosan nagy, másrészt az egész  $f_c$  tágulás is kicsiny  $F_c$ -vel összehasonlítva.

$$(f_c^* = \frac{1-\nu}{4} F_c = 0,175 F_c; f_c \approx f_c^*.$$

$f_c^*$ , illetőleg  $F_c$  kiszámítását illetően lásd [4].

Budapest, 1952. december 13.

- [1] *Timoshenko*: Théorie de la stabilité élastique. Paris, 1947. ch. Béranger.
- [2] *Girkmann*: Flächentragwerke. Wien, Springer, 1948.
- [3] *Schwank*: Randwertaufgaben. Leipzig, Teubner, 1951.
- [4] *Timoshenko*: Théorie de l'élasticité. Paris—Liège, 1948. Librairie Polytechnique ch. Béranger; 71. old.

## ПЕРЕВОД СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ С ТОНКОСТЕННОЙ ТРУБКОЙ

Ш. ПАЛ

### Резюме

Работа содержит вычисления, касающиеся измерения и обсуждения конструкции, служащей для прикрепления поворотной части турбогенераторов на хвостовиках.

Тонкостенная трубка надвинута с перекрытием на массивный цилиндр и тонкий диск. Цилиндр считается охватываемым, а диск нагружен силой, нападающей центрально в своей плоскости.

Работа познакомит с общим методом вычисления, относящимся к тонким цилиндрическим оболочкам. Этот метод и по внешнему подчеркивает отношения порядка величин, полученные при исчислении деформации тонких цилиндрических оболочек, и показывает очевидными условия правильности пренебрежений. Таким образом получается, что по отношению к деформации отдельных компонентов оболочки приблизительно действительно то же обыкновенное дифференциальное уравнение, которое играет роль в случае нагрузки с цилиндрической симметрией.

Потом решается дифференциальное уравнение загиба оболочки для отрезки «смятия» над массивным цилиндром, далее для части трубки между оболочкой и диском, потом решения припасовываются друг к другу. Для практического исполнения припасовки сообщаются номограммы и кривые, с помощью которых определимы параметры, характеризующие форму «смятия». При помощи этих результатов исследуются условия безопасного прилегания трубки на цилиндре и диске.

Величины, характеризующие деформацию трубки, напряжения, возникающие в ней при нагрузке, легко определимы с помощью приложенных семейств кривых.

## LA TRANSMISSION D'UNE CHARGE STATIQUE MOYENNANT UN TUYAU À PAROI MINCE

S. PÁL

### RÉSUMÉ

L'article contient des calculs se rapportant au jugement et à l'établissement des dimensions de la construction qui sert pour fixer la partie rotative des turbo-générateurs sur les bouts d'essieu.

Sur un cylindre massif et un disque mince un tuyau à paroi mince est pressé avec surcouverture. Le cylindre peut être considéré encastré, tandis que la disque est chargé d'une force attaquant centriquement dans le plan propre du disque.

L'article décrit une méthode de calcul générale, se rapportant à des coques cylindriques minces, par laquelle les conditions d'ordre de grandeur qui résultent dans le calcul de la déformation de coques cylindriques minces, sont mises en relief extérieurement aussi, et qui rend évidentes les conditions sous lesquelles les négligements sont justifiés. On trouve par ce moyen que, concernant les déformations des génératrices individuelles de la coque, c'est approximativement la même équation différentielle ordinaire qui est valable, comme dans le cas d'une charge cylindrico-symétrique.

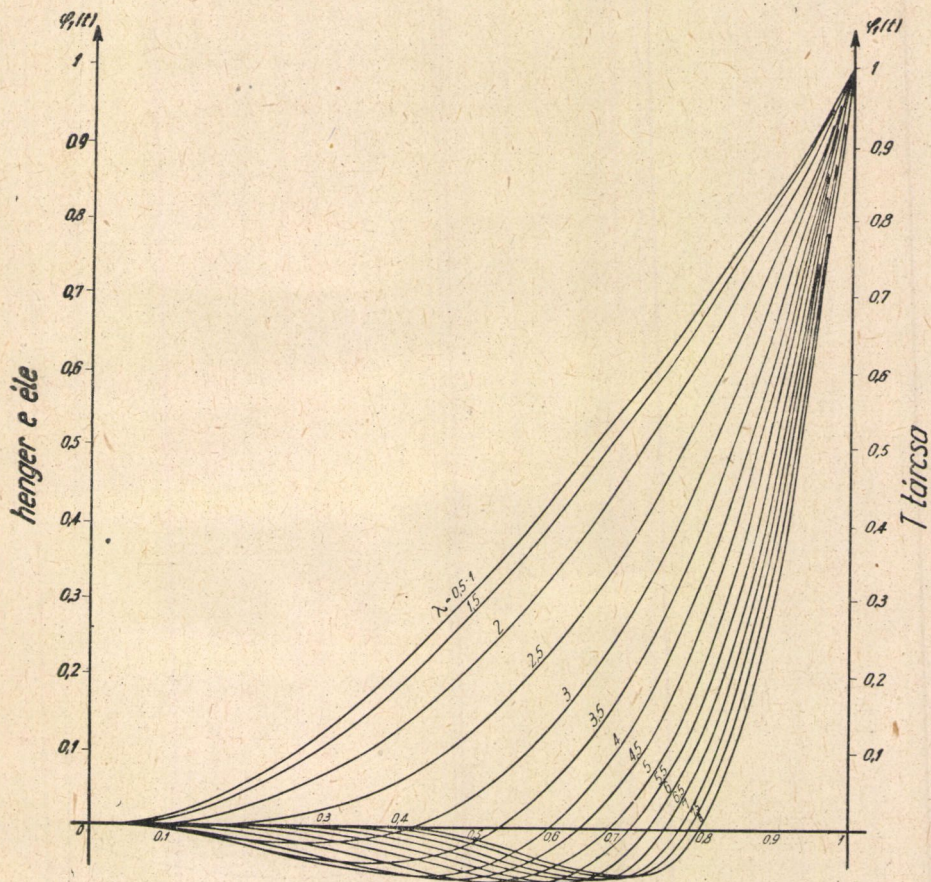
Ensuite l'article résout l'équation différentielle se rapportant à la flexion de la coque pour la section «de froissure» au-dessus du cylindre massif, puis pour la partie de tuyau située entre la coque et le disque, et enfin, il ajuste ces solutions l'une à l'autre. Pour mettre en oeuvre l'ajustage dans la pratique, l'article donne un nomogramme et des courbes à l'aide desquelles il est possible d'établir les paramètres caractérisant la forme de la «froissure». En possession de ces derniers, l'article examine les conditions de la pose sûre du tuyau sur le cylindre et sur le disque.

Les quantités caractéristiques pour la déformation du tuyau sont les efforts qui, produits dans le tuyau quand il est chargé, peuvent être déterminés facilement à l'aide des familles de courbes annexées.



# Radiális deformációk és gyűrűs feszültségek meghatározása eT szabad csőszakon I.

Jelmagyarázat a 3. sz. mellékleten  
 $\varphi_1$  görbék



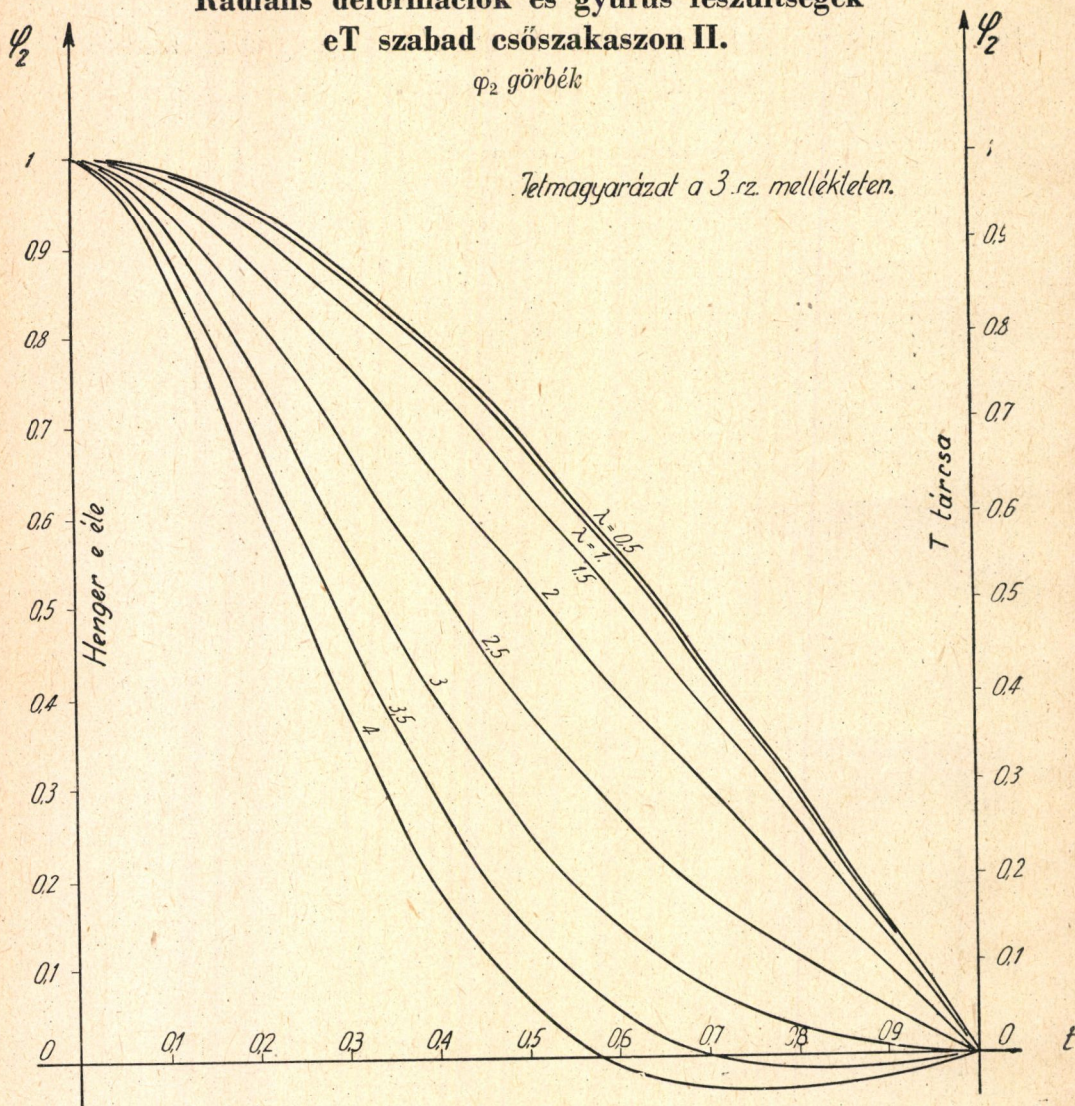
I. melléklet



# Radiális deformációk és gyűrűs feszültségek eT szabad csőszakaszon II.

$\varphi_2$  görbék

Telmagyarázat a 3.sz. mellékleten.

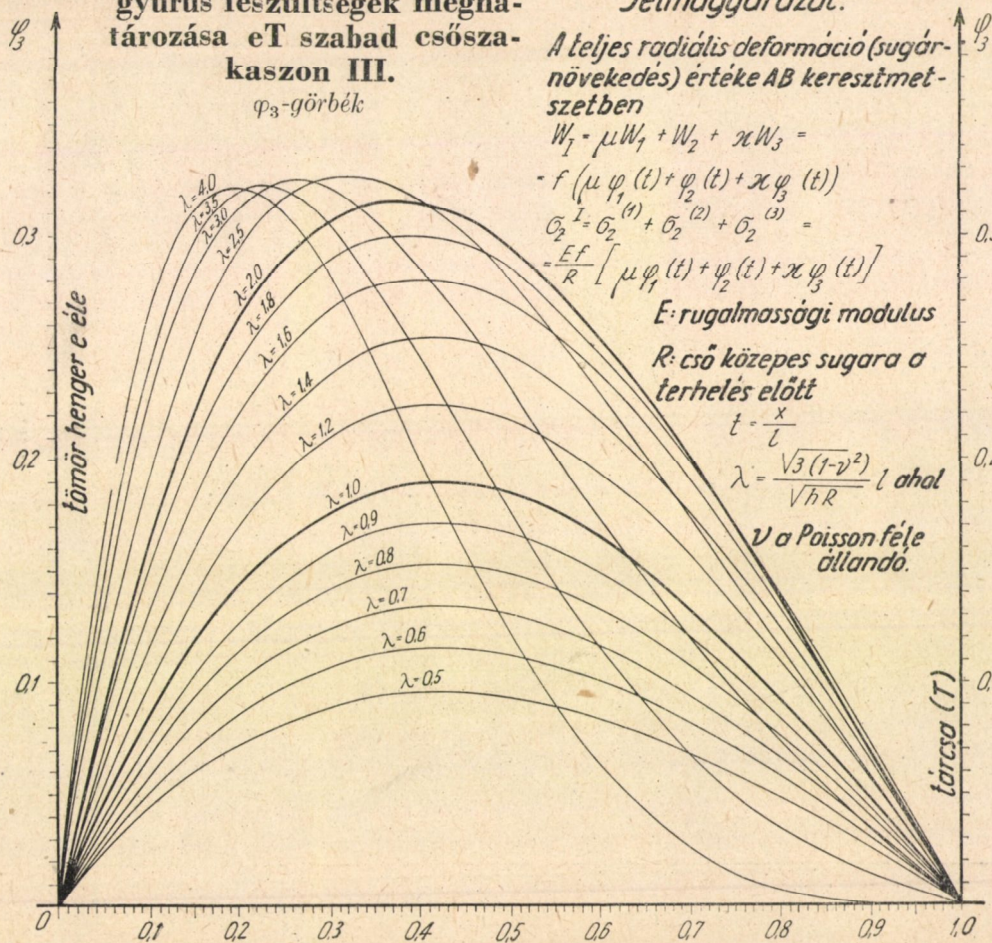


2. melléklet



# Radiális deformációk és gyűrűs feszültségek meg- határozása eT szabad csőszá- kazon III.

$\varphi_3$ -görbék



## Jelmagyarázat.

A teljes radiális deformáció (sugár-  
növekedés) értéke AB keresztmet-  
szetben

$$W_1 = \mu W_1 + W_2 + \kappa W_3 =$$

$$= f(\mu \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \kappa \varphi_3(t))$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^{(1)} + \sigma_2^{(2)} + \sigma_2^{(3)} =$$

$$= \frac{Ef}{R} [\mu \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \kappa \varphi_3(t)]$$

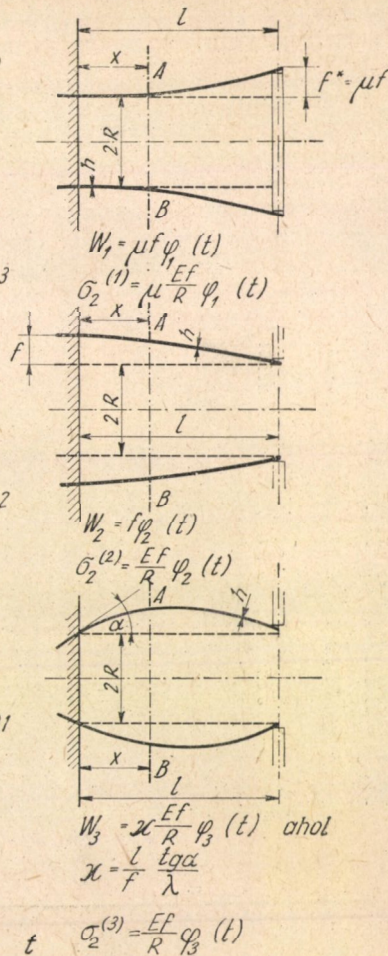
$E$ : rugalmassági modulus

$R$ : cső közepes sugara  $\sigma$   
terhelés előtt

$$t = \frac{x}{L}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} l \text{ ahol}$$

$\nu$  a Poisson féle  
állandó.

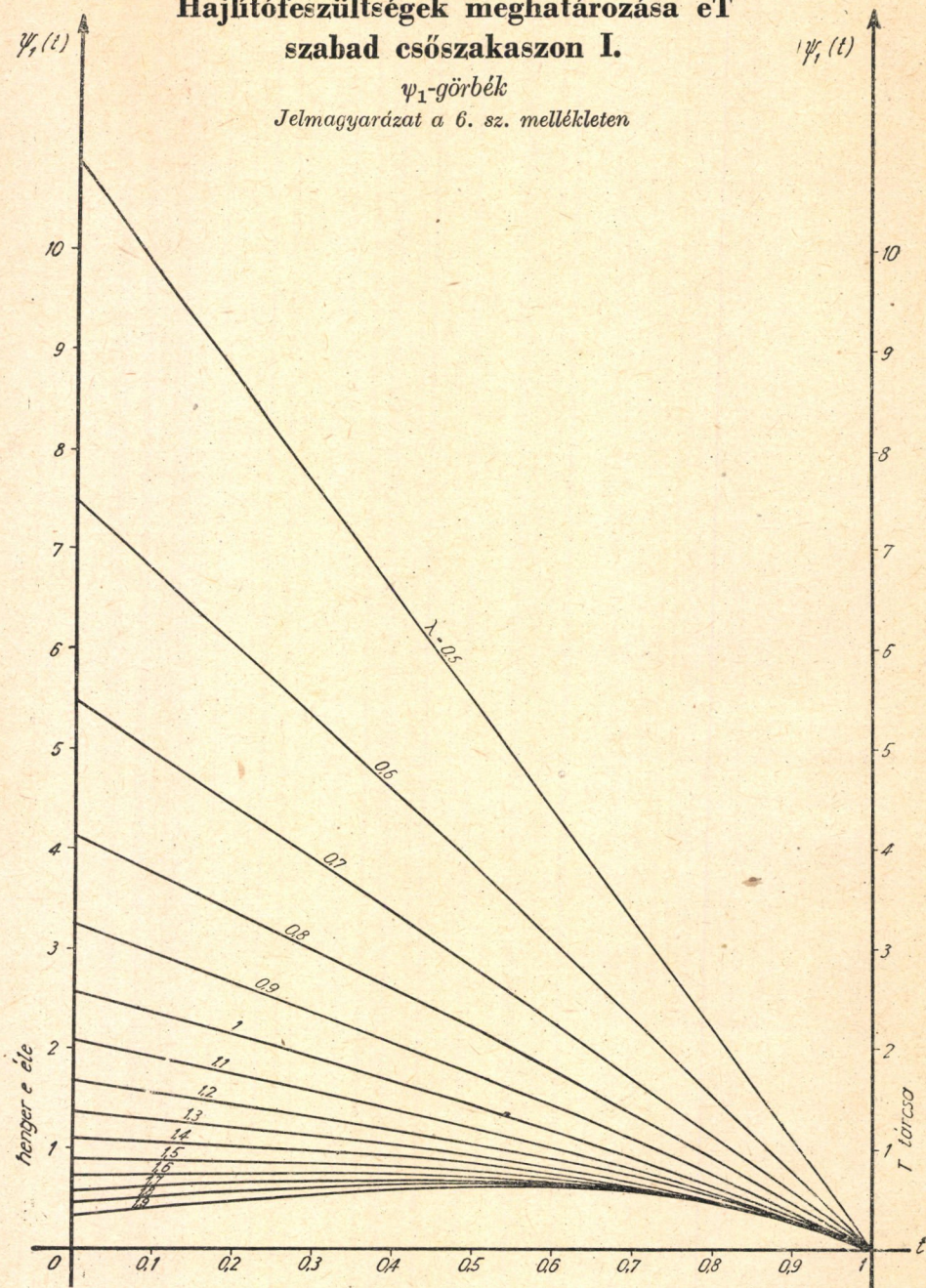




# Hajlítófeszültségek meghatározása eT szabad csőszakaszon I.

$\psi_1$ -görbék

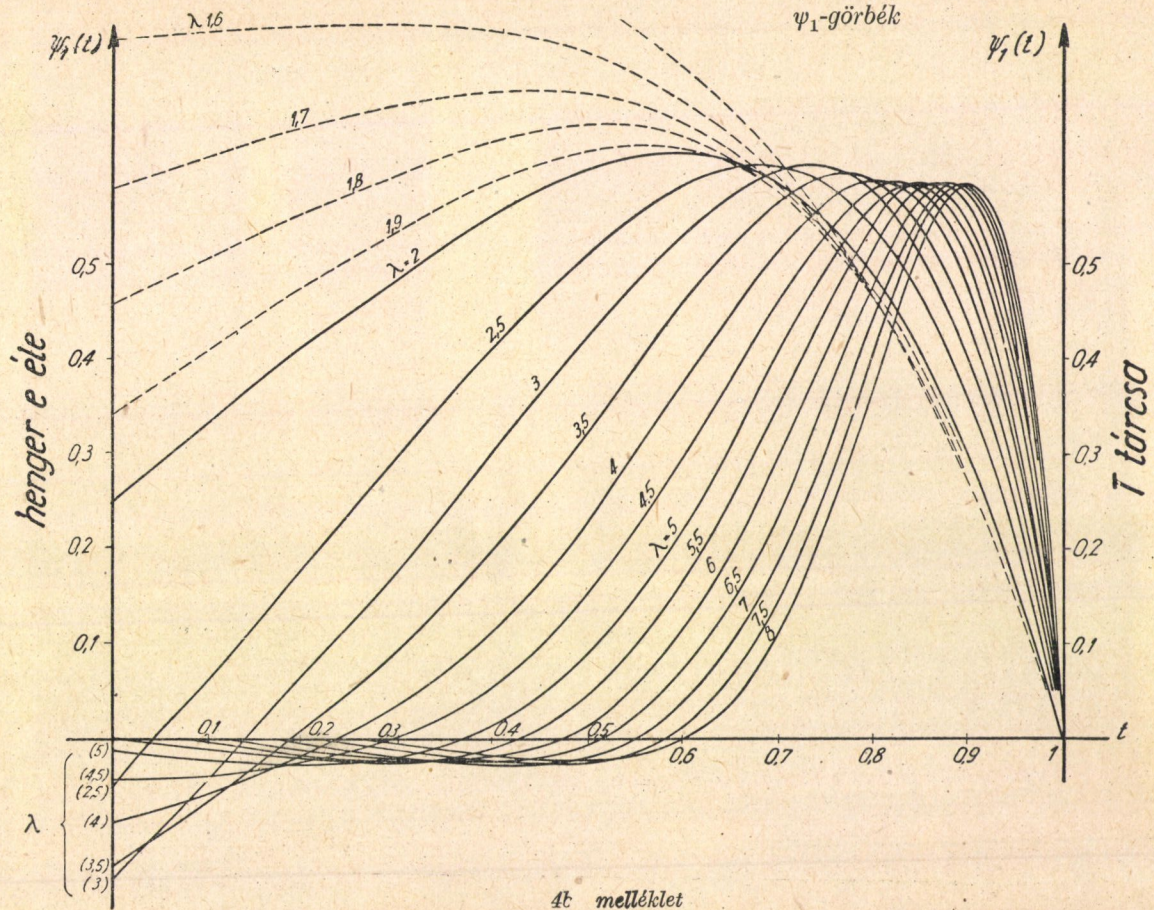
Jelmagyarázat a 6. sz. mellékleten



4a. melléklet



## Hajlítófeszültségek meghatározása eT szabad csőszakaszon I.

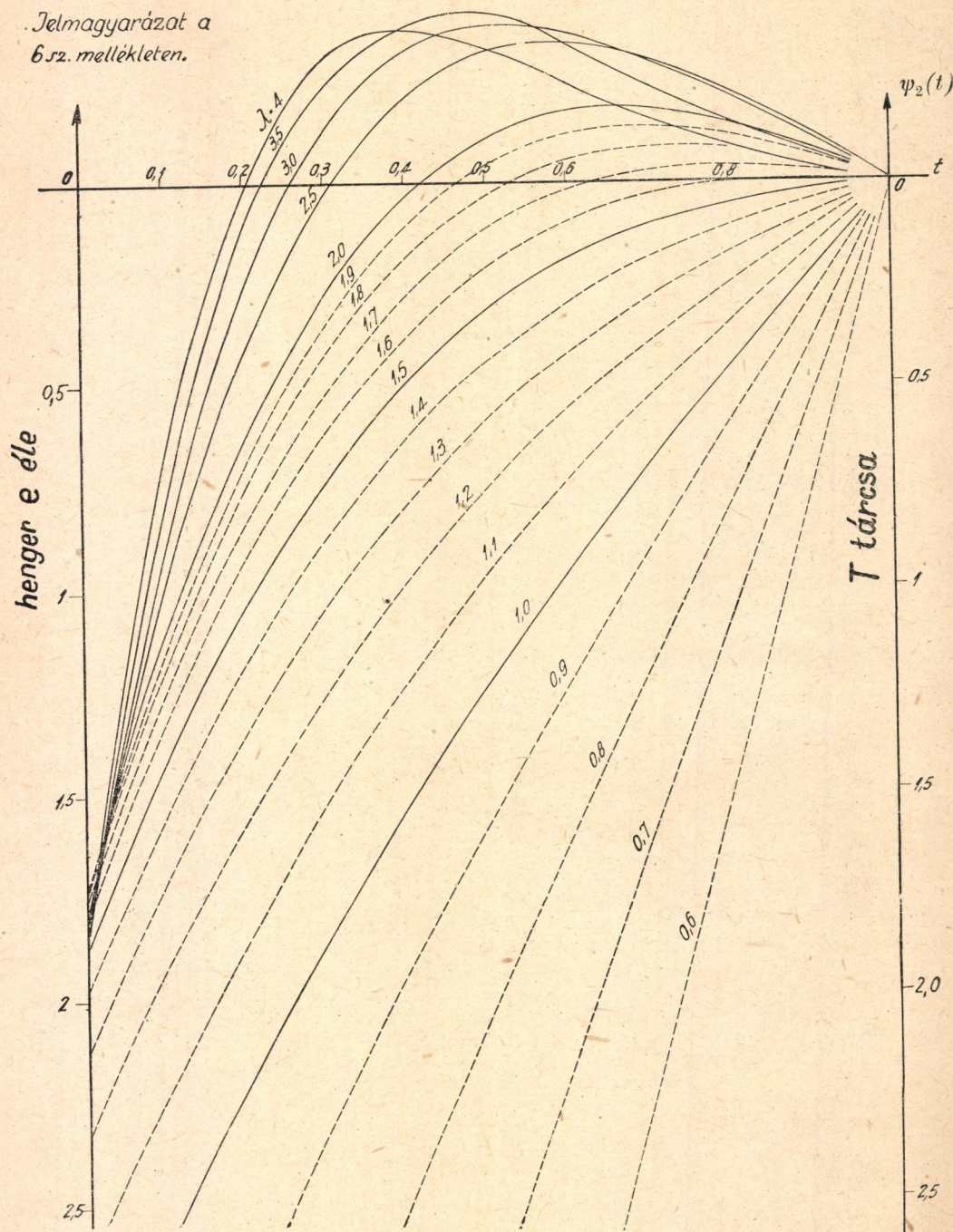




# Hajlító feszültségek meghatározása eT szabad csőszakaszon II.

$\psi_2$ -görbék

Jelmagyarázat a  
6.sz. mellékleten.

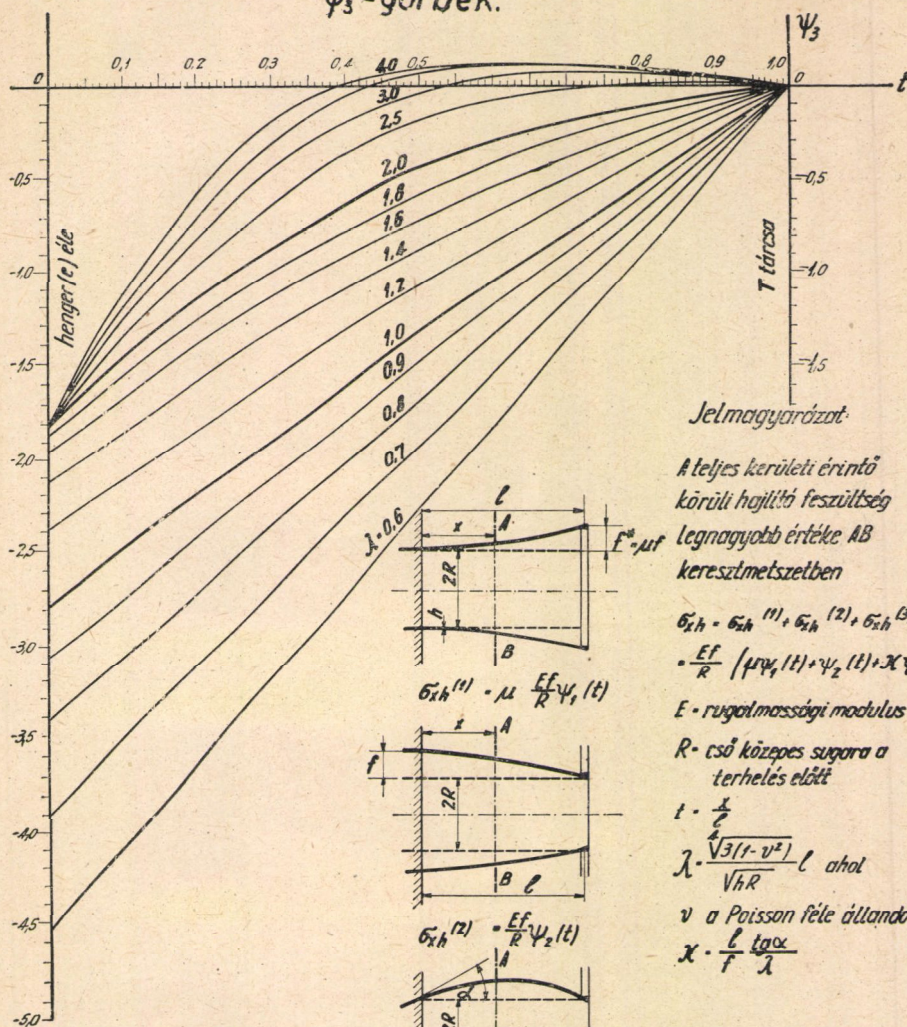


5. melléklet



# Hajlító feszültségek meghatározása eT szabad csőszakaszon III.

$\psi_3$ -görbék.



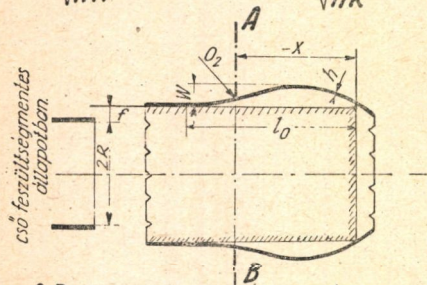
6. melléklet



# Radiális deformációk és gyűrűs feszültségek $e\gamma$ felfekvési hullám mentén

$\varphi_{II}$  görbék

$$\xi = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} x, \quad \rho = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} l_0$$



$AB$  keresztmetszetben mért

sugárnövekedés:  $W = f \varphi_{II}(\xi)$

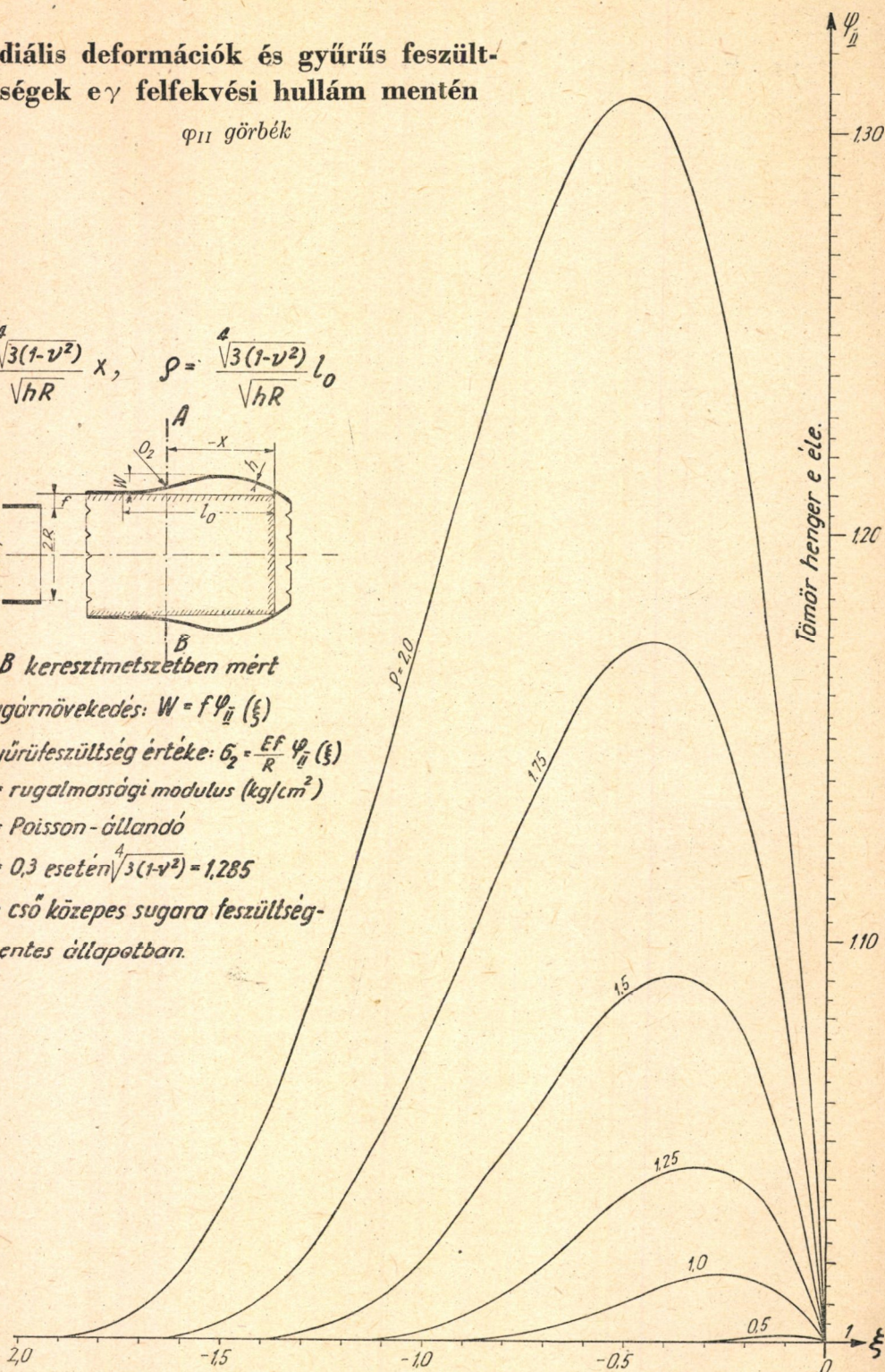
gyűrűfeszültség értéke:  $\sigma_2 = \frac{E f}{R} \varphi_{II}(\xi)$

$E$  = rugalmassági modulus ( $\text{kg/cm}^2$ )

$\nu$  = Poisson-állandó

$\nu = 0,3$  esetén  $\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} = 1,285$

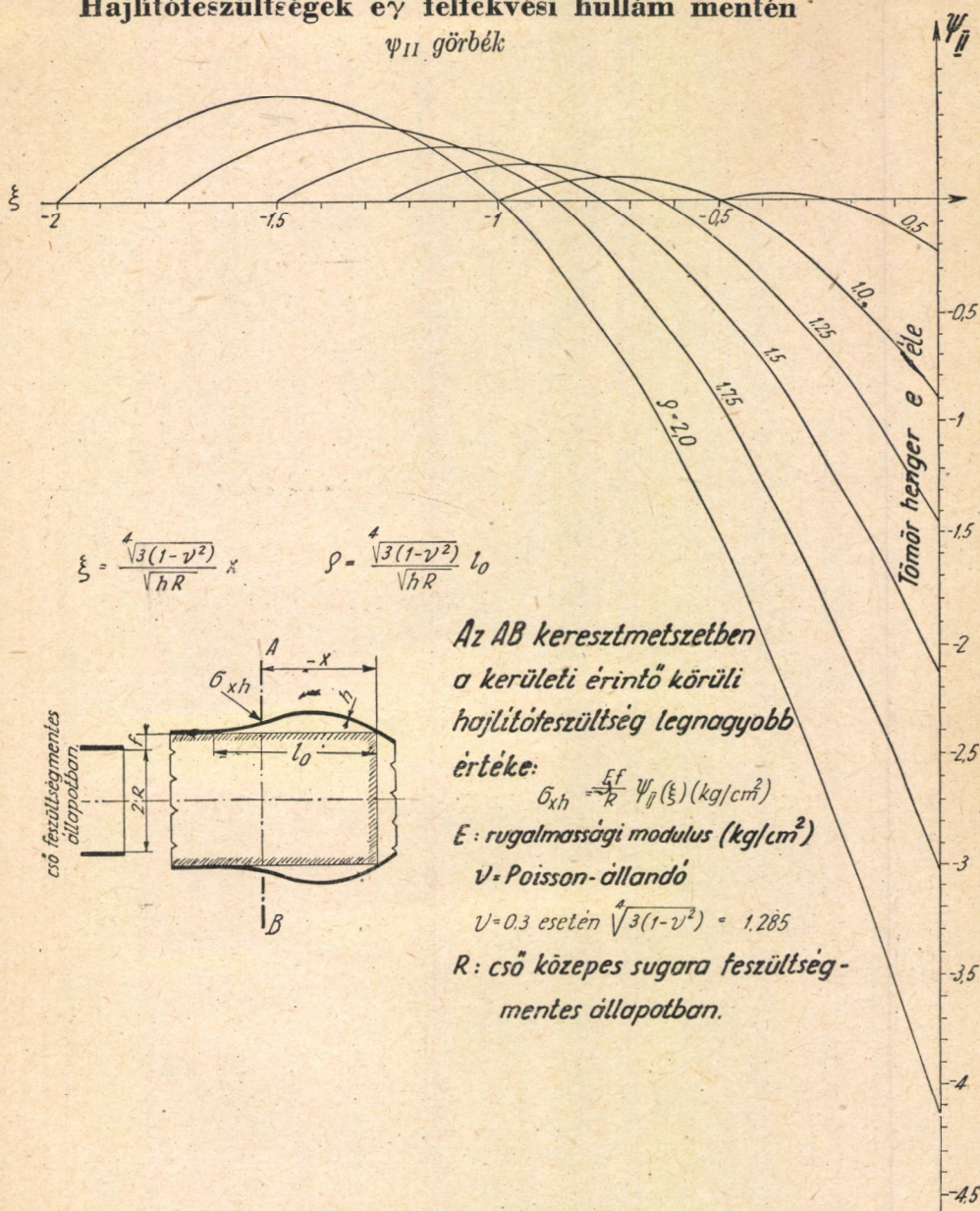
$R$ : cső közepes sugara feszültségmentes állapotban.





# Hajlítófeszültségek egy felfekvési hullám mentén

$\psi_{II}$  görbék



$$\xi = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} x$$

$$\rho = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} l_0$$

Az AB keresztmetszetben a kerületi érintő körüli hajlítófeszültség legnagyobb értéke:

$$\sigma_{xh} = \frac{Ef}{R} \psi_{II}(\xi) \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

$E$ : rugalmassági modulus (kg/cm<sup>2</sup>)

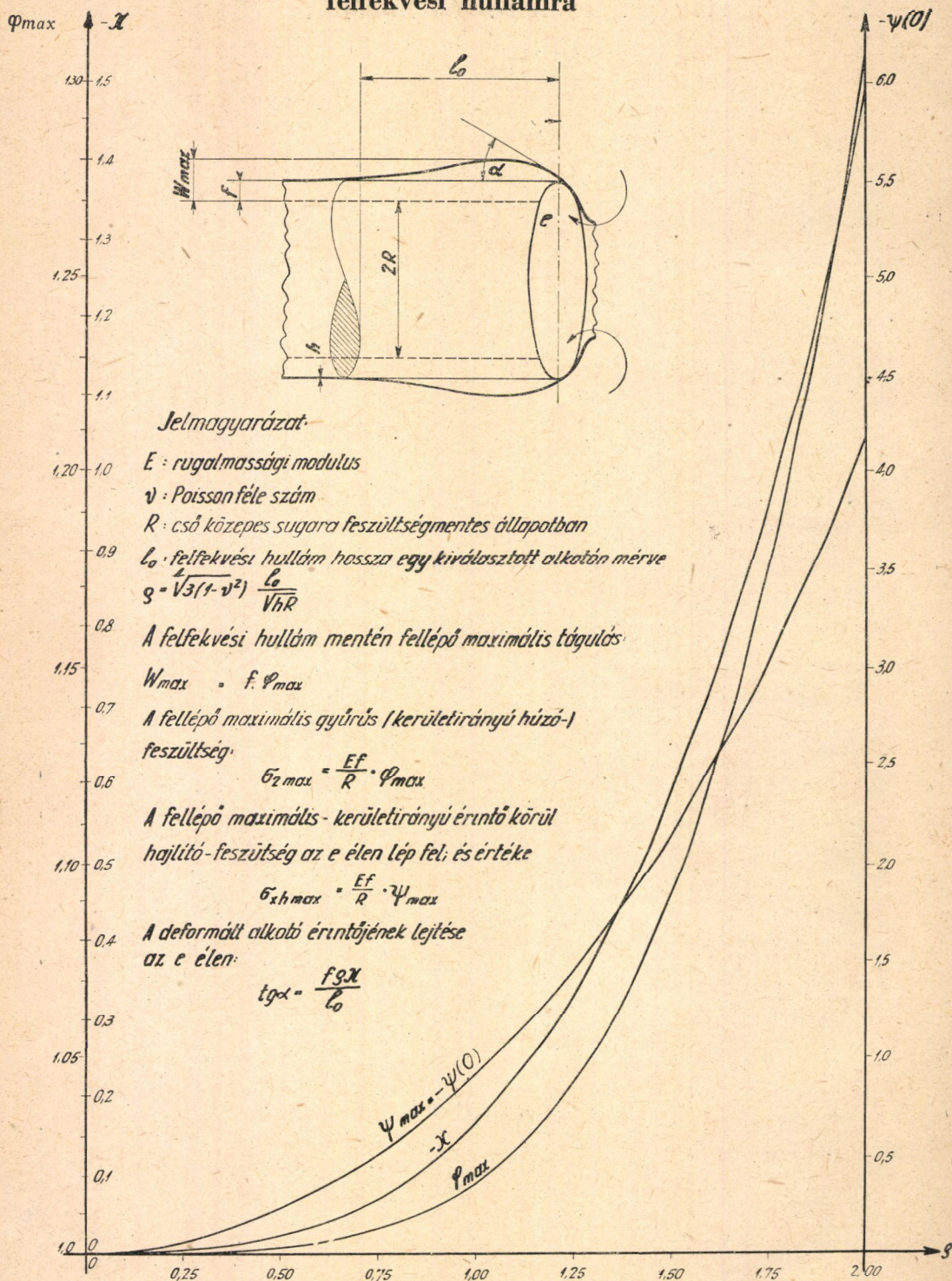
$\nu$  = Poisson-állandó

$$\nu = 0.3 \text{ esetén } \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} = 1.285$$

$R$ : cső közepes sugara feszültségmentes állapotban.



# Maximális deformációk és feszültségek egy felfekvési hullámra

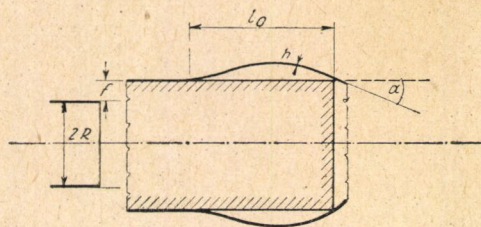




# Nomogramm $\varphi$ és $\kappa$ meghatározására

$\lambda$   
0,6  
0,7  
0,8  
0,9  
1  
1,1  
1,2  
1,3  
1,4  
1,6  
1,7  
1,8  
1,9  
2  
2,1  
2,2  
2,3  
2,4  
2,5

$\mu$   
0  
0,1  
0,2  
0,3  
0,4  
0,5  
0,6  
0,7  
0,8  
0,9  
1  
1,1  
1,2  
1,3  
1,4  
1,5  
1,6  
1,7  
1,8  
1,9  
2  
2,1  
2,2  
2,3  
2,4  
2,5



$$\varphi = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} l_0$$

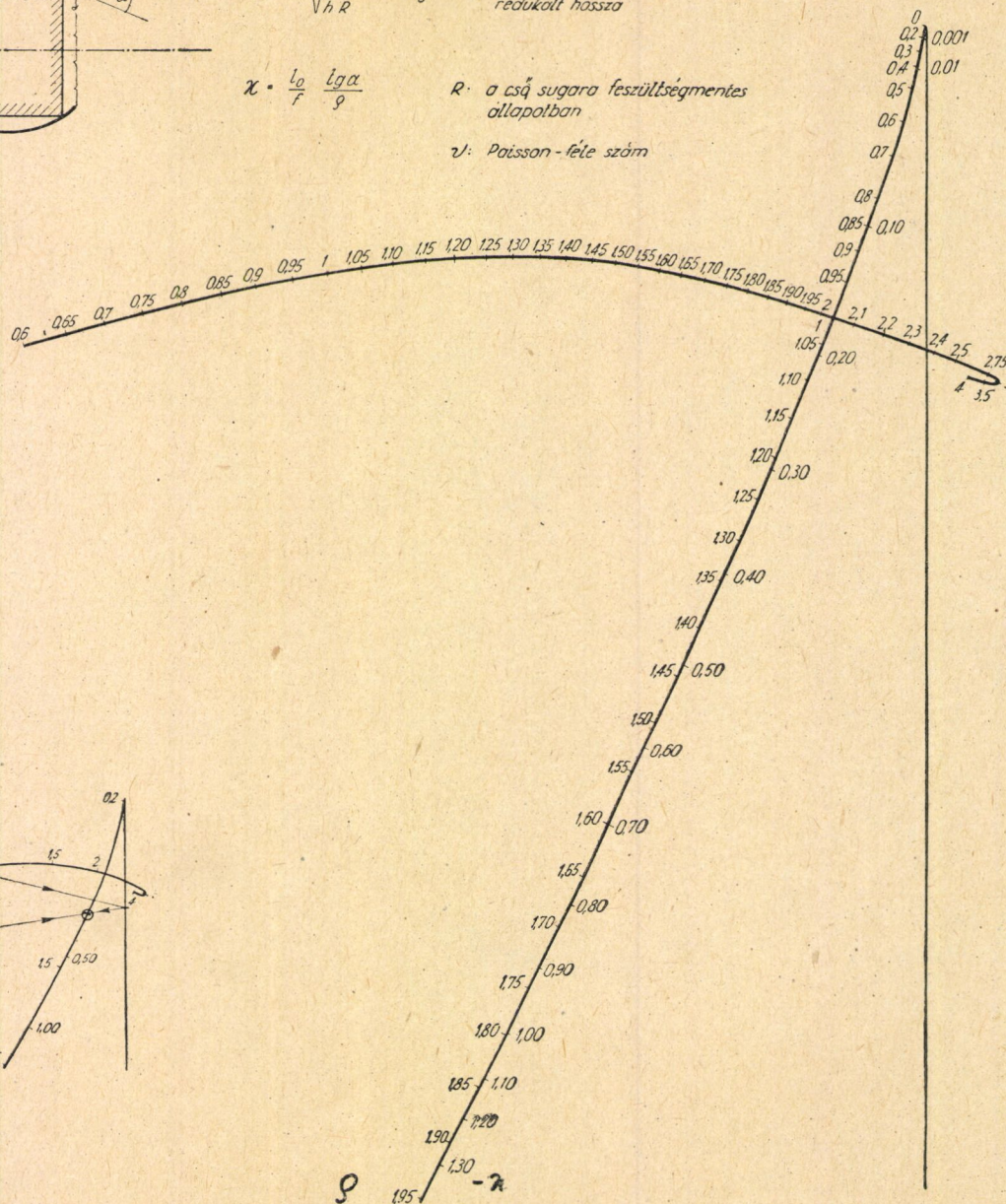
feltételezett hullám  
redukált hossza

$$\kappa = \frac{l_0}{F} \frac{lg\alpha}{g}$$

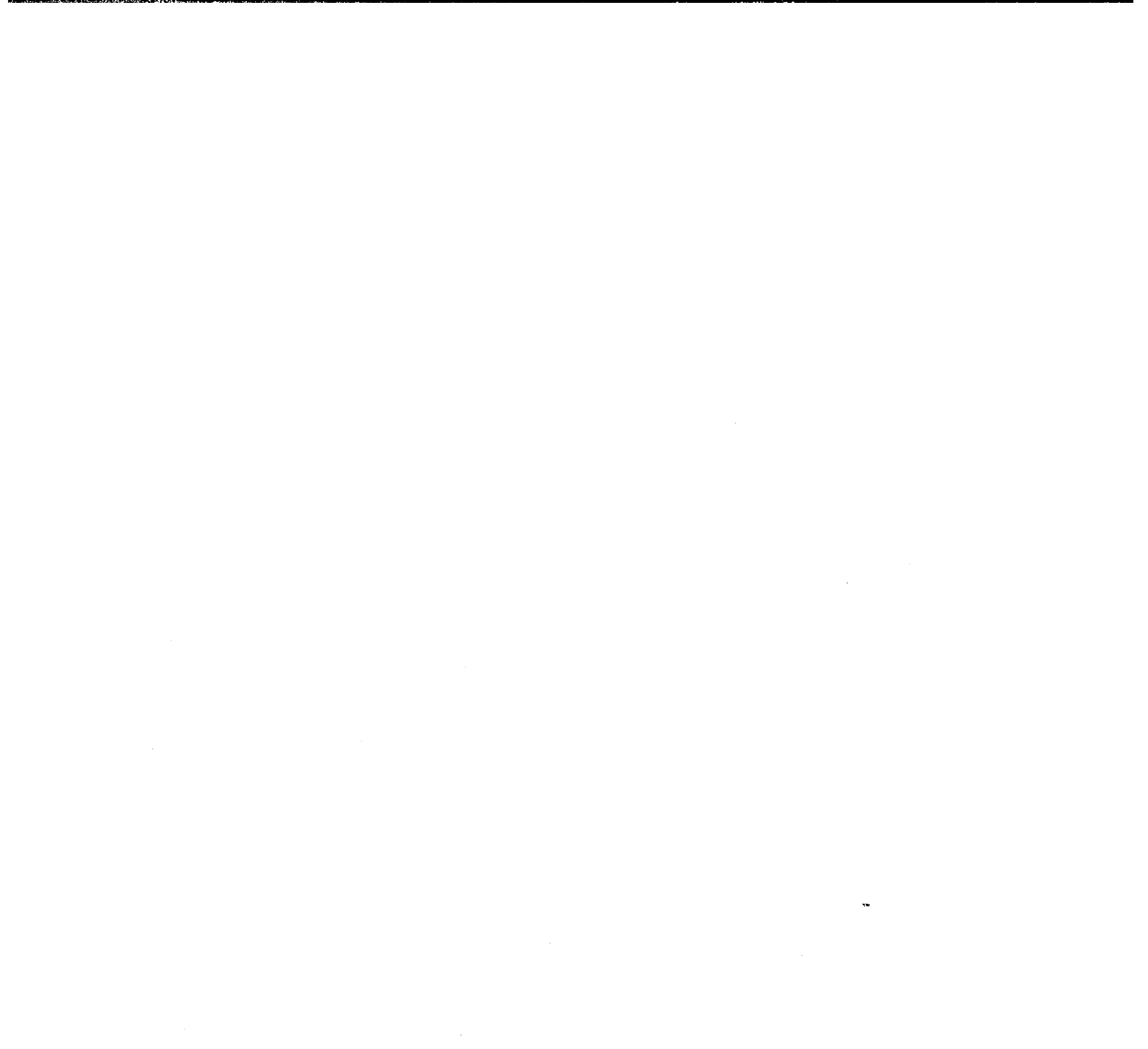
R: a cső sugara feszültségmentes  
állapotban

$\nu$ : Poisson-féle szám

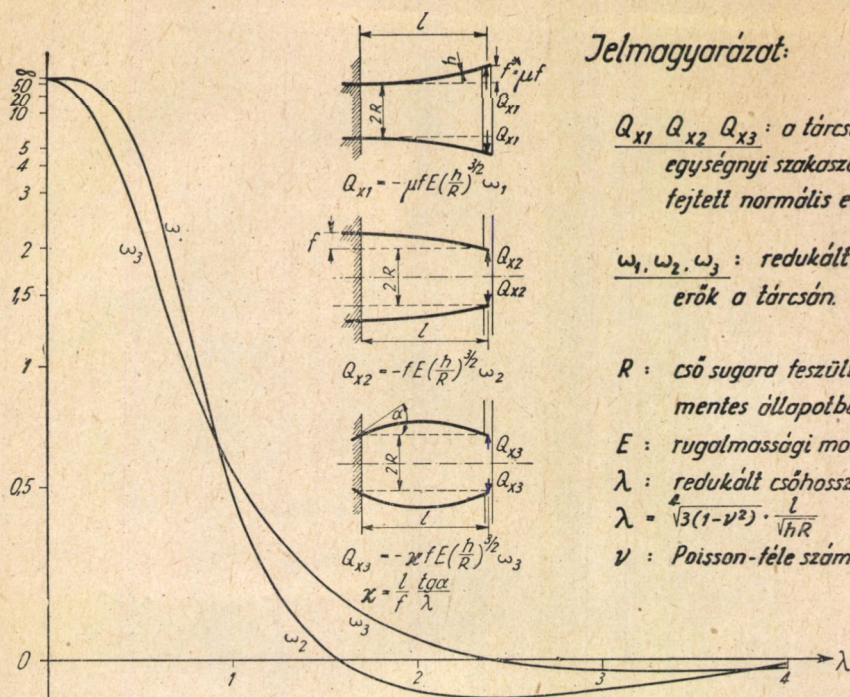
$\lambda$







# Diagramm a tárcsát kitérítő erő meghatározásához



Jelmagyarázat:

$Q_{x1}, Q_{x2}, Q_{x3}$  : a tárcsakerület egységnyi szakasza által kifejtett normális erők.

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$  : redukált nyíró-erők a tárcsán.

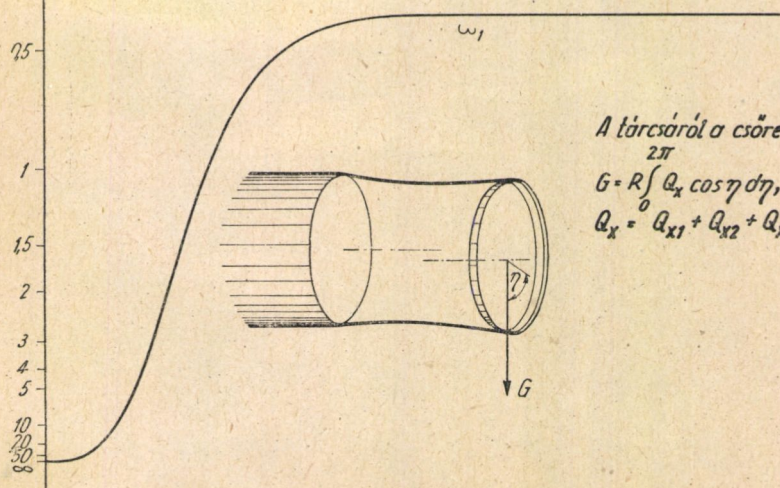
$R$  : cső sugara feszültségmentes állapotban

$E$  : rugalmassági modulus

$\lambda$  : redukált csőhossz

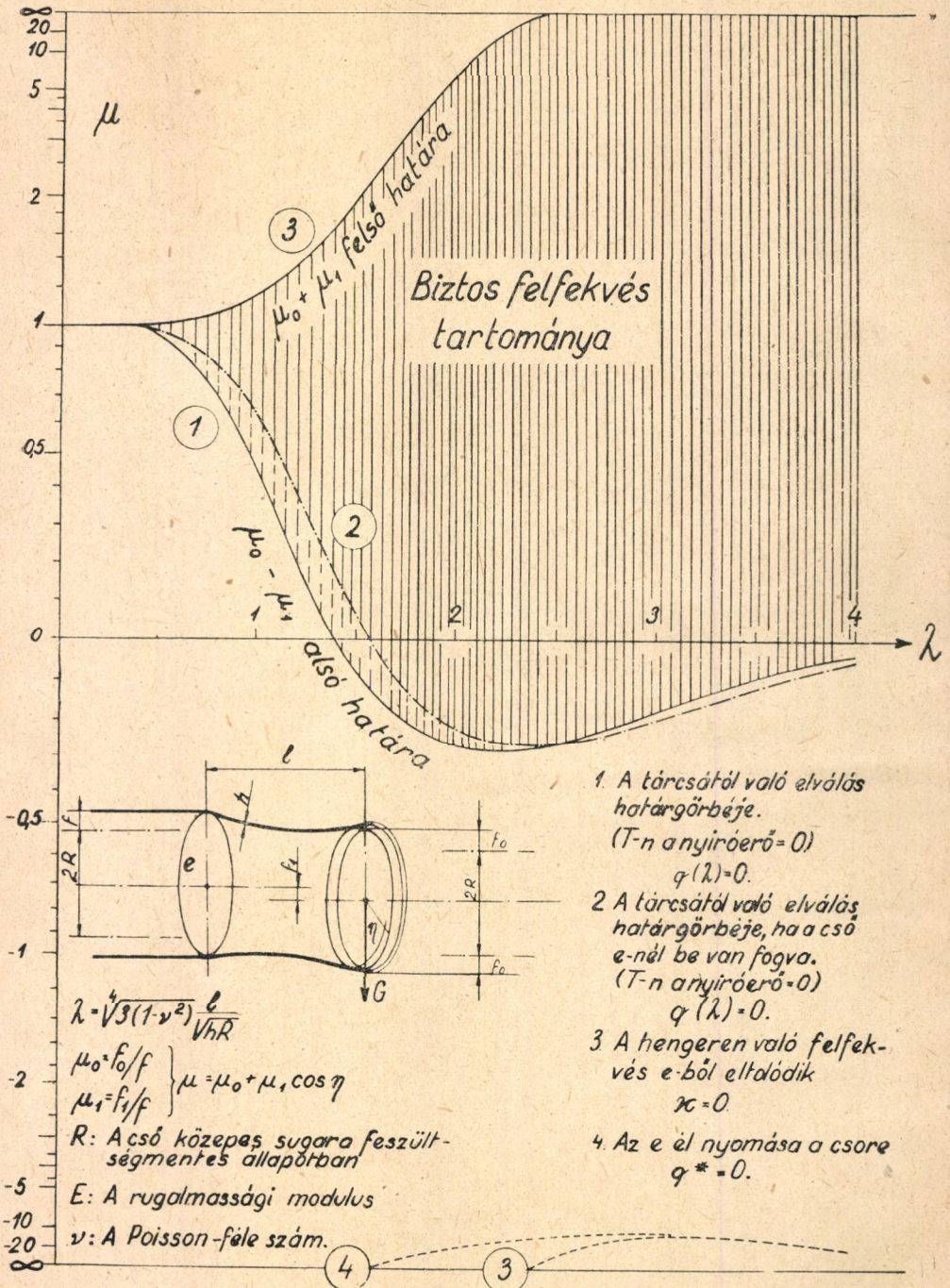
$\lambda = \frac{l}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{hR}}$

$\nu$  : Poisson-féle szám





## A cső biztos felfekvésének feltételei



12. melléklet

## TARTALOMJEGYZÉK

<i>Rényi Alfréd: Előszó</i> .....	3
-----------------------------------	---

### *Mechanikai és szilárdságtani osztály:*

<i>Egerváry Jenő—Lovass Nagy Viktor: A hővezetési differenciálegyenlet megoldása az időtől lineárisan függő kerületi feltétel mellett</i> .....	11
<i>Lovass-Nagy Viktor: Saját síkjában nyomott körlemezek kihajlásáról</i> .....	23
<i>Lovass-Nagy Viktor: Kis, állandó görbületű vékony lemezek alakváltozásáról</i> .....	33
<i>Lovass-Nagy Viktor: Plasztikus és összetett feszültségi állapotok vizsgálata vastagfalú csövekben</i> .....	49
Az osztály munkatársainak az osztály munkájának eredményeit tartalmazó, másutt megjelent dolgozatainak jegyzéke .....	81
Az osztály szemináriumában elhangzott előadások kivonatai .....	81

### *Valószínűségszámítási osztály:*

<i>Rényi Alfréd—Szentmártony Tibor: Gépipari üzemek egyidejűségi tényezőjének valószínűségszámítási vizsgálata</i> .....	85
<i>Rényi Alfréd: Kompresszorok és légtartályok méretezése üzemek sűrített levegővel való ellátására</i> .....	105
<i>Rényi Alfréd—Takács Lajos: Poisson-folyamatok által származtatott történés-folyamatokról és azok technikai és fizikai alkalmazásáról</i> .....	139
<i>Székelly Gábor: Szöveg gépek optimális fordulatszámának valószínűségszámítási alapon való meghatározása többgépes rendszer esetén</i> .....	147
<i>Székelly Gábor: Kötés energiaszükségletének minimalizálása az elő- és után-törők legcélszerűbb beállításával</i> .....	157
<i>Medgyessy Pál: A Galton-féle deszkáról</i> .....	165
<i>Juvancz Ireneusz—Lipták Tamás: A matematikai statisztika orvosi-biológiai alkalmazásának néhány problémájáról</i> .....	175
Az osztály munkatársainak az osztály munkájának eredményeit tartalmazó, másutt megjelent dolgozatainak jegyzéke .....	207
Az osztály szemináriumában elhangzott előadások kivonatai .....	208

### *Matematikai statisztikai osztály:*

<i>Vincze István: A regressziós egyenes meghatározásáról</i> .....	215
<i>Vincze István: Az ipari minőségellenőrzés statisztikai módszerei és az Intézet feladatai e módszerek bevezetése terén</i> .....	239
Az osztály munkatársainak az osztály munkájának eredményeit tartalmazó, másutt megjelent dolgozatainak jegyzéke .....	250
	461

*Numerikus- és grafikus módszerek osztálya:*

<i>Frey Tamás:</i> A planiméterfajták működési elvei, különös tekintettel az Alkalmazott Matematikai Intézet gépeire .....	253
<i>Béda Gyula:</i> Egy pályaprobléma daruval történő teheremelésnél .....	295
<i>Gáti József:</i> A gömbháromszögtan Legendre-tételének érvényességi köre földi méreteknél .....	303
<i>Aczél János:</i> Többváltozós függvényegyenletek .....	311
<i>Hosszú Miklós:</i> A biszimmetria függvényegyenletéhez .....	335
Az osztály munkatársainak, az osztály munkájának eredményeit tartalmazó, másutt megjelent dolgozatainak jegyzéke .....	342

*Vegyipari osztály:*

<i>Fenyő István:</i> A szinguláris integrálegyenletek egy osztályáról .....	345
<i>Fenyő István:</i> A matematikai fizika néhány differenciálegyenletének egy megoldási módszeréről .....	355
Az osztály munkatársainak az osztály munkájának eredményeit tartalmazó másutt megjelent dolgozatainak jegyzéke .....	362

*Egyéb dolgozatok jegyzéke:*

<i>Freud Géza:</i> Kétkomponensű, ideális gázelegy eloszlása centrifugális erőterben ..	365
<i>Arató Máttyás — Freud Géza:</i> Módosított egycentrumú kölcsönhatású integrálok számítása .....	369
<i>Freud Géza:</i> Párhuzamos elektromos vezeték mágneses terének számításáról ..	377
<i>Freud Géza:</i> A statisztikus atommodell kinetikus energia korrekciójáról .....	389
<i>Rényi Alfréd:</i> Megjegyzés Gombás Pál és Gáspár Rezső egy dolgozatával kapcsolatban .....	393
<i>Fazekas Ferenc:</i> Földelési ellenállás és lépésfeszültség számítása földelőcső esetén	399
<i>Pál Sándor:</i> Statikai terhelés átvitele vékonyfalú csövekre.....	409

# HIBA JEGYZÉK

Oldal		Helytelenül	Helyesen
89	9. sor	$\bar{\tau} = f(j)$	$\xi = f(j)$
90	14. sor	$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$
104	11. sor	T.E	ИЛИ
189	alulról 5. sor	$\{V\} C_{24,24} = 24\} = \dots$	$\{V\} \{C_{24,24} = 24\} = \dots$
195	a nagyság szerint 22.-ik számérték	74,2	74,3
196	a nagyság szerint 9.-ik számérték	31,5	31,1
196	az ábra jobb felső sarkába	$D_{20\ 30}^-$	$D_{20\ 20}^-$
197	a nagyság szerint 24.-ik számérték	41,5	41,9
416	alulról 1. sor	$\frac{1}{\sqrt[4]{3(1-v^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3(1-v^2)}}$
417	10. sor	$\sqrt{3(1-v^2)}f$	$\sqrt{3(1-v^2)}f$
428	11. és 12. sor helyesen: K pontjai felül <i>közelednek</i> , alul <i>távolodnak</i> egymástól, vagyis K felül <i>zsugorodást</i> , alul erős <i>nyulást</i> szenved.		
434	13. sor	$g(q)$	$-g(q)$ .
462	19. sor	kölcsönhatásu	kölcsönhatási



